

Kinematika

A mozgás matematikai leírása, a mozgást kiváltó ok feltárása nélkül.

Helyvektor és elmozdulás

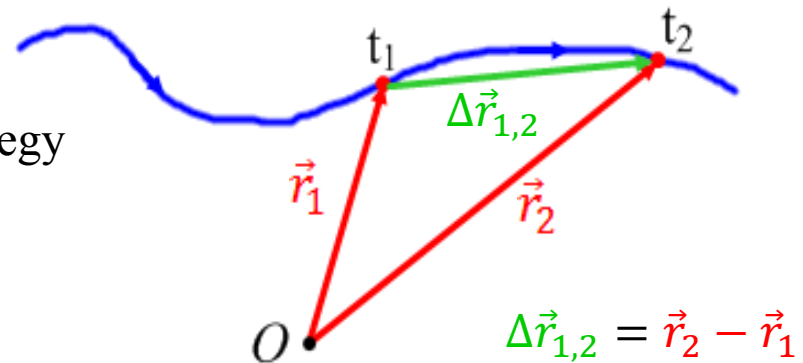
Egy test helyzetét és helyzetváltozását csak más testekhez viszonyítva írhatjuk le. Ezért először választani kell egy vonatkoztatási rendszert:

Egy test (pontszerű) helyzetét a t időpillanatban egy $\vec{r}(t)$ **helyvektorral** jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a testhez mutat.

A test mozgása során a térben kijelöli a **pályagörbét**.

Az **elmozdulás** a helyvektor megváltozása egy eltelt Δt idő alatt (itt $\Delta t = t_2 - t_1$).

$$\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



Sebesség

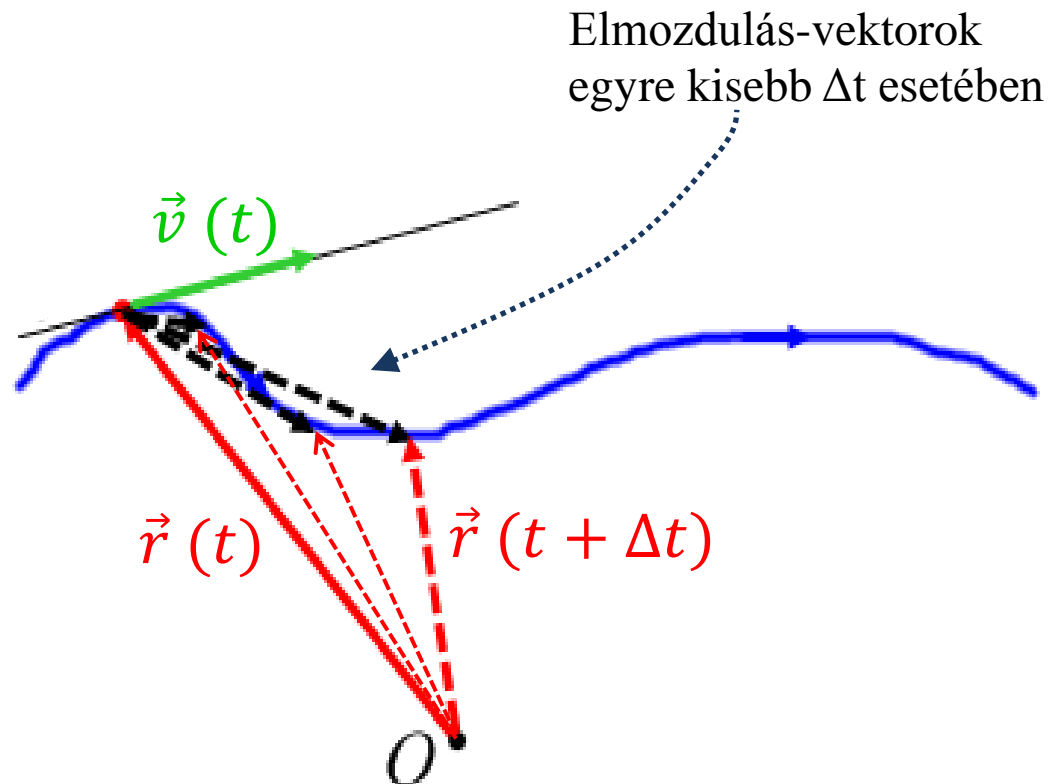
A **sebesség** azt jellemzi milyen gyorsan változik a helyvektor.

FONTOS: a sebesség vektormennyiség, iránya és nagysága is számít!

Ha a sebesség iránya és/vagy nagysága változik (általában igen), akkor pontos értéket csak kis Δt időre kaphatunk.

Teljesen pontos, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Gyorsulás

A **gyorsulás** a sebességvektor változási gyorsasága:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

FONTOS: gyorsulás akkor is van ha csak a sebesség iránya változik. Pl. kanyarodás

Ha a gyorsulás, mint az idő függvénye, valamint a kezdeti hely \vec{r}_0 és a kezdeti sebesség \vec{v}_0 ismert, akkor a mozgás pályája meghatározható:

Első lépés a sebesség idő függvény meghatározása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} dt = d\vec{v}$$

Bármely t_1 időpontban a sebesség: $\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt + \vec{v}(t_0)$ A végén a t_1 paraméter helyett simán t -t írunk, és megvan a $\vec{v}(t)$

A sebességfüggvény ismeretében a helyvektor bármely t_1 időpontban hasonlóképpen meghatározható:

$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) dt + \vec{r}(t_0)$$

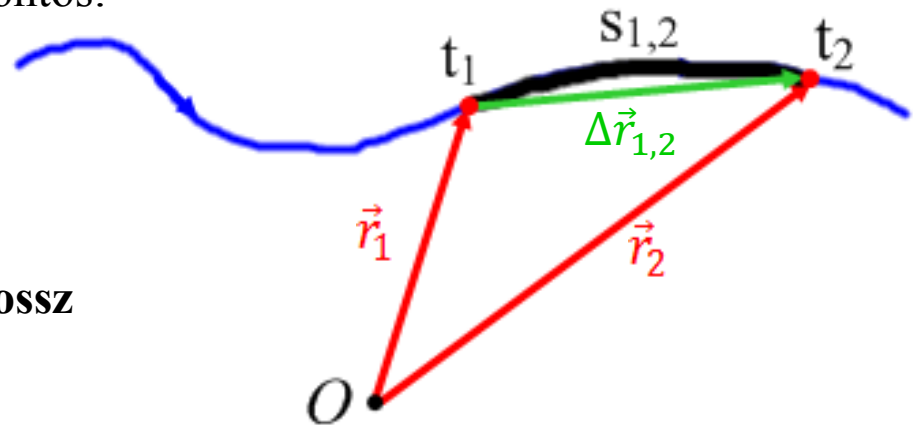
A végén a t_1 paraméter helyett simán t -t írunk, és megvan az $\vec{r}(t)$ függvényünk.

Úthossz és átlagsebesség

Egy adott idő alatt megtett **úthossz** a közben befutott pályagörbe hosszát jelenti. Ez már csak egy skalár mennyiség.

Számításánál csak a sebesség nagysága fontos:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt$$



Az ábra szemlélteti a különbséget az **úthossz** és az **elmozdulás(vektor)** között!

Az **átlagsebesség** (skalár) az a sebességnagyság amivel egyenletesen haladva ugyanazt a hosszúságú utat tenné meg a test ugyanakkora idő alatt:

Nem vektor jel,
csak egy vonás!

$$\bar{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}$$

Derékszögű Descartes koordináta rendszer

Segítségével a pálya egyenlete:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények a **koordináták**.

Az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységvektorok a **bázisvektorok**.

Pitagorasz tételével: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

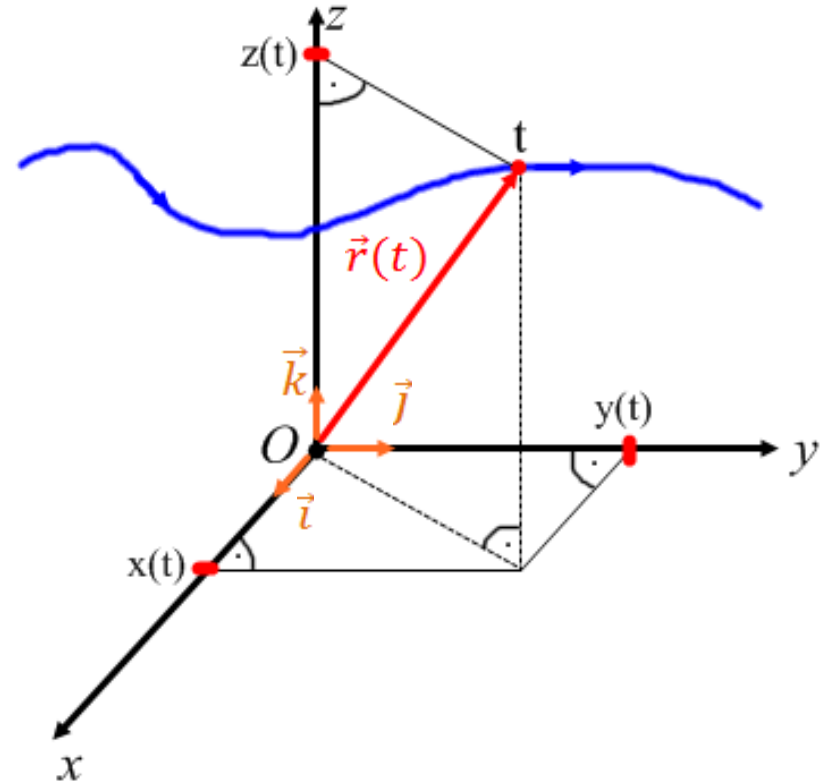
A sebesség:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

A sebesség nagysága: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

A gyorsulás és nagysága:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$



Példa: Egyenes vonalú egyenletes mozgás

A mozgás 1 dimenziós, ezért elég egy koordináta ha a mozgás irányába vesszük fel azt az egy tengelyt (pl. x).

