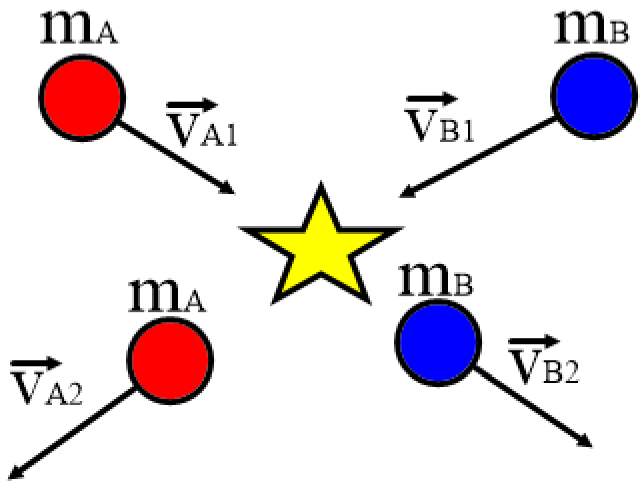
A tömeg fogalma

A klasszikus (newtoni) mechanikában a tömeg a tehetetlenség mértéke.
Két tömegpont ütközése esetén a sebességváltozások aránya a tömegek arányának reciprokja:



$$\frac{|\vec{v}_{A2}-\vec{v}_{A1}|}{|\vec{v}_{B2}-\vec{v}_{B1}|}=\frac{m_B}{m_A}$$

Sebességtranszformáció

A K rendszerben mérve a test sebessége a pozitív x irányban $u_x = \Delta x/\Delta t$.
A K' rendszer a K-hoz képest a pozitív x irányban halad v sebességgel.
Az x irányú sebességkomponens a K' rendszerben mérve:

$$u_x{}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{\Delta x v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad \text{ahol} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Amennyiben a mozgó rendszerből szeretnénk u_x'-t áttranszformálni a nyugvó rendszerbe, akkor mindenhová v helyett $-v$-t kell írni:

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + v\Delta t')}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{\Delta x' v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t'} = \frac{u_x{}' + v}{1 + \frac{u_x{}' v}{c^2}}$$

A v sebességre merőleges komponensek transzformációja:

$$u_y{}' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{\Delta x v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \qquad \text{és} \qquad u_z{}' = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

Az ellenkező irányba transzformálva pedig:

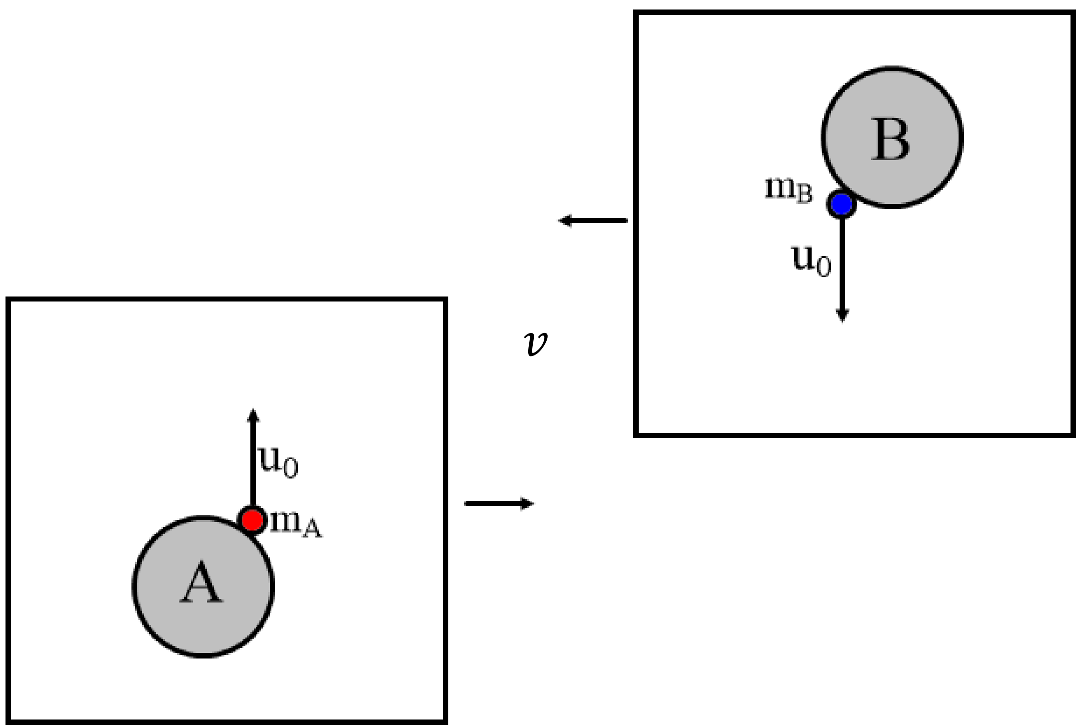
$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{\Delta x' v}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t'} = \frac{u_y{}'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x{}' v}{c^2}\right)} \qquad \text{és} \qquad u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{u_z{}'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x{}' v}{c^2}\right)}$$

