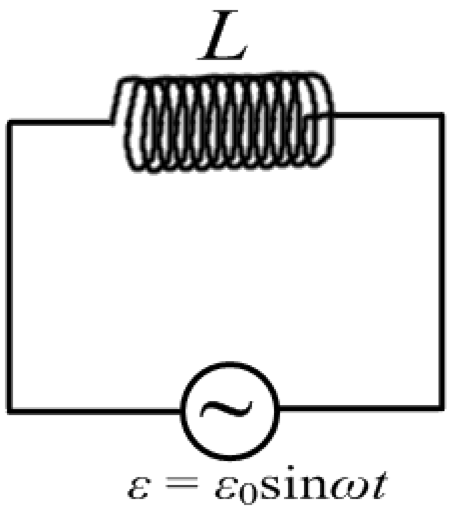
Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen

A körre most is az általános huroktörvényt írjuk fel figyelembe véve hogy az elektromotoros erő most függ az időtől:



$$L\frac{dI}{dt} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

Átrendezve és az idő szerint kiintegrálva kapjuk:

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega}\cos\omega t = \frac{\varepsilon_0}{L\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük az induktív reaktanciát:

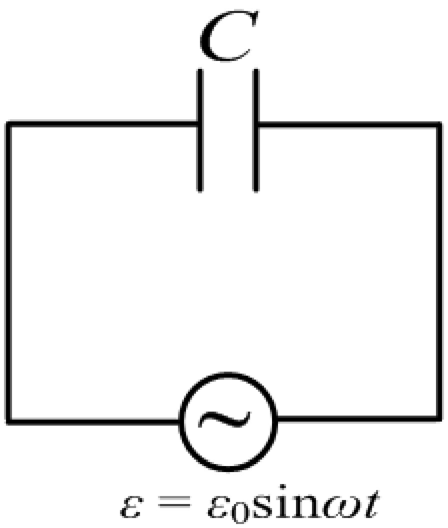
$$X_L = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = L\omega$$

Az áramerősség továbbá π/2 fáziskésésben van a tekercsre kapcsolt feszültséghez képest.

Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen

A kondenzátor a váltakozó feszültség hatására periodikusan feltöltődik és kisül.
Az általános hurokegyenletet felírva:

$$\frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$



Átrendezve és az idő szerint deriválva kapjuk az áramerősséget:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C\varepsilon_0 \sin \omega t) = C\varepsilon_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük a kapacitív reaktanciát:

$$X_C = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \frac{1}{C\omega}$$

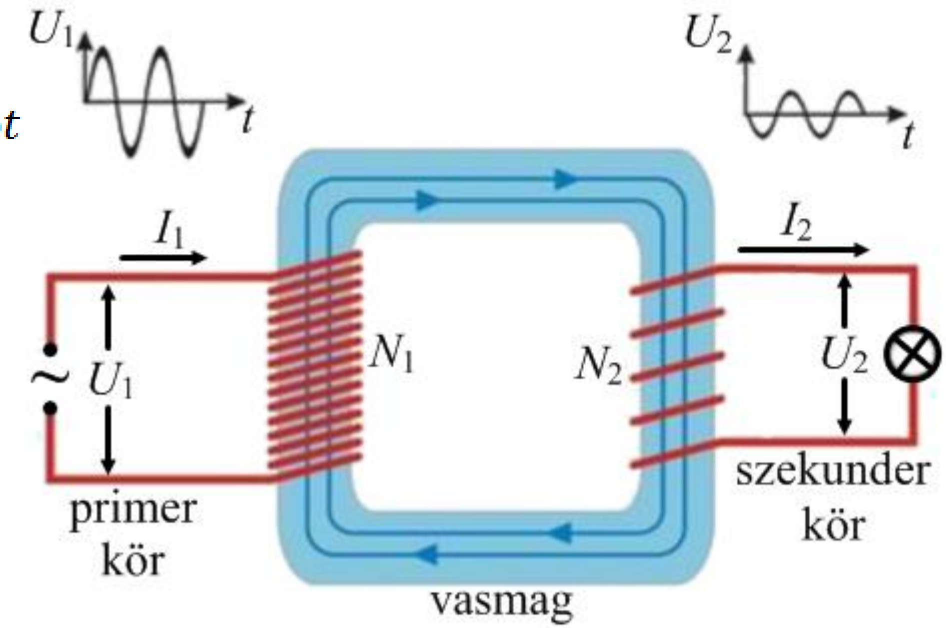
Az áramerősség továbbá π/2 fázissal siet a kondenzátorra kapcsolt feszültséghez képest:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