Ebben az egyszerű esetben:

$$v_x = v \quad \Delta x = s$$

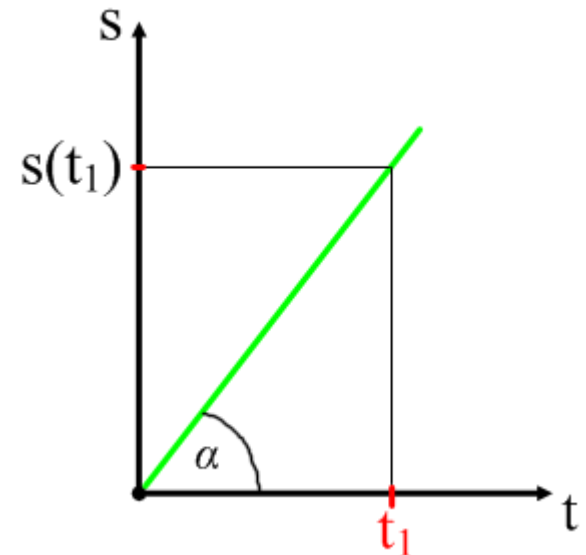
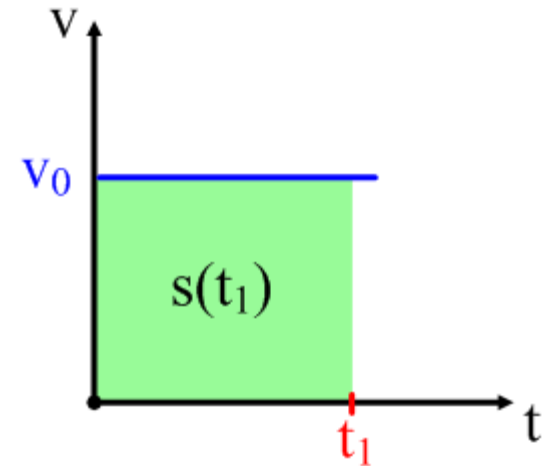
$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} v dt = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v \Delta t$$

Tehát ha $t_0 = 0$, akkor visszkapjuk az $s = vt$ képletet.

A megtett út a sebesség-idő grafikon alatti terület.

Tehát az úthossz lineáris függvénye az időnek, a meredekség pedig a sebesség:

$$\tan \alpha = v = \frac{s}{t}$$



Példa: Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás*

Ha a kezdősebesség vektor és a gyorsulás vektor egy egyenesbe esik, akkor a test annak az egyenesnek a mentén fog mozogni (ismét elég egy koordináta, pl. z):

tehát a test a z tengely irányában halad állandó a_z gyorsulással, és időtől függő v_z sebességgel (ezek a komponensek lehetnek negatívak is!). A többi komponens (x, y) nulla. A sebesség egy t_1 időpontban:

$$v_z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a_z(t) dt + v_z(t_0) = a_z(t_1 - t_0) + v_z(t_0)$$

legyen $t_0 = 0$
 $v_z(t_0) = v_{z0}$

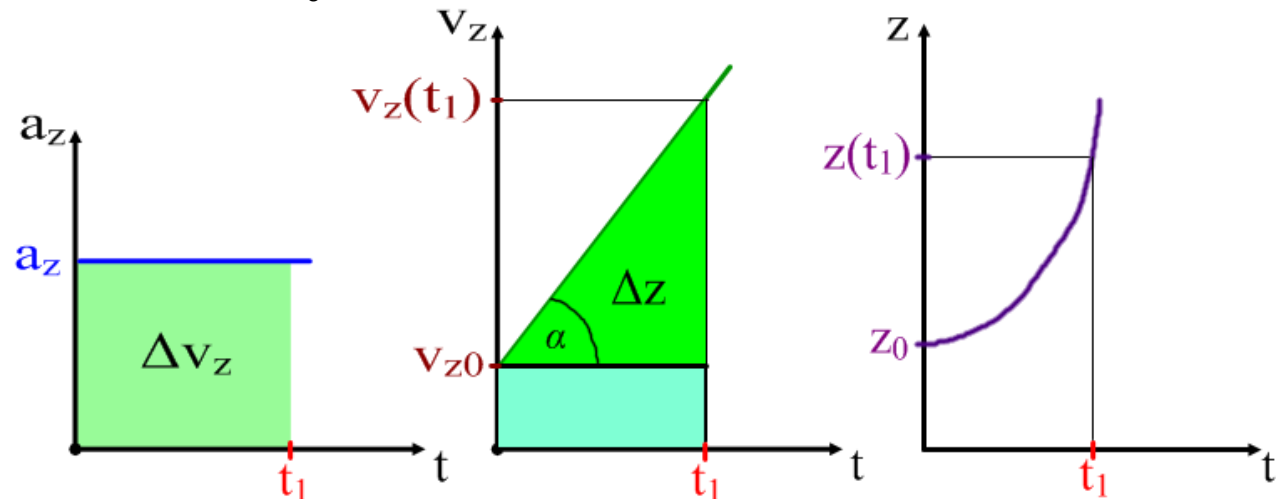
Ezekkel: $v_z(t) = a_z t + v_{z0}$

A test helye: $z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_z(t) dt + z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (a_z t + v_{z0}) dt + z(t_0)$ ($\Delta v_z = a_z \Delta t$)

legyen $z(t_0) = z_0$

Tehát ha $t_0 = 0$ továbbra is:

$$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{z0} t + z_0$$



Példa: Ferde hajítás* - Feladatok: 1, 2

A gyorsulás állandó (g), de nem esik egybe a kezdősebesség vektor irányával:

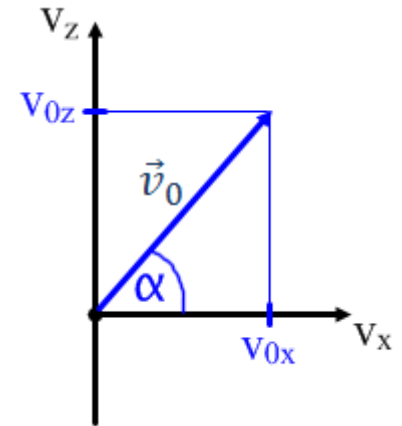
A kezdeti sebesség felbontása (2D – x és z):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha$$

A gyorsulás: $\vec{a} = -g\vec{k}$

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + 0\vec{j} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor: $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{i} + 0\vec{j} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t\right)\vec{k}$



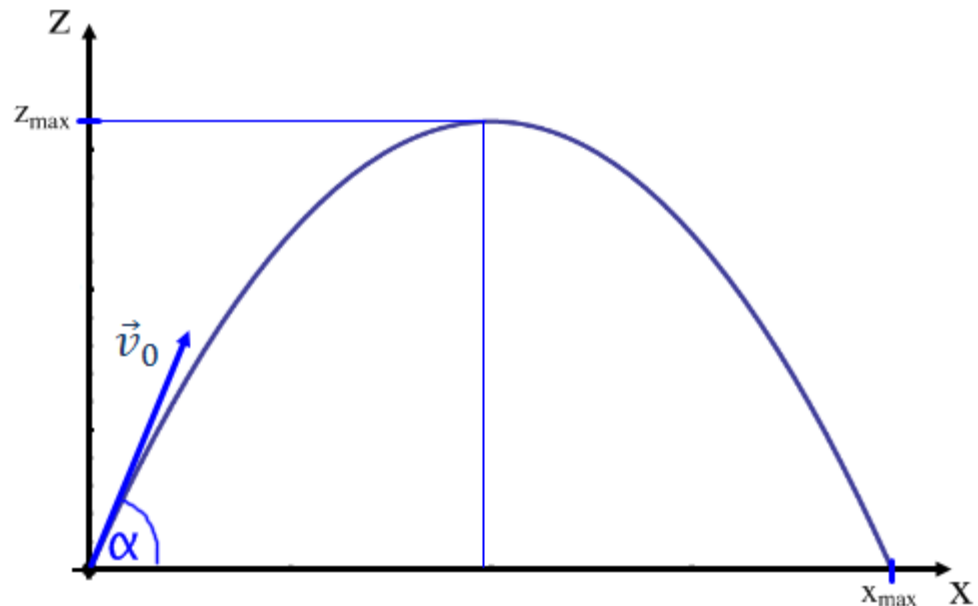
A test földet ér amikor $z = 0$:

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t = 0$$

Megoldva az időre: $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

Behelyettesítve az x koordinátára megkapjuk a hajítás távolságát:

$$x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$



Síkbeli polár koordináta rendszer

A két koordináta: egy ponttól mért távolság és egy iránytól mért szög.
Körmozgás leírására jól használható, ha az origó a kör középpontjában van.