Tömeg relativisztikus mozgás esetén

Legyen két megfigyelő *A* és *B*, akik egymáshoz képest nyugalomban vannak, és egymásnak dobnak két ugyanolyan ($m_A = m_B = m_0$) labdát azonos u_0 nagyságú sebességgel, melyek rugalmasan ütköznek.
A két labda ütközés után ugyanolyan u_0 nagyságú sebességgel pattan vissza *A* és *B* kezébe.
Így aztán természetesen:

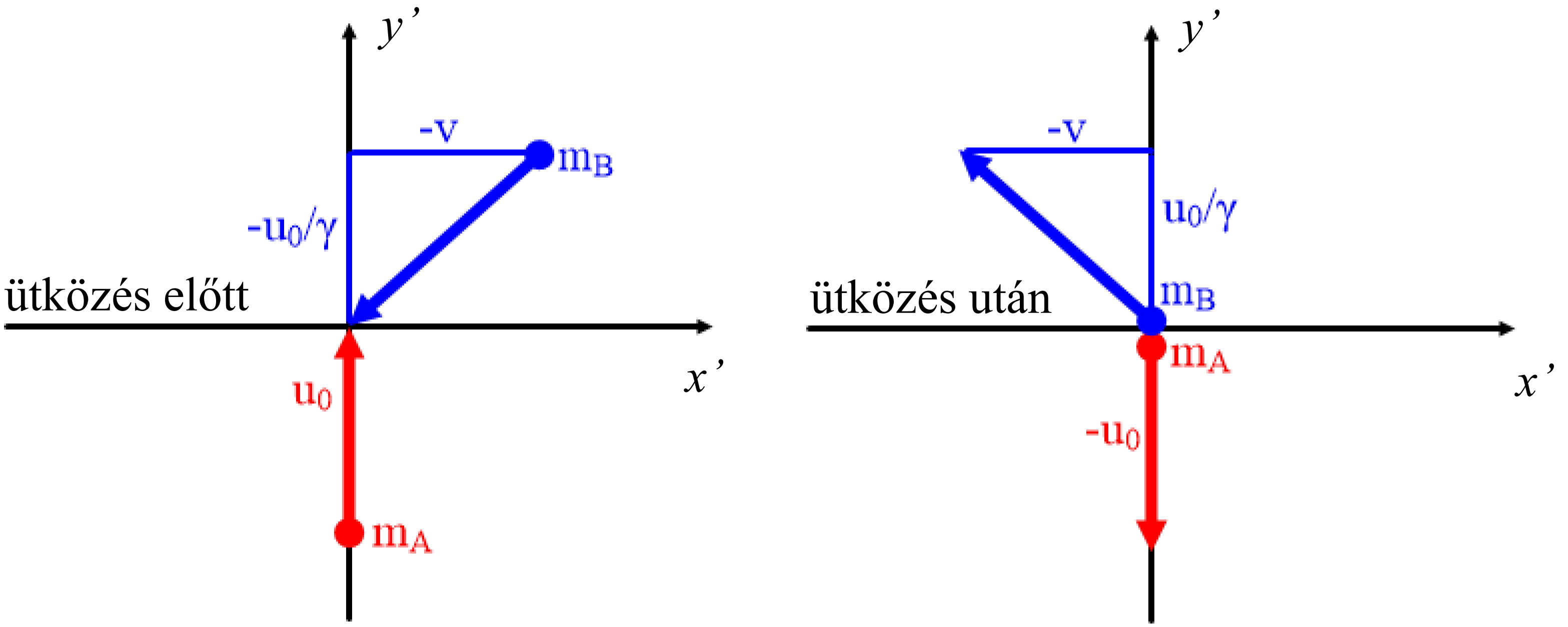
$$\frac{2u_0}{2u_0} = \frac{m_B}{m_A} = 1$$