A transzformátor

A primer kör tekercse egy váltóáramú áramforrásra van kapcsolva:

$$U_1(t) = U_{1,0}\sin\omega t$$



Ennek hatására az áram a primer körben (elhanyagolható ohmos ellenállás):

$$I_1(t) = -\frac{U_{1,0}}{L_1\omega}\cos\omega t \qquad L_1 = \frac{\mu {N_1}^2 A_1}{l_1}$$

A primer tekercsben a mágneses indukció:

$$B_1(t) = \frac{\mu N_1 I_1}{l_1} = \mu N_1 \frac{U_{1,0}/l_1}{\frac{\mu {N_1}^2 A_1}{l_1}\omega}(-\cos\omega t)$$

$$B_1(t) = \frac{U_{1,0}}{N_1 A_1 \omega}(-\cos\omega t)$$

Az indukcióvonalak a vasmagban haladnak ezért a menetfluxus nem változik:

$$B_2 A_2 = B_1 A_1 = \frac{U_{1,0}}{N_1\omega}(-\cos\omega t)$$

A szekunder tekercsben az indukálódott feszültség:

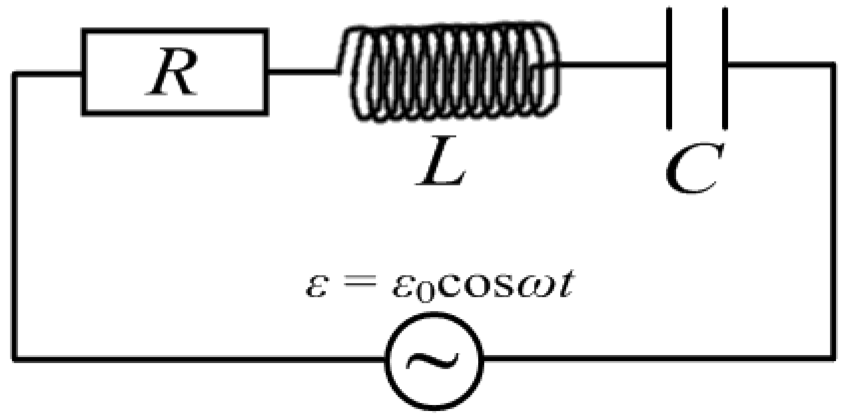
$$U_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d(N_2 A_2 B_2)}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}U_{1,0}\sin\omega t$$

Tehát: $\dfrac{U_{2,0}}{U_{1,0}} = \dfrac{N_2}{N_1}$

Mivel $P_{1,0} = P_{2,0} \rightarrow U_{1,0}I_{1,0} = U_{2,0}I_{2,0}$

Feszültség feltranszformálásakor az áram letranszformálódik és fordítva: $\dfrac{I_{1,0}}{I_{2,0}} = \dfrac{N_2}{N_1}$

Soros *RLC* kör gerjesztett elektromágneses rezgései



Felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L\frac{d\mathrm{I}}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t$$

Ez szerkezetét tekintve ugyanolyan mint a gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cos\omega t$$

<u>A megfelelő mennyiségek</u>: *x* → Q ; m → L (tehetetlenség) ; b → R (csillapítás); D → 1/C (rúgóállandó)

rezonancia körfrekvencia: $\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m}} \to \sqrt{\frac{1}{LC}}$
(csillapítatlan esetben)

LÁSD VIDEÓ IDEKATTINVA!