Pitagorasz tételével és a tangens definíciójából:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

A koordinátákat a másik irányba kifejezve:

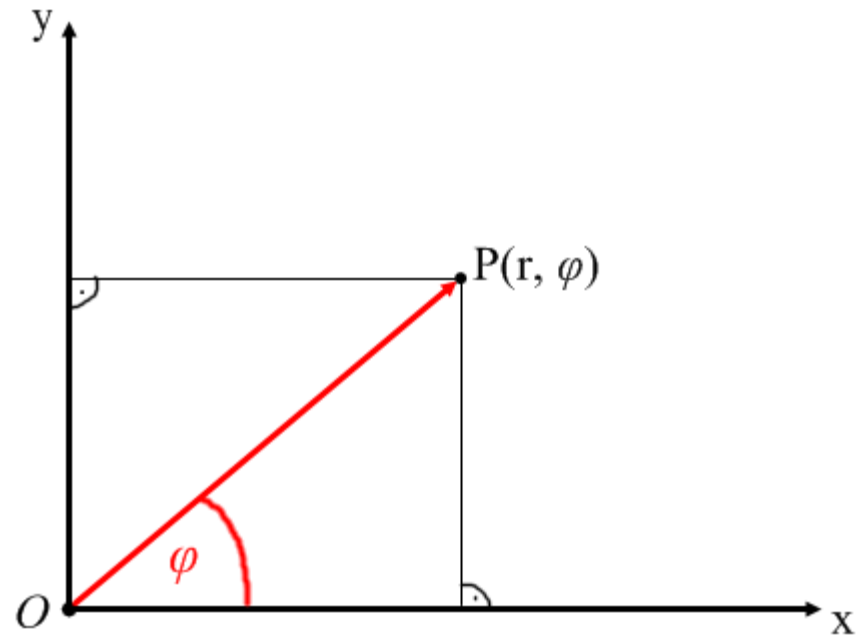
$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

A φ szög változási gyorsasága adja a **szögsebességet** (mértékegysége: 1/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

A szögsebesség változási gyorsasága pedig a **szöggyorsulás** (mértékegysége: 1/s²):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



Példa: Egyenletes körmozgás*

A szögsebesség állandó: $\omega = \text{áll.} = \frac{2\pi}{T}$ $\beta = 0$
(ahol T a periódusidő)

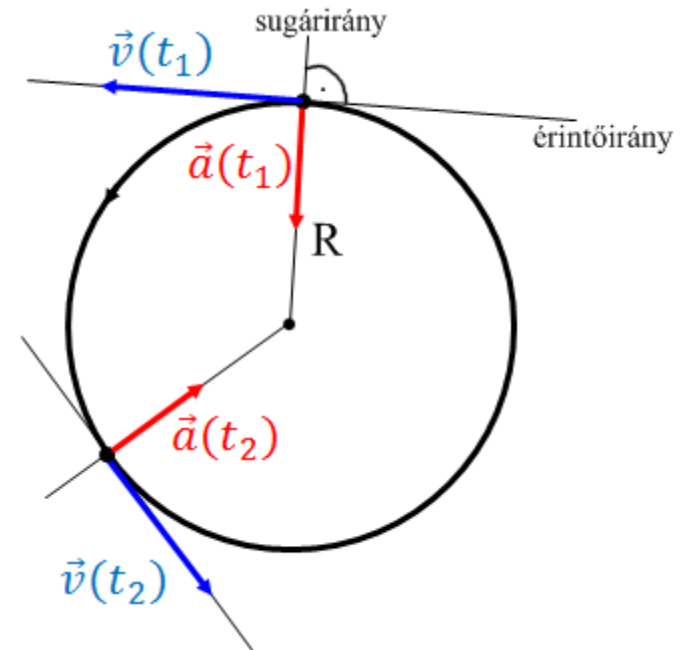
A T idő alatt megtett út tehát a kör kerülete: $s(T) = 2R\pi$

A mozgás sebességének nagysága (kerületi sebesség) is állandó (az iránya viszont nem!):

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

Mivel a sebesség iránya folyamatosan változik, a gyorsulás nem nulla. Nagysága állandó, iránya pedig mindig a középpont felé mutat (centripetális):

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$



Példa: Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás $\beta = \text{állandó}$, és emiatt a szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t) = \beta t + \omega_0$$

Az állandó szöggyorsulás miatt a gyorsulásnak lesz egy állandó nagyságú érintőirányú (tangenciális) komponense. Emiatt a sebesség nagysága egyenletesen változik:

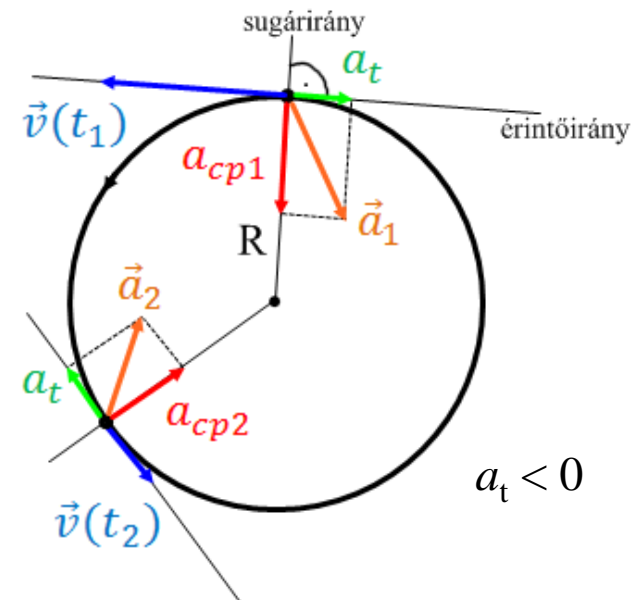
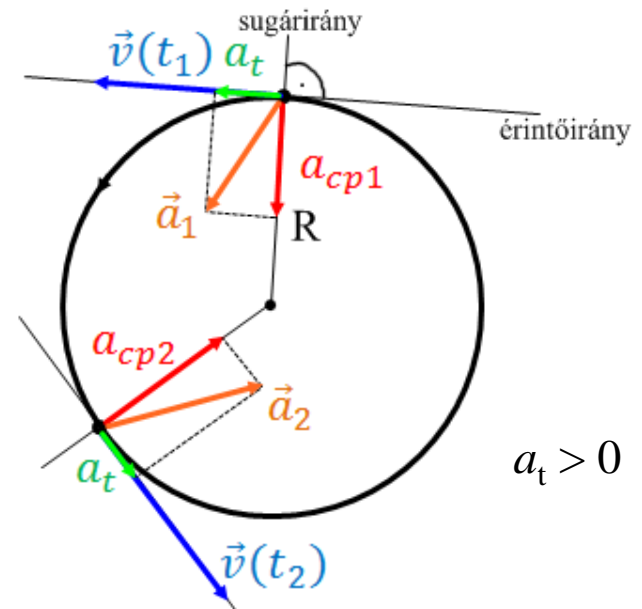
$$a_t = \beta R = \frac{dv}{dt}$$

A gyorsulás nagysága Pitagorasz tételéből:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

A megtett út csak a tangenciális gyorsulás komponensből függ (a másik komponens csak az irányt változtatja):

$$s(t) = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t$$



Henger koordináta rendszer* - Feladat: 3

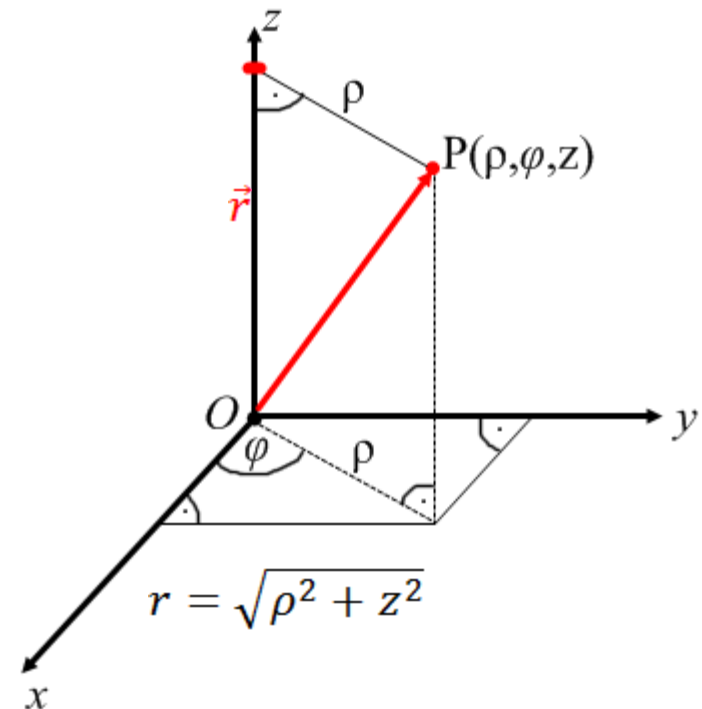
A síkbeli polár koordinátarendszer két koordinátájához hozzávesszük a Descartes koordinátarendszer z koordinátáját.

Három dimenziós mozgások leírására használható, főleg csavar alakzat menti mozgásra.

Megkülönböztetésül a síkbeli polár koordinátarendszertől r helyett ρ adja meg a tengelytől mért távolságot (ez még nem a pont origótól vett távolsága, azt jelöljük r -el).

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$



Dinamika

A dinamika feladata a test(ek) gyorsulását okozó erők matematikai leírása.