Most mozogjon *A* és *B* egymáshoz képest *v* sebességgel a labdák irányára merőlegesen.



Relativisztikus tömegnövekedés

Legyen *K'* vonatkoztatási rendszer az *A* megfigyelőhöz rögzítve, *K* pedig *B* megfigyelőhöz. *K'* a $+x$ irányban halad v sebességgel. Ekkor a labdák sebességei ütközés előtt és után:



$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{|\Delta u_{Ay}|}{|\Delta u_{By}|} = \frac{2u_0}{2u_0/\gamma} = \gamma \qquad \text{ahol} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

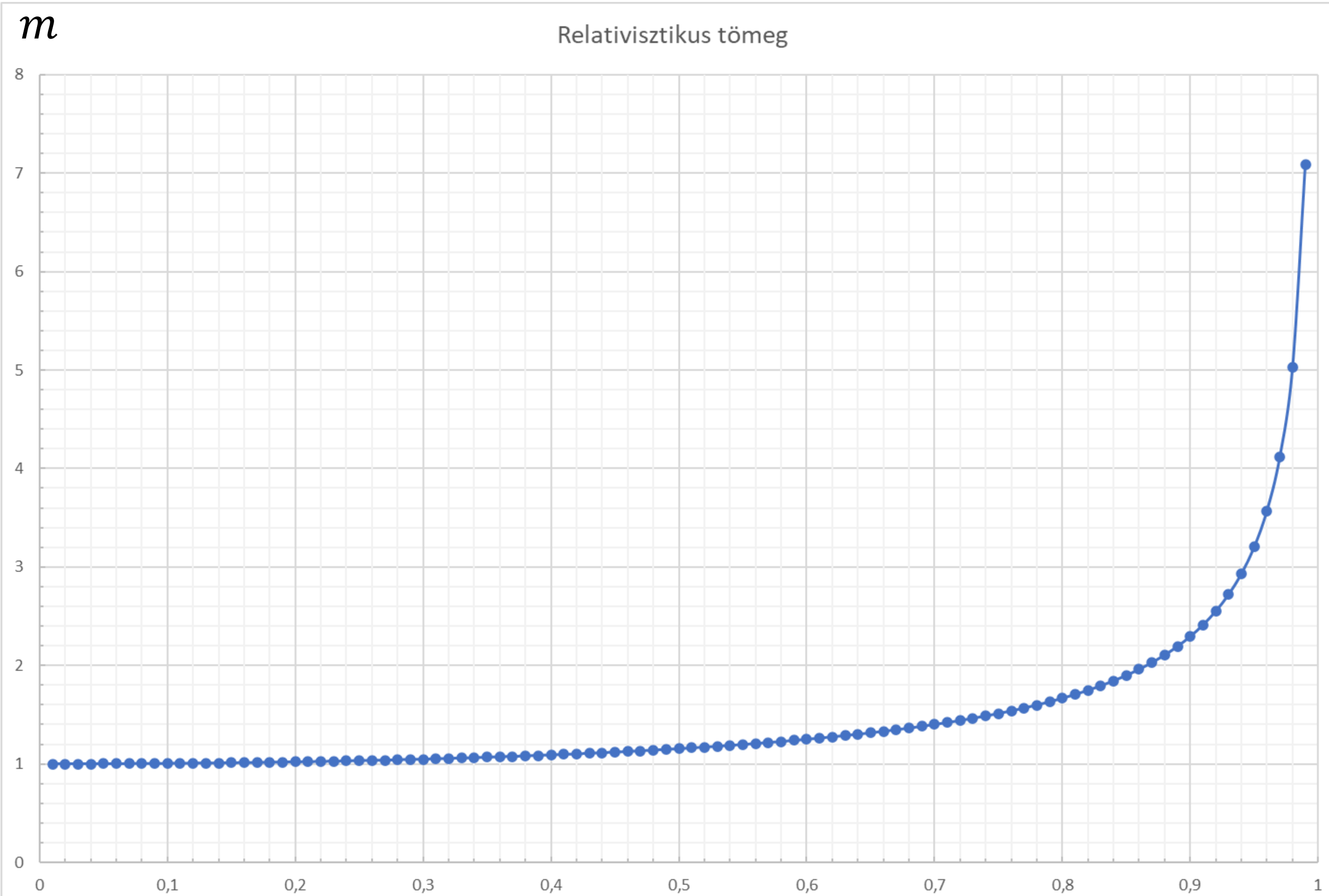
Amennyiben $u_0 \to 0$, akkor elmondható, hogy m_A nyugalomban van, m_B pedig v nagyságú sebességgel mozog az *A* megfigyelőhöz képest.

