

# Invariáns ívhossz

Elemi esemény: pl. egy foton kibocsátása vagy elnyelése a tér egy adott pontjában, adott időben.

$$\vec{r} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) \quad \text{vagy} \quad x^i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{és} \quad t$$

A  $t$  az  $\vec{r}$  pontban nyugvó óra által mutatott idő.

Az elemi események sokasága vonatkoztatási rendszertől független geometriai szerkezettel rendelkezik. Két egymáshoz infinitezimálisan közeli eseményre:

$$ds^2 \equiv (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad \text{invariáns ívhosszelem négyzete}$$

Természetesen egy véges ívhossz négyzete is invariáns.

Tehát az elemi események közötti négydimenziós távolságok függetlenek a vonatkoztatási rendszertől.

Az elemi események közti invariáns ívhossz révén definiált geometriai struktúra a **téridő**.

# Fénykúp

Az O elemi esemény történjen  $(0, 0, 0)$  helyen és  $t = 0$  időben. A mozgás legyen  $x$  irányban. Az ívhossz négyzete háromféle lehet.

$s^2 = (ct)^2 - (x^1)^2 > 0$       időszerűen elválasztott események

$s^2 = (ct)^2 - (x^1)^2 = 0$       fénszerűen elválasztott események

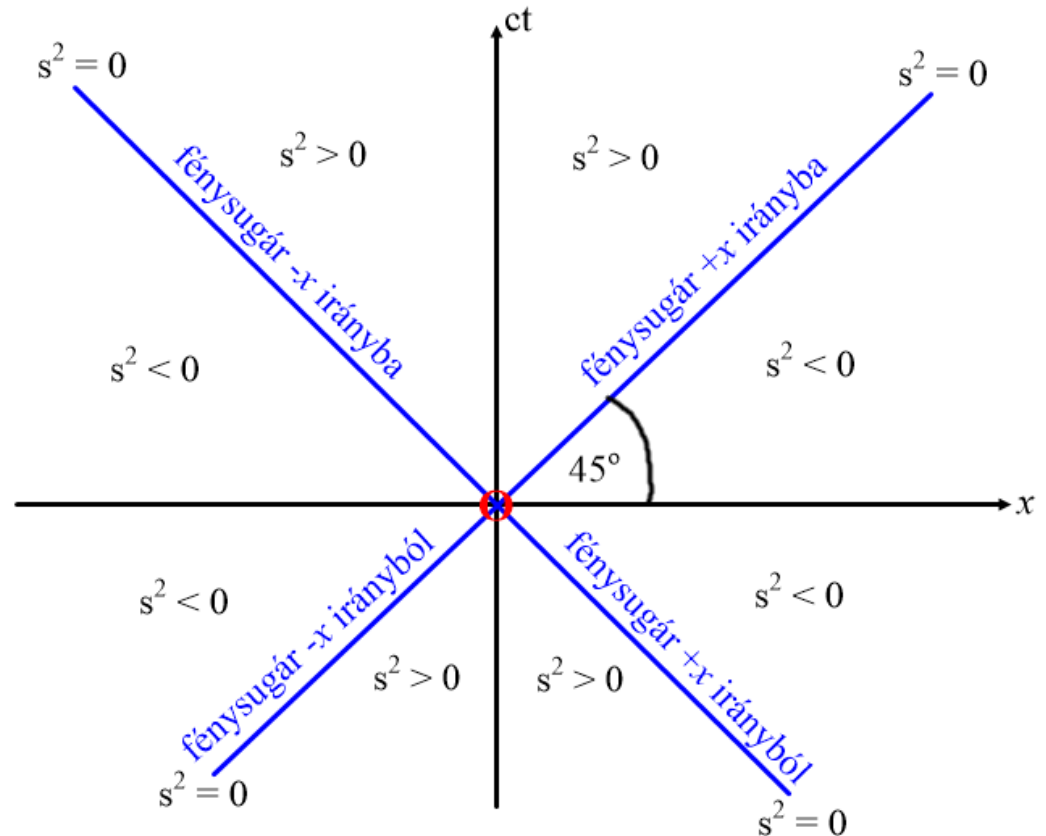
$s^2 = (ct)^2 - (x^1)^2 < 0$       térszerűen elválasztott események

Oksági kapcsolat az O eseménnyel csak az első kettő esetében lehet. Testek mozgására pedig csak az első lehet érvényes.

Az O esemény pedig a múltbéli fénykúp belsejével és felületével lehet oksági kapcsolatban.

Kúp felszíne: eseményhorizont

O számára az észlelhető (múlt) és befolyásolható (jövő) univerzum a kúp felületét és belsejét jelenti.