Az erők kölcsönhatások során lépnek fel.

Ezek a kölcsönhatások lehetnek:

- test és test között
- mező(erőtér) és test között

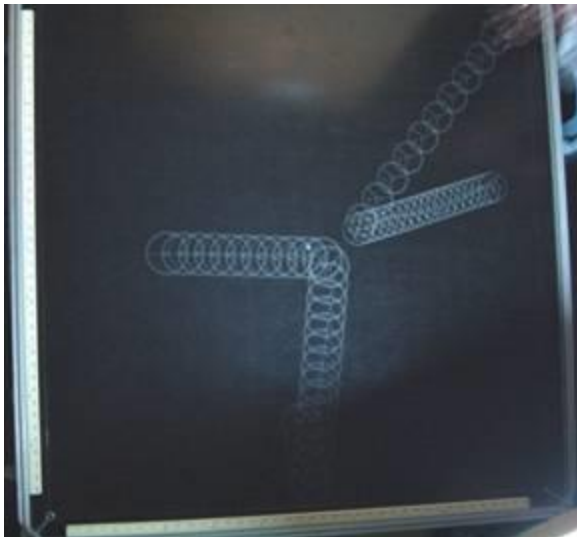
A magára hagyott test egy olyan test, amely nem áll kölcsönhatásban sem más testtel, sem pedig mezővel.

Newton törvényei: I.

Newton I. törvénye: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

ugyanaz kicsit pontosabban megfogalmazva:

Kiválasztási axióma: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



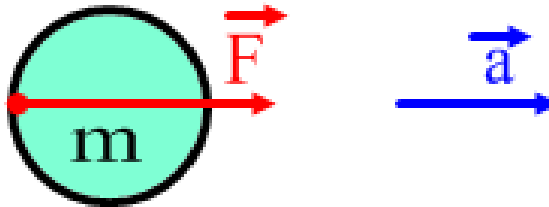
A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít. Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

Newton törvényei: II.

Ha egy pontszerű testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

Newton II. törvénye: Egy állandó tömegű pontszerű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



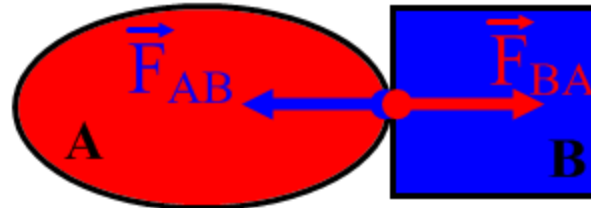
Newton törvényei: III.

Newton III. törvénye: (Hatás-ellenhatás törvénye)

Ha az A test a B testre \vec{F}_{BA} erőt fejt ki, akkor a B test is erőt fejt ki az A testre.

Ez az \vec{F}_{AB} erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az \vec{F}_{BA} erővel.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

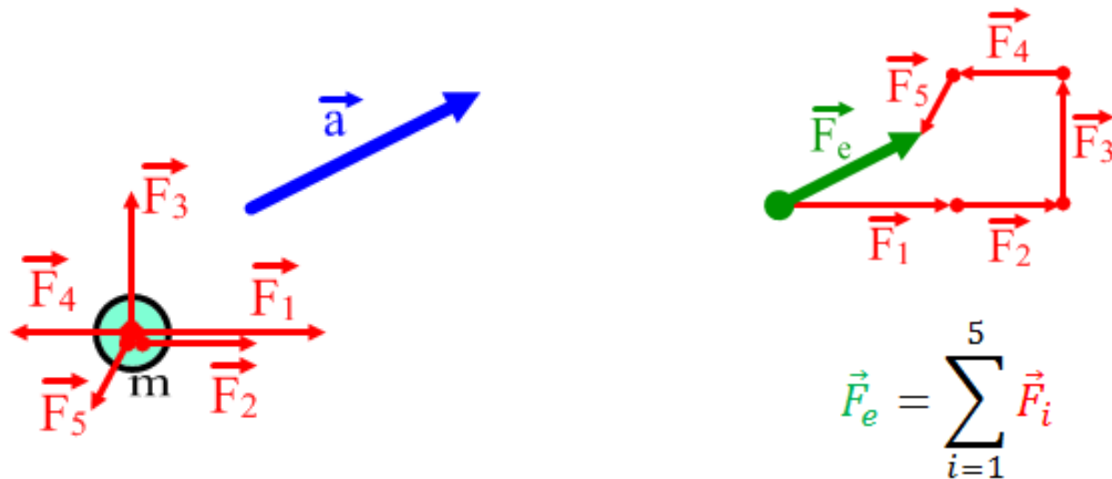


Newton törvényei: IV.

Newton IV. törvénye: (A szuperpozíció elve)

Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^5 \vec{F}_i$$

A Galilei-féle relativitási elv

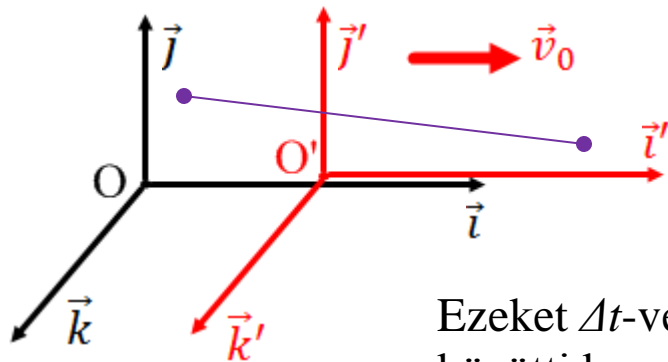
Bármely két egymáshoz képest **állandó** sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a **mechanikai jelenségek** ugyanúgy mennek végbe.

Pl. a rázkódástól eltekintve nem érezzük, hogy mozog-e a vonat, ha állandó sebességgel halad. A leejtett pénzérme ugyanúgy függőlegesen egyenletesen gyorsulva esik.

Az ilyen vonatkoztatási rendszerek közül tehát egyik sincs kitüntetve, nincsen egy abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszer.

Egymáshoz képest mozgó rendszerek közötti kapcsolat:

Mozogjon a K' rendszer a K -hoz képest a pozitív x irányba **állandó** v_0 sebességgel.



Egy Δt idő alatt az origók közötti távolság: $\overline{OO'} = v_0 \Delta t$

Tehát a mért koordinátakülönbségek K' -ben:

$$\Delta x' = \Delta x - v_0 \Delta t$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z \quad \text{Továbbá: } \Delta t' = \Delta t \text{ (órák szinkronban)}$$

Ezeket Δt -vel (ill. $\Delta t'$) osztva megkapjuk a sebességek közötti kapcsolatot (lila vonal egy mozgó test pályadarabja):

$$v'_x = v_x - v_0$$

$$v'_y = v_y$$

$$v'_z = v_z$$

Ezt vektori formában írva kapunk egy általános érvényű kifejezést:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Erőtörvények

Olyan függvények melyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.

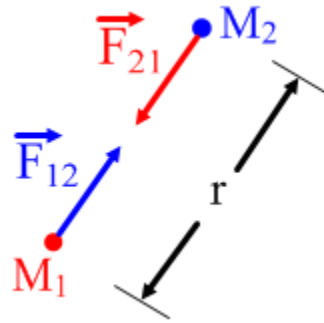
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:

- a test helye
- a test sebessége
- az idő

Newton-féle gravitációs erő*

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

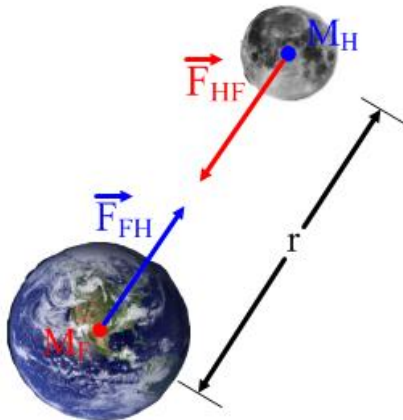
$$F = \frac{\gamma M_1 M_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

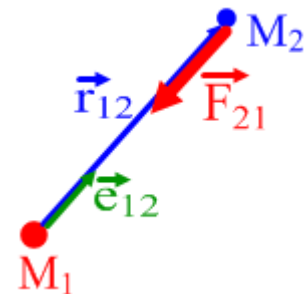
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Az erőtvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok. A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