$m_A = m_0$ nyugalmi tömeg $\qquad$ $m_B = \gamma m_A = \gamma m_0$ mozgási tömeg

A relativisztikus tömeg sebességfüggése

A *K* vonatkoztatási rendszerben nyugvó megfigyelő az *u* sebességű test tömegét a nyugalmi tömegnél nagyobbnak méri:

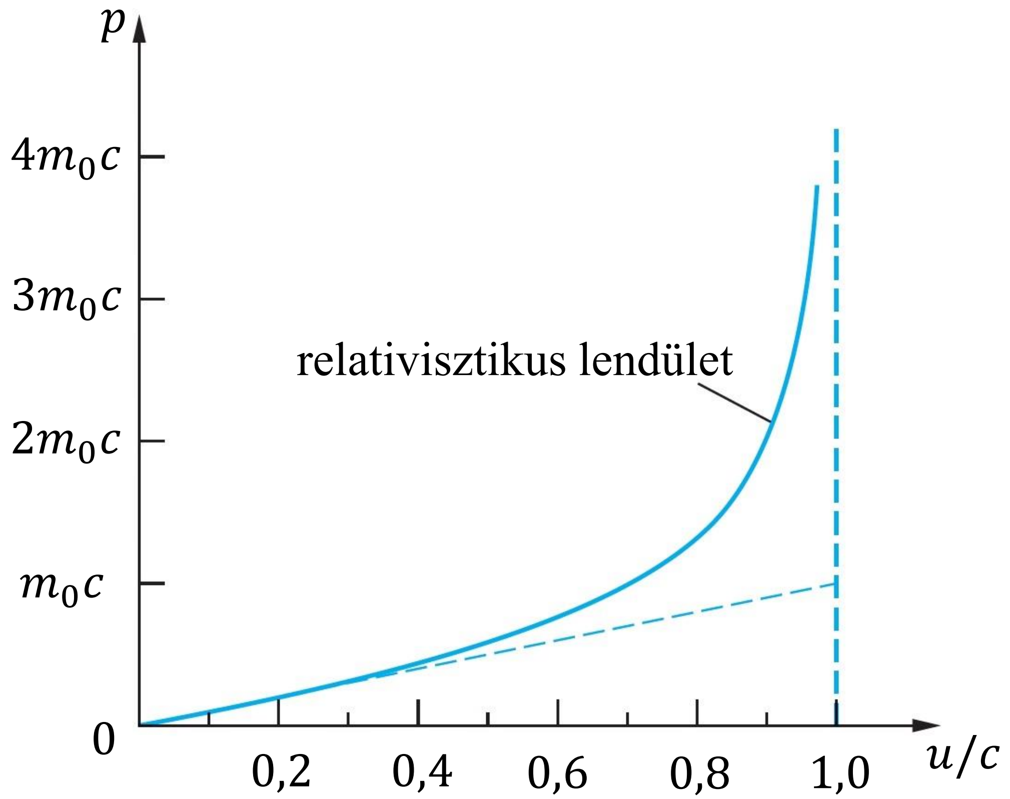
$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$