Lederiváljuk az eredeti egyenletet, hogy az áramerősségre kapjunk egy inhomogén másodrendű differenciálegyenletet:

$$L\frac{d^2\mathrm{I}}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0\omega \sin\omega t$$

Soros *RLC* kör gerjesztett elektromágneses rezgései

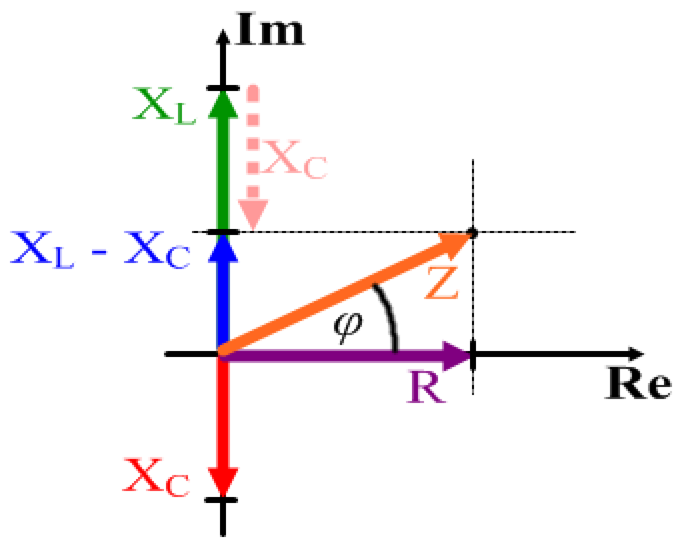
Soros RLC körben az áramerősségre kaptuk: $L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$

Ennek megoldása az áramforrással megegyező frekvenciájú, de egy kezdőfázissal eltolt váltóáram:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosa az **impedancia** (*Z*). Ezzel felírva az Ohm-törvény általános alakja váltóáramú körökre:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}$$



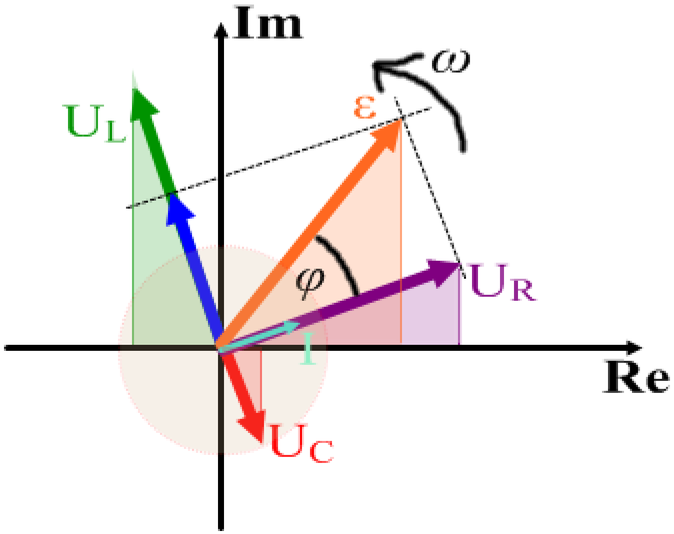
Az impedancia az áramkör váltóáramú „ellenállása”, amely tartalmazza a kapacitív és induktív reaktanciák járulékát is. Az impedancia és a fáziskésés kiszámítását segíti a különféle ellenállásokat a komplex síkban ábrázoló fázisábra. Ennek alapján:

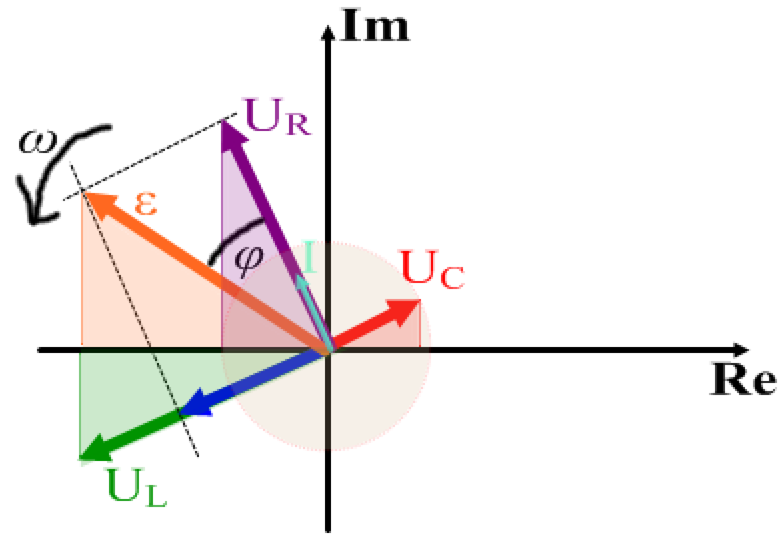
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

és $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$ vagy $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$

Feszültség az áramköri elemeken

Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel.