Súlyerő*

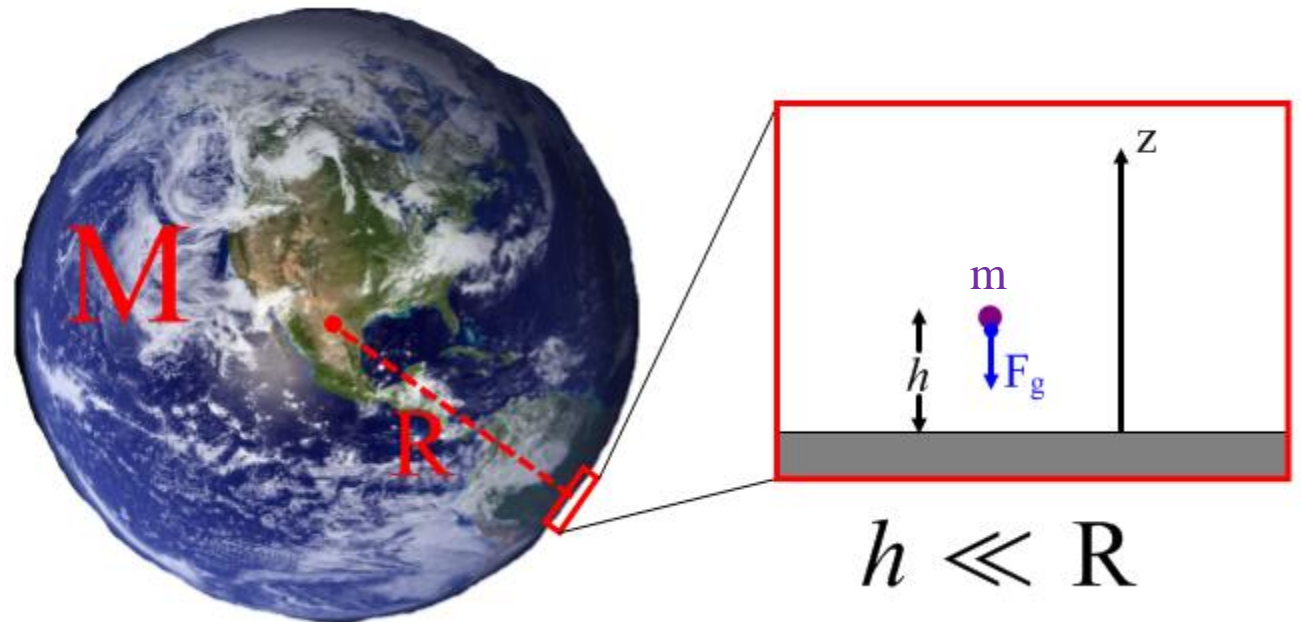
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtvénnyből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2} \vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2} \vec{e}_r = -m g \vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gravitációs gyorsulás
a Föld felszínén

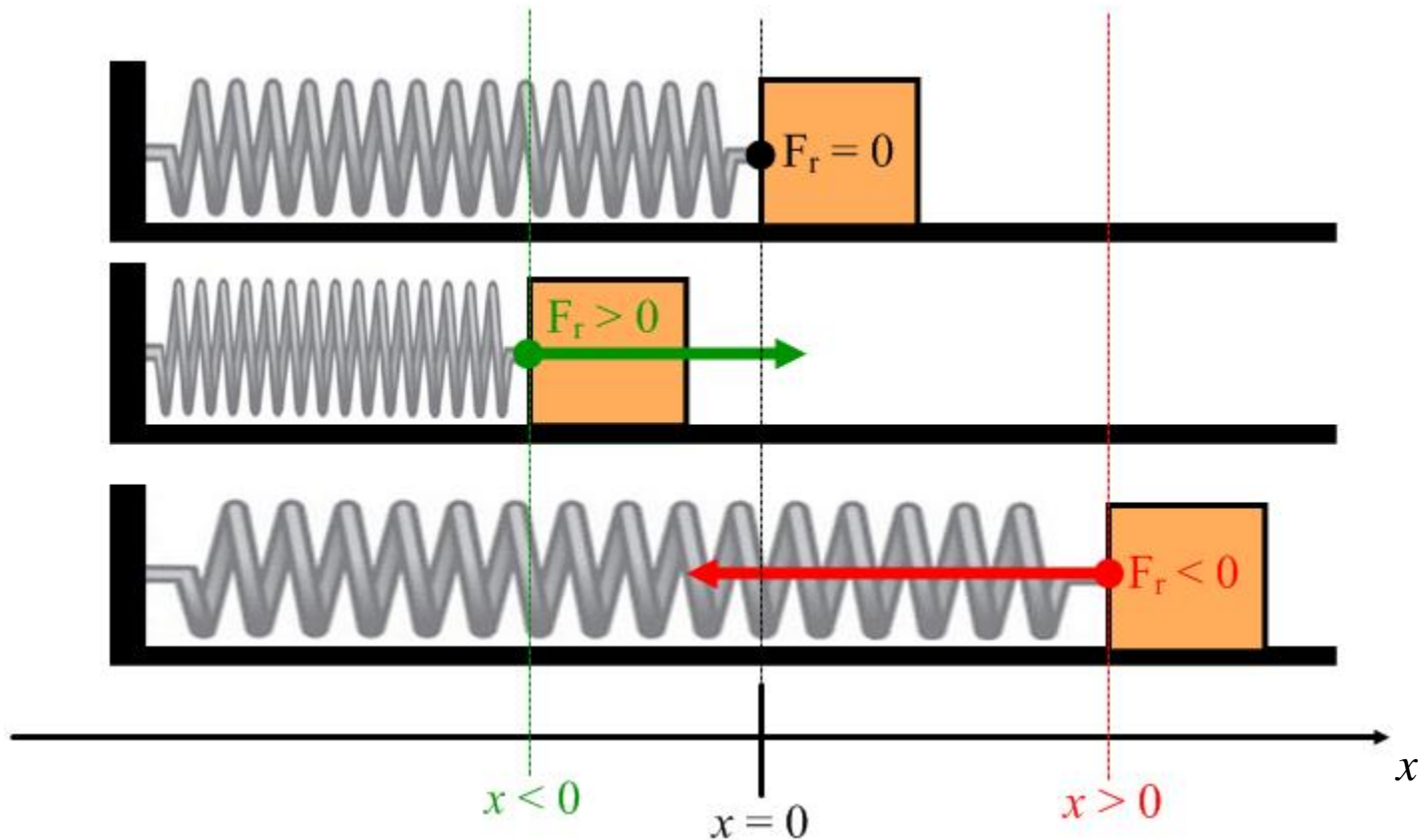


Rugóerő*

Hooke-törvény: Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.

Az arányossági tényező a rugóállandó D .

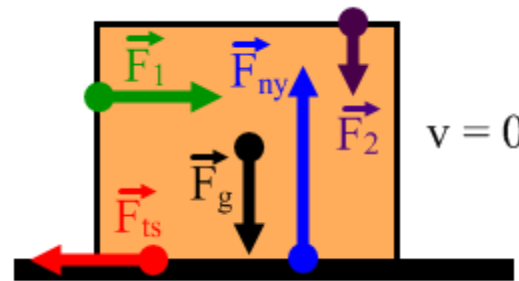
$$F_r = -Dx$$



Súrlódási erő*

Három fajta lehet:

1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekeznek megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).

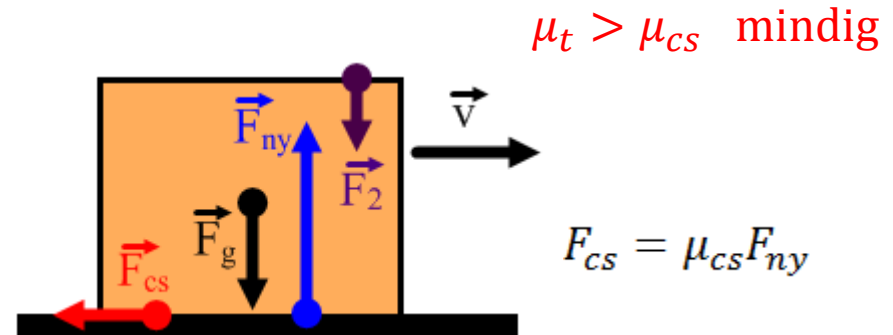


$$F_{ts} = F_1$$

amíg

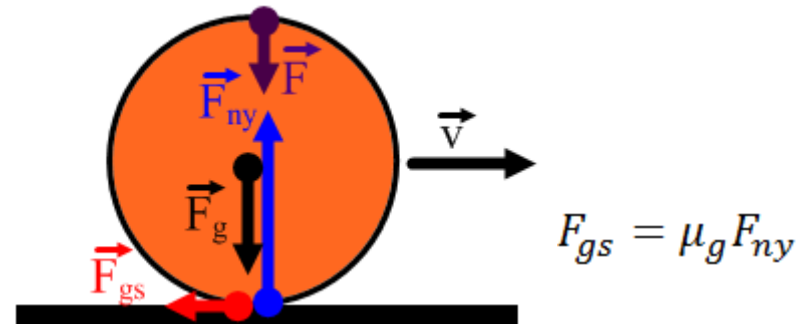
$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekezni gátolni. Csak az anyagi minőségtől (μ) és a felületeket összenyomó erőttől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