Relativisztikus lendület

A mozgó test relativisztikus tömegnövekedése miatt a lendület sem a klasszikus módon függ valójában a sebességtől, a megszokott képlet kizárólag $u \ll c$ esetén igaz.
A fény sebességével összemérhető (relativisztikus) sebességek esetén a lendület nagysága:

$$p = mu = \gamma m_0 u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$



Munkatétel relativisztikus esetben

A relativisztikus tömegnövekedés miatt a Newton-törvényekből származtatott dinamika alapegyenlete az $\vec{F}_e = m_0\vec{a}$ formában nagy sebességeknél nem érvényes!
A lendülettétel ennél viszont általánosabb, és a relativisztikus lendületet használva továbbra is érvényes:

$$\vec{F}_e = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0\vec{u})}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Induljon egy m_0 tömegű test nyugalomból, és az x irányban egy állandó nagyságú F erő gyorsítsa azt fel u_1 sebességre t_1 idő alatt x_1 távolságot megtéve.
Mivel a munkatétel szerint $W = \Delta E_K$ és a kezdeti kinetikus energia nulla, az F erő munkája a test kinetikus energiájával lesz egyenlő:

$$E_K = W = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} \frac{d(\gamma m_0 u)}{dt} dx = \int_0^{u_1} \frac{dx}{dt}\frac{d(\gamma m_0 u)}{du} du = \int_0^{u_1} u\frac{d(\gamma m_0 u)}{du} du = *$$

Szükségünk lesz a következőre:

$$\frac{d\gamma}{du} = \frac{d}{du}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{d}{du}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2u}{c^2}\right) = \frac{u}{c^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Relativisztikus mozgási energia

Felhasználva az előző eredményt: $\frac{d\gamma}{du} = \frac{u}{c^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$$\frac{d(\gamma m_0 u)}{du} = m_0 \frac{d(\gamma u)}{du} = m_0\left(\frac{d\gamma}{du}u + \gamma\frac{du}{du}\right) = m_0\left[\frac{u^2}{c^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= m_0\left[\frac{\frac{u^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right] = m_0\frac{\frac{u^2}{c^2}+\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Az előző oldalról folytatva:

$$E_K = W = \cdots = \int_0^{u_1} u\frac{d(\gamma m_0 u)}{du}du =*= m_0\int_0^{u_1} u\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}du =$$

$$= m_0\left[c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{u_1} = m_0c^2\left[\left(1-\frac{{u_1}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

Tehát u_1 helyett u sebességű test mozgási energiája:

$$\boxed{E_K = m_0c^2(\gamma - 1)}$$

Tömeg-energia ekvivalencia

Az u sebességű test mozgási energiájára kaptuk:

$$E_K = m_0 c^2(\gamma - 1) = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$$