# Minkowski-tér

Az invariáns ívhossz:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Ez felfogható úgy, mint egy 4-dimenziós  $x^\mu$  vektor hosszának négyzete.

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Az ilyen vektorok tere a Minkowski-tér. Ezen vektorok hosszát a Poincaré-transzformációk változatlanul hagyják (összesen 10 féle transzformáció):

- időirányú eltolások (1 féle)
  - térbeli eltolások az  $x^1, x^2, x^3$  irányokban (3 féle)
  - térbeli forgatások az  $(x^1, x^2), (x^1, x^3), (x^2, x^3)$  síkokban (3 féle)
  - forgatások az  $(x^0, x^1), (x^0, x^2), (x^0, x^3)$  síkokban (3 féle)  
(Lorentz-lökések)
- } Lorentz  
transzformációk

Lorentz-lökések: ezek felelnek meg az egymáshoz képest mozgó inerciarendszerek közötti áttérésnek  $v_x, v_y$  és  $v_z$  függvényében.

# Kontravariáns és kovariáns vektorok

A korábban látott  $x^\mu$  helyzetvektort **kontravariáns** négyes-helyzetvektornak nevezzük:

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

A négyes-helyzetvektor hosszának négyzete:  $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$

Ez a 4-dimenziós koordinátarendszer origója és a négyes-helyzetvektor hegye által jelölt esemény invariáns távolságának négyzete.

Bevezetve a **kovariáns** négyes-helyzetvektort:

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

Az invariáns ívelem négyzetére így írhatjuk:

$$s^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu$$

Konvenció: Az egyező kontravariáns és kovariáns indexekre összegezni kell!

$$s^2 = x^\mu x_\mu \quad \text{és} \quad ds^2 = dx^\mu dx_\mu$$

ez az indexek úgynevezett összeejtése

# Négyesvektorok

Minden olyan  $A^\mu$  mennyiséget, amelynek komponensei Lorentz-transzformáció hatására ugyanúgy transzformálódnak, mint a  $dx^\mu$  koordinátadifferenciálok, kontravariáns négyesvektornak nevezzük.

Az  $A^0$  komponens térbeli forgatásokra skalár, az  $A^i$  komponensek pedig egy 3-dimenziós vektort alkotnak:

$$A^\mu = (A^0, \vec{a})$$

Az ennek megfelelő kovariáns négyesvektor:  $A_\mu = (A^0, -\vec{a})$

Ennek komponensei Lorentz-transzformáció hatására úgy transzformálódnak, mint a  $dx_\mu$  koordinátadifferenciálok.

A négyesvektor hossza Lorentz-invariáns:  $A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \vec{a}^2$

Az  $A^\mu$  és  $B^\mu$  négyesvektorok skalárszorzata szintén Lorentz-invariáns, és az  $A^\mu B_\mu$  alakban kell kiszámolni. Minden ilyen  $\phi$  mennyiséget **Lorentz-skalárnak** nevezünk.

Oszlopvektor formátum:

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Skalárszorzat:

$$A^\mu B_\mu = (A^0 \quad A^1 \quad A^2 \quad A^3) \begin{pmatrix} B^0 \\ -B^1 \\ -B^2 \\ -B^3 \end{pmatrix}$$

# Négyestenzorok

Az olyan  $T^{\mu\nu\rho\dots}_{\kappa\lambda\sigma\dots}$  mennyiségeket, amelyeknek komponensei Lorentz-transzformáció során úgy transzformálódnak, mint a  $dx^\mu dx^\nu dx^\rho \dots dx_\kappa dx_\lambda dx_\sigma \dots$  szorzat,  $n$ -szer kontravariáns és  $m$ -szer kovariáns  $(n + m)$ -edrendű négyestenzoroknak nevezzük. ( $n$  volt a kontravariáns és  $m$  volt a kovariáns indexek száma.)

Pl. a kétszer kontravariáns  $T^{\mu\nu}$  transzformációja a következő séma szerint történik: ( $x$  irányban  $v$  sebességgel mozgó koordinátarendszerből a nyugvónak tekintett rendszerbe)

$$dx^0 dx^0 = \frac{dx^{0'} + \frac{v}{c} dx^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{dx^{0'} + \frac{v}{c} dx^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx^1 dx^3 = \frac{dx^{1'} + \frac{v}{c} dx^{0'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot dx^{3'}$$

Tehát például a  $T^{00}$  és  $T^{13}$  elemekre:

$$T^{00} = \frac{T^{00'} + \frac{v}{c} T^{10'} + \frac{v}{c} T^{01'} + \frac{v^2}{c^2} T^{11'}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$T^{13} = \frac{T^{13'} + \frac{v}{c} T^{03'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$