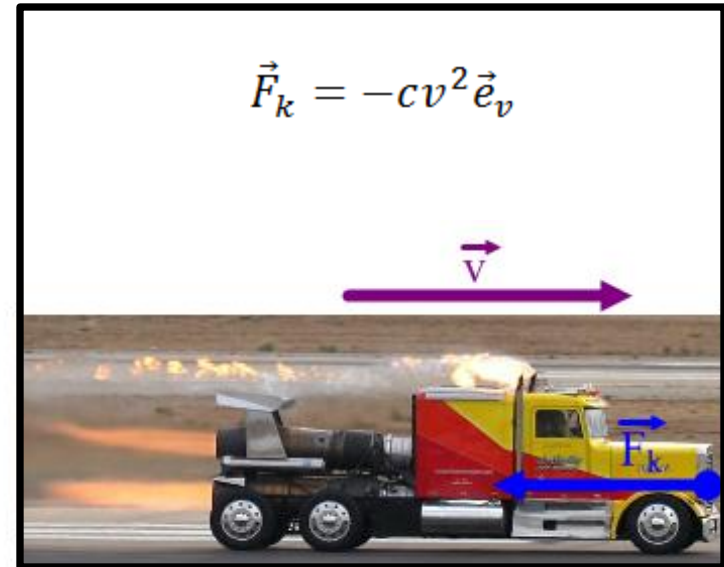
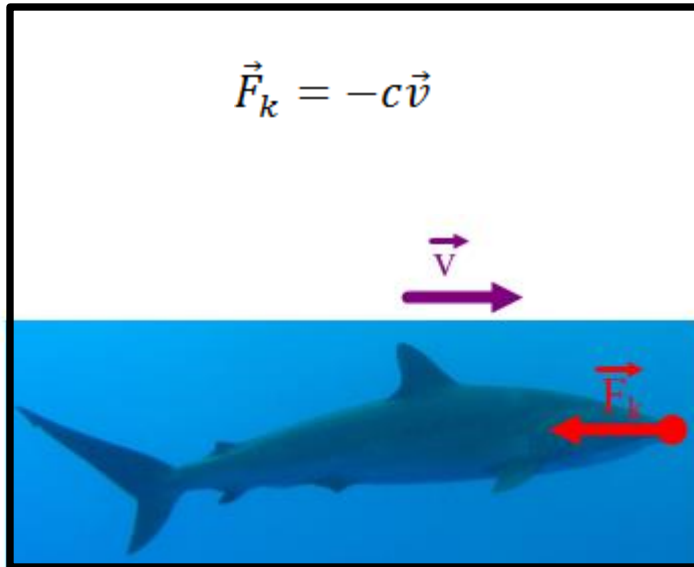
3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban.
(pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)



$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

Közegellenállás vagy légellenállás*

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, és azzal ellentétes irányú.

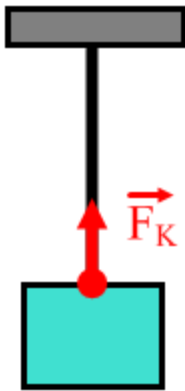


Az arányossági tényező c függ:

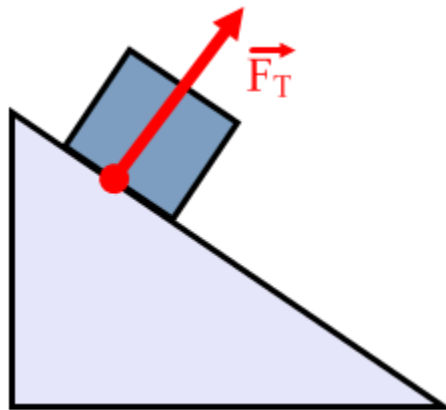
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

Kényszererők*

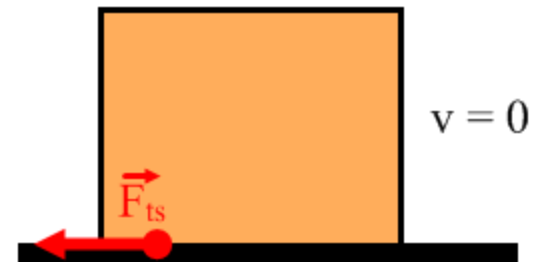
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. axiómáját, megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtörvényeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

másodrendű, csatolt differenciálegyenletek

Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.

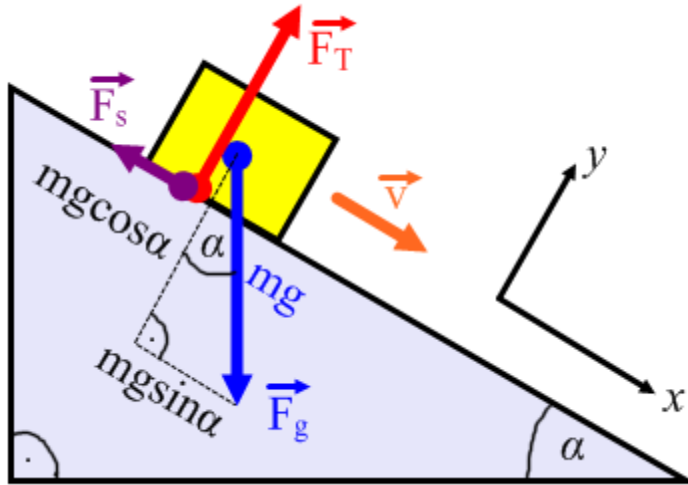
A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája: \vec{r}_0 és \vec{v}_0

Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete):

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Példa: Lejtőn mozgó test

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét:
$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$$



Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az y irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$\begin{aligned} (x) \quad m\ddot{x} &= ma_x = mgsina - F_s \\ (y) \quad m\ddot{y} &= ma_y = 0 = F_T - mgcosa \end{aligned}$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mgcosa$$

Beírva az (x) egyenletbe a súrlódást:

Ha $a_x < 0$ jön ki megoldásnak: ←
$$\begin{aligned} ma_x &= mgsina - \mu mgcosa \\ a_x &= g(sina - \mu cosa) \end{aligned}$$

- a lefelé csúszó test lassul

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:

- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ($\mu_1 F_T$)

Lendület

Lendület (impulzus): A test tömegének és sebességének szorzata.
vektormennyiség: iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Lendülettétel: Az lendület erő hatására változik meg.
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

Az okozott lendületváltozás t_1 és t_2 között az eredő erő által:

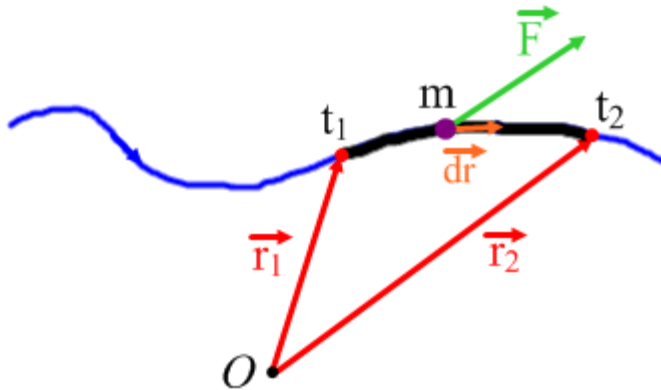
$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e dt$$

tömegtől független



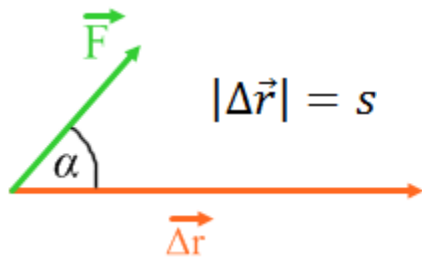
Munka

Munka: Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Speciális eset: A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos \alpha dr = F \cos \alpha \int_g dr = Fs \cos \alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat ($\alpha = 0$): $W = Fs$

Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (a mozgás pályája egyenes vonalú) $\rightarrow a_x \rightarrow a$

- t idő múlva sebessége: $v = at$, a megtett út pedig: $s = x = \frac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka: $W = Fs = ma \frac{a}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

Munkatétel: A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett munkával.

$$W = \Delta E_K$$



Teljesítmény

Teljesítmény: Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

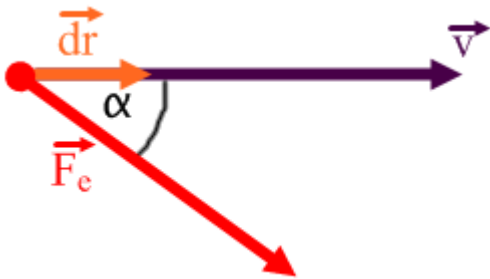
$$P = \frac{dE}{dt} \quad (\text{lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia})$$

A mechanikai teljesítménytétel: A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával:

$$P = \frac{dE_K}{dt}$$

Az elemi munka: $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_K$

A munkatétel felhasználásával: $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

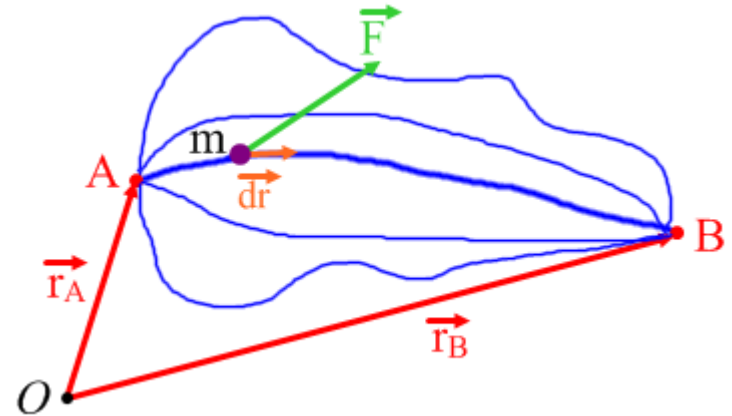


Végrehajtva egy változótranszformációt:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_{1,g}}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