Felmerül a kérdés, hogy mi ennek a két tagnak a jelentése.
Az első tag a test teljes energiája, a második pedig a nyugalmi energia:

$$E = E_K + E_0 \quad \text{ahol} \quad E = \gamma m_0 c^2 \ \text{és} \ E_0 = m_0 c^2$$

A nyugalmi energia a klasszikus fizikában ismeretlen fogalom. A testnek a nyugalmi tömegével arányos energiája van, még akkor is, ha a sebessége nulla!
A teljes energia pedig az $m = \gamma m_0$ relativisztikus tömeggel arányos.
Ez az Einstein-féle tömeg-energia ekvivalencia:

$$\boxed{E = mc^2}$$

A relativisztikus tömeg, illetve energia megmaradó mennyiség zárt rendszer esetén.
A mozgási energiának kis sebességnél vissza kell adnia a klasszikus képletet:

$$E_K = m_0 c^2(\gamma - 1) = m_0 c^2\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] \approx m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2} m_0 u^2$$

Felhasználva, hogy $(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$ ha $\delta \ll 1$

Tömeg-energia ekvivalencia kísérleti bizonyítéka

Cockroft-Walton kísérlet (1932):
Nyugvó lítium atomot bombáztak felgyorsított protonokkal (néhány száz keV).

$${}_{1}^{1}H + {}_{3}^{7}Li \rightarrow 2 \cdot {}_{2}^{4}He$$

A keletkező két hélium atommagot Wilson-féle ködkamrában detektálták.
A nyugalmi tömegekre az alábbi igaz:

$$m_{0k} = m_0(H) + m_0(Li) > 2m_0(He) = m_{0v}$$

Tehát a nyugalmi tömeg csökkent: $\Delta m_0 < 0$ Ez a tömeghiány vagy tömegdefektus.

$$\frac{\Delta m_0}{m_{0k}} > 10^{-3}$$ mai műszerekkel pontosan mérhető!

A mozgási energia viszont növekedett:

$$E_{kk} = E_k(H) + E_k(Li) < 2E_k(He) = E_{kv}$$

A teljes energia $E = m_0 c^2 + E_k$ így állandó maradt: $\Delta m_0 c^2 + \Delta E_k = 0$

Mindössze annyi történt tehát, hogy a nyugalmi energia egy része átalakult mozgási energiává.

Hasonló kísérleti bizonyíték az elektron-pozitron pár szétsugárzása, amikor a részecske-antirészecske pár nyugalmi energiája két foton formájában kisugárzódik.

Négyeslendület

A nyugalmi tömeg és a négyessebesség segítségével előállíthatjuk a négyeslendületet:

$$p^\mu = m_0 u^\mu = m_0(\gamma c, \gamma \vec{v}) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad \text{illetve} \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)$$

A négyeslendület normanégyzete:

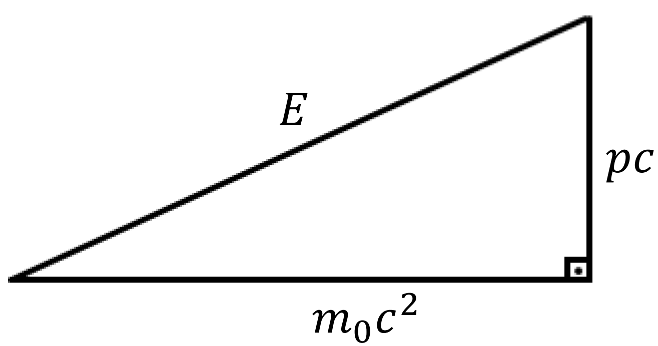
$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{\gamma^2 {m_0}^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 {m_0}^2 v^2 = \gamma^2 {m_0}^2 (c^2 - v^2) = \frac{{m_0}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}(c^2 - v^2)$$

$$= \frac{{m_0}^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}(c^2 - v^2) = {m_0}^2 c^2$$

A nyugalmi energia (nyugalmi tömeg)
Lorentz-invariáns mennyiség!