Konzervatív erőterek

Konzervatív erőtér: Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

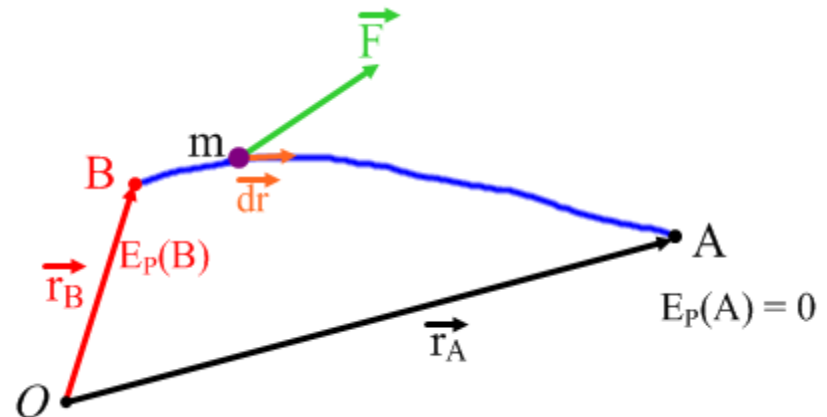


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

Potenciális (helyzeti) energia:

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a **tér** végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_p(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Példa: súlyerő munkája*

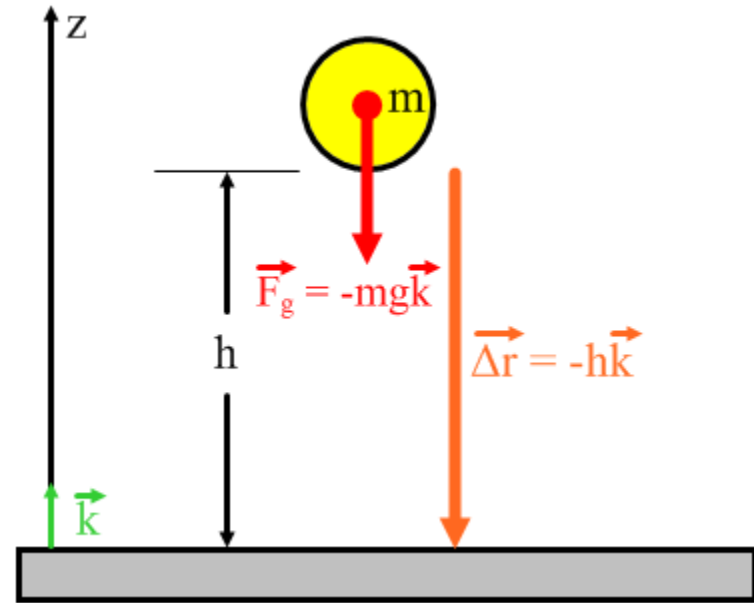
Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy $F_g = 20\text{N}$ súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$\begin{aligned} E_P(h) &= W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^0 (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) = \\ &= \int_h^0 -mg dz = -mg[z]_h^0 = mgh \end{aligned}$$

Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a $W = Fs$ képlet is, tehát a $W = (mg)h = mgh$ egyből látható.

vagyis esetünkben: $W = (20\text{N})(80\text{m}) = 1600\text{J}$



Az energiaminimum elve

Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.
Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

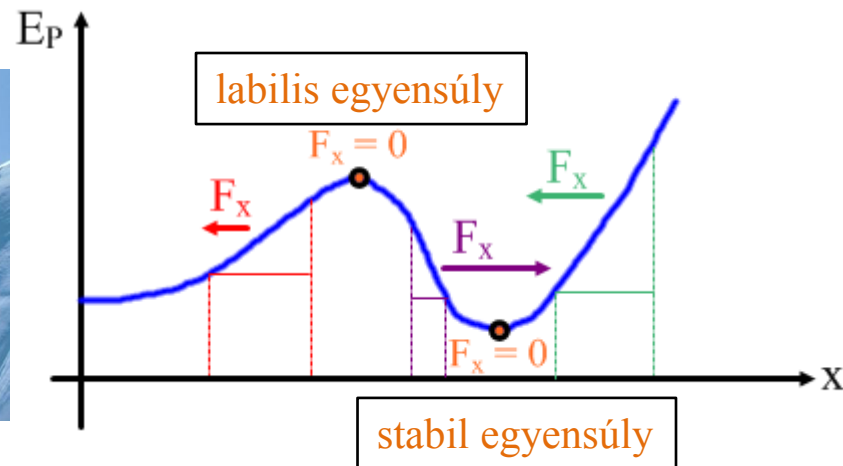
Homogén erőter esetén (illetve az átlagos erőt számolva) egy dimenzióban: $F = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}$

Általánosan bármely pontban: $F = -\frac{dE_p}{dx}$

Energiaminimum elve: Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).

Három dimenzióban:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \\ &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} = \\ &= -\nabla E_p = -\text{grad} E_p\end{aligned}$$



Mechanikai energia – Feladatok: 4, 5

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test B -ből C -be mozdul.

Ekkor bármely B és C pontokra: $E_P(B) - E_P(C) = W = E_K(C) - E_K(B)$

Az egyenletet átrendezve: $E_P(B) + E_K(B) = E_P(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_P + E_K$$

Ez a mechanikai energia konzervatív erőterben megmarad: $E_M(B) = E_M(C)$

Amikor **nem-konzervatív** erők is hatnak (pl. súrlódás, közegellenállás, emberi munka), azok munkája egyenlő a mechanikai energia **megváltozásával**:

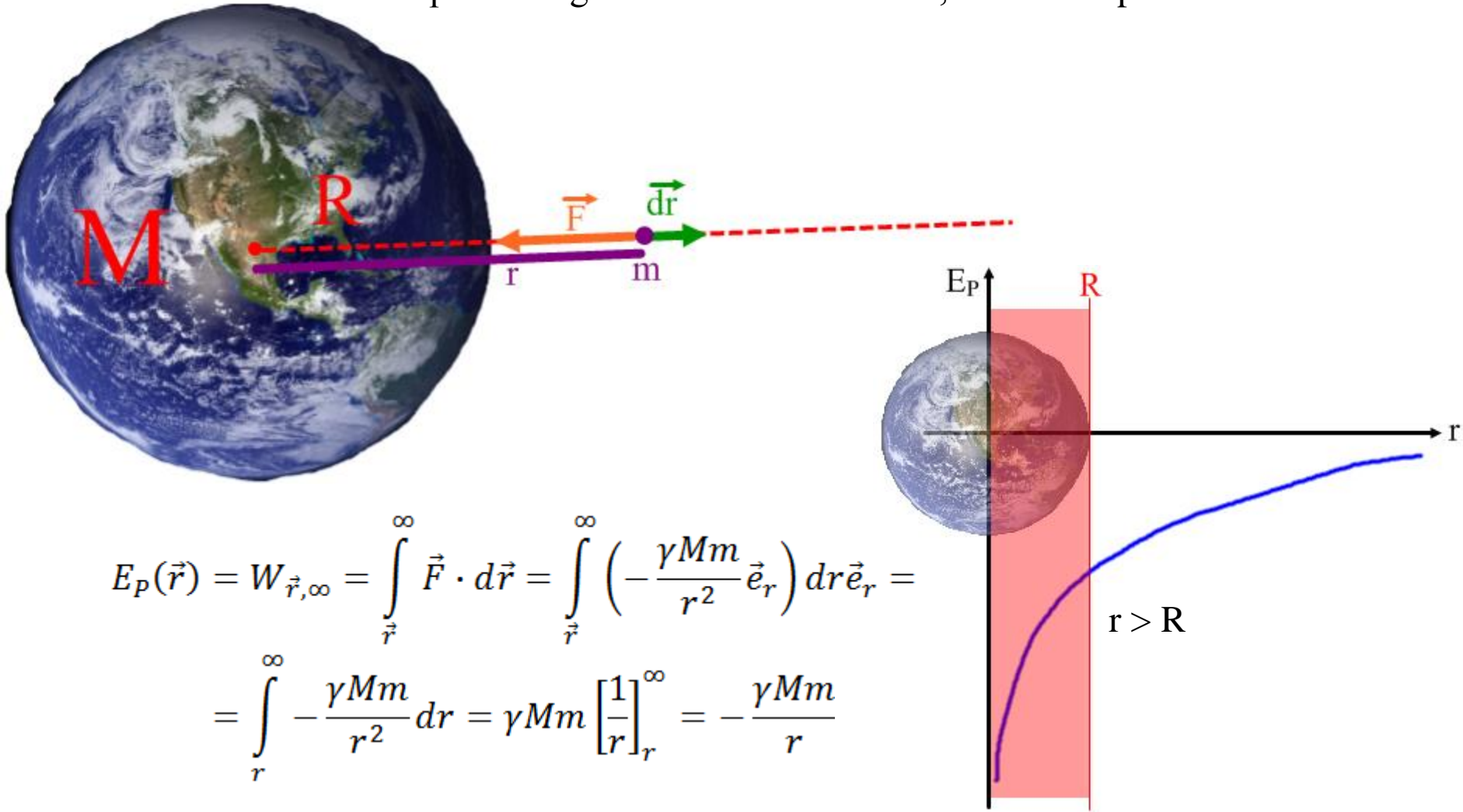
$$\Delta E_M = W_{nk}$$

Példák konzervatív erőterekre*

Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben*

Legyen a M tömegű test rögzítve, és tőle r távolságban kiszámoljuk a m tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert $r = 0$ problematikus.



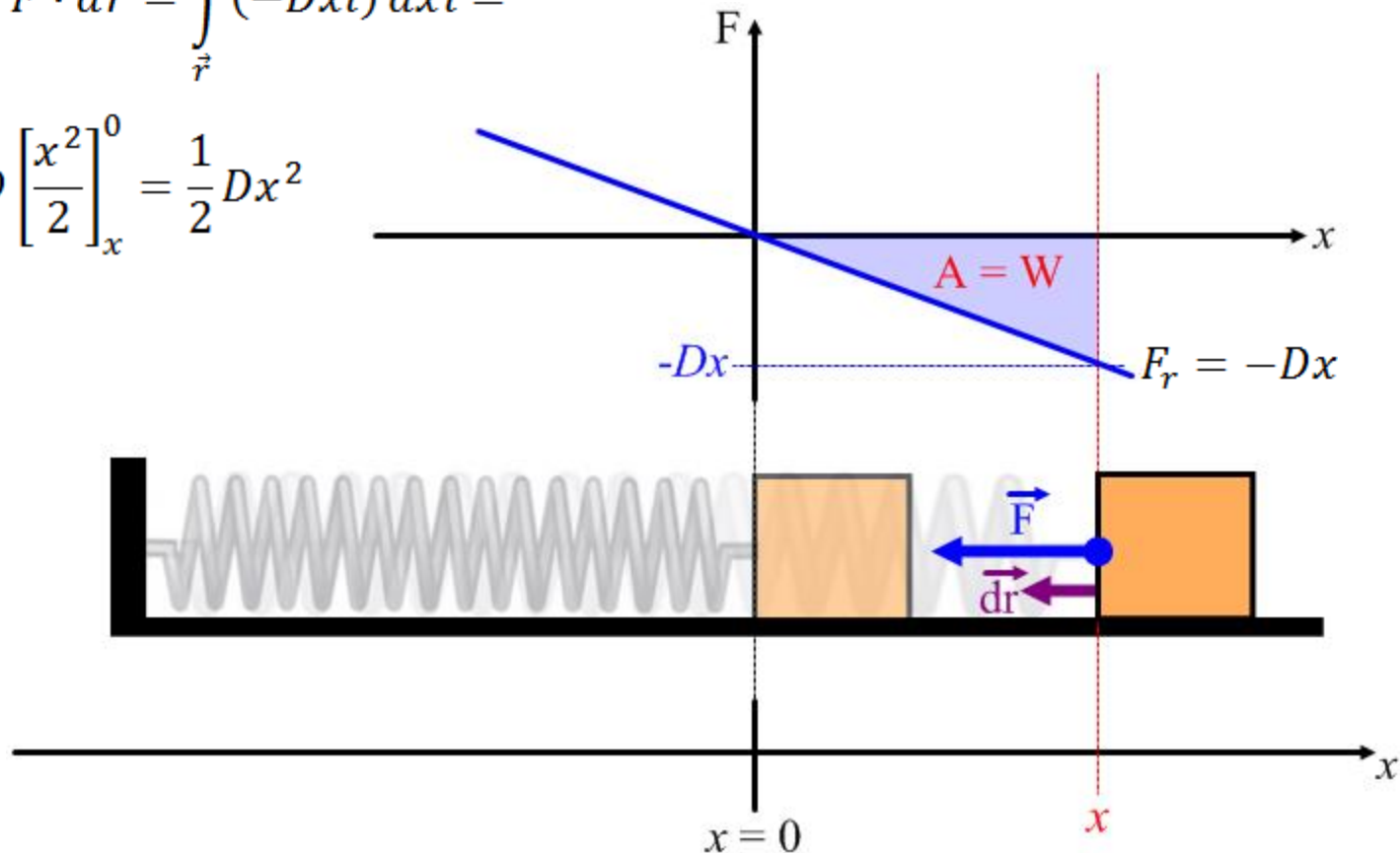
$$\begin{aligned} E_p(\vec{r}) &= W_{\vec{r}, \infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r \right) dr \vec{e}_r = \\ &= \int_r^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r} \end{aligned}$$

Rugóerő potenciális energiája*

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.
Ez konzervatív erőteret eredményez.

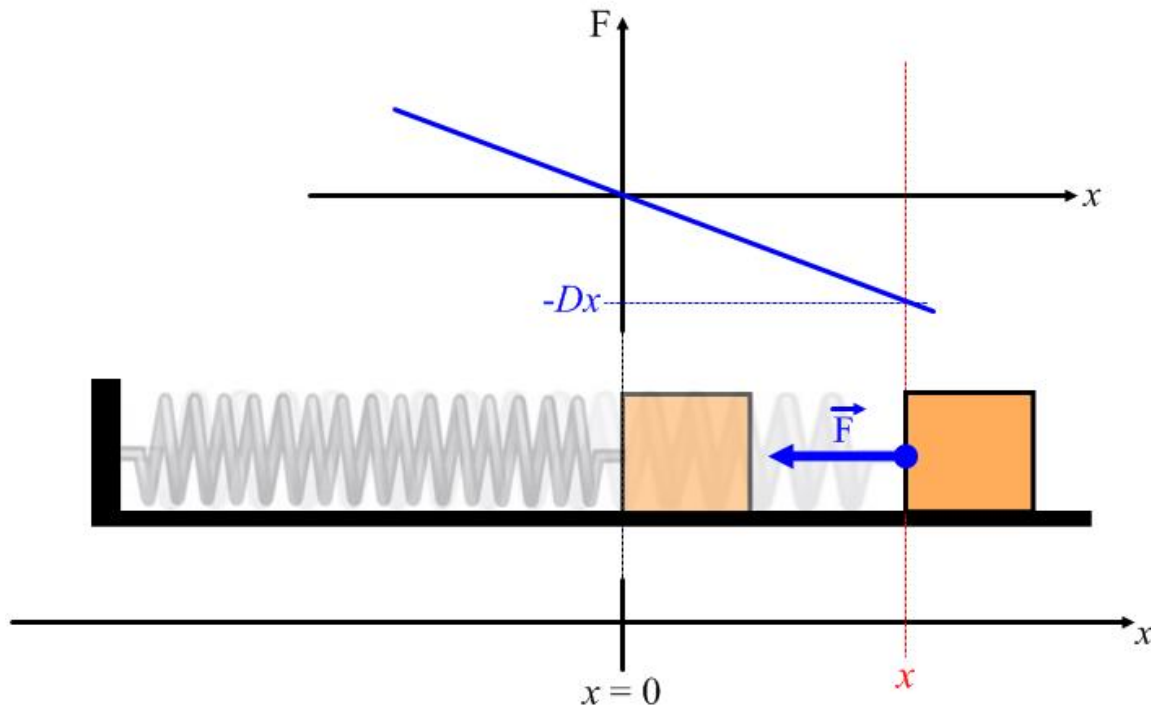
Az x hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$E_P(x) = W_{\vec{r},0} = \int_{\vec{r}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^0 (-Dx\vec{i}) dx\vec{i} =$$
$$= \int_x^0 -Dx dx = -D \left[\frac{x^2}{2} \right]_x^0 = \frac{1}{2} Dx^2$$



Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás
(mozgástörvény):

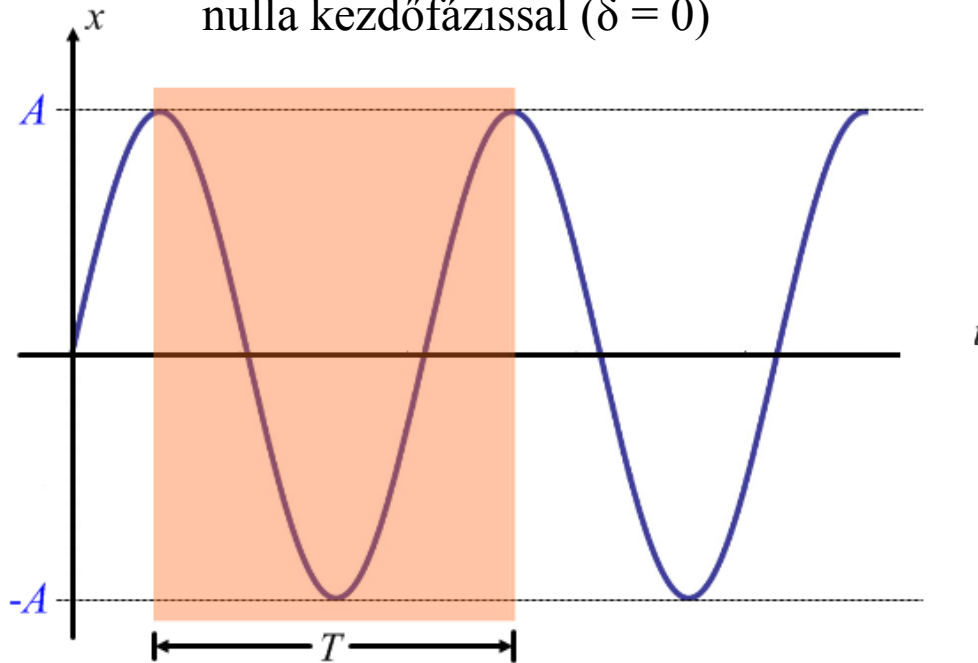
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket

- A: amplitúdó (maximális kitérés)
- δ : kezdőfázis
- ω : körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal ($\delta = 0$)



$$x(t) = x(t + T)$$

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{körfrekvencia}$$

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a
sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a
gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

$$\text{Tehát: } \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Kinetikus és potenciális energia* - Feladat: 6

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$) – rugalmas erőter

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

$$\begin{aligned} E_M &= E_K + E_P \\ &= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2 \end{aligned}$$

A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.