Átrendezve a teljes energia és lendület közötti kapcsolat:

$$\boxed{E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2}$$



Példa:

Egy $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg nyugalmi tömegű mozdulatlan elektront 800 kV feszültséggel felgyorsítunk.

a) Határozza meg az elektron nyugalmi energiáját!

b) Határozza meg az elektron mozgási energiáját, teljes energiáját, és sebességét!

Tömegdefektus

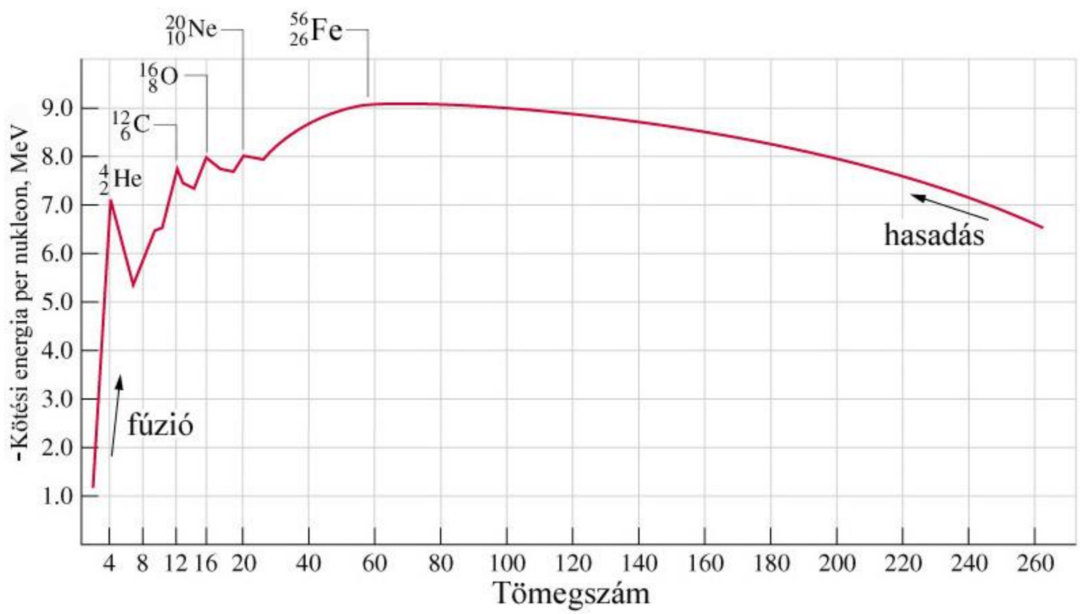
Jelölje $M(A, Z)$ az A tömegszámú és Z rendszámú atommag tömegét.
Tömegspektrométerrel megmérve azt kapjuk, hogy az atommag tömege Δm-el kisebb mint az alkotórészek (protonok és neutronok) tömege:

$$\Delta m = M(A, Z) - Z m_p - (A - Z) m_n < 0$$

Ez a **tömegdefektus** az Einstein-féle tömeg-energia ekvivalencia alapján kiszámolva éppen a **kötési energiát** adja meg (szabad alkotórészek ~ 0 energiája negatív lett, mert kötött állapotba kerültek). Tehát a kötési energia adja meg mekkora energia befektetésével tudnánk újra alkotórészeire bontani az atommagot (vagy bármely kötött rendszert).

$$E_K = \Delta m c^2 < 0$$

Az egy nukleonra jutó kötési energia meghatározható a tömegeket megmérve: $\varepsilon = E_K/A$



Ha egy folyamat során ε csökken akkor energia szabadul fel.

pl. kis magok fúziója
vagy nagy magok hasadása

ε vasra a legkisebb.