Látható, hogy az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, de a kondenzátoron π/2-ővel késik, míg a tekercsen π/2 fázissal siet. Az ábra ω szögsebességgel forog az origó körül. Egy időpontban a ténylegesen mérhető feszültség a valós tengelyre vett vetület. Az áramerősségre ugyanez vonatkozik.

$$U_R(t) = U_{R0}\cos(\omega t - \varphi) \rightarrow U_{R0} = I_0 R$$

$$U_C(t) = U_{C0}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{C0} = \frac{I_0}{C\omega}$$

$$U_L(t) = U_{L0}\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{L0} = I_0 L\omega$$

Rezonancia soros *RLC* körben

A kapacitív és az induktív reaktanciák függnek a frekvenciától, ezért az impedancia is frekvenciafüggő:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Amikor az impedancia minimális értéket vesz fel az áramerősség a lehető legnagyobb. Rezonancia frekvencia az a frekvencia amelynél az impedancia minimális és (áram)rezonancia lép fel. Látható, hogy ez akkor igaz amikor:

$$L\omega_r = \frac{1}{\omega_r C} \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Látható, hogy ekkor a kondenzátor és a tekercs éppen kiejtik egymás hatását, tehát az áram fáziskésése nulla lesz, az impedancia pedig egyszerűen az ohmos ellenállással lesz egyenlő:

$$\operatorname{tg}\varphi_r = \frac{L\omega_r - \frac{1}{\omega_r C}}{R} = 0 \rightarrow \varphi_r = 0 \qquad Z_r = \sqrt{R^2 + (0)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Teljesítmény soros *RLC* körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye: $P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t\, I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

Ezt átalakítjuk trigonometrikus összefüggések felhasználásával:

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} \quad +$$

SOROS és PÁRHUZAMOS RLC körös példák: VIDEÓ IDEKATTITVA!

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta$$

Legyenek: $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$ $\quad \dfrac{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi}{2} = \cos\omega t\cos(\omega t - \varphi)$

Tehát a pillanatnyi teljesítmény: $P(t) = \dfrac{\varepsilon_0 I_0}{2}[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi]$

Az átlagteljesítmény ennek az időátlaga, de az első tag egész periódusokra vett integrálja nulla. A második (konstans) tag időátlaga önmaga:

$$\bar{P} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\frac{R}{Z} = {I_{\text{eff}}}^2 R$$

ez rezonancia esetén a legnagyobb

Ezt hívják P_h hatásos teljesítménynek. A $\cos\varphi = R/Z$ szorzó pedig a teljesítménytényező.

Látszólagos teljesítmény: $P_l = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ Meddő teljesítmény: $P_m = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi$

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény

Maxwell elméleti meggondolások alapján feltételezte, hogy a változó elektromos tér örvényes mágneses teret kelt (hasonlóan ahhoz ahogy a változó mágneses tér kelt elektromos teret).
Az Ampere-féle gerjesztési törvényt kiegészítette még egy taggal, amit eltolási áramnak nevezett el:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Felhasználva az elektromos indukciófluxus definícióját:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d\Psi}{dt}$$

Az eltolási áram nem jár töltések áramlásával.
Az első tagban I_i a vezetési áram.

<u>Példa</u>: Kondenzátor feltöltésénél (ill. kisülésénél) a lemezek közötti változó elektromos tér is ugyanúgy mágneses teret hoz létre mint a lemezekhez futó zsinórokban folyó vezetési áram a vezetékek körül.

A Stokes-tétel és az áramsűrűség felhasználásával egy időben állandó kicsiny F felületre:

$$\int_F \mathrm{rot}\vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(lokális vagy differenciális alak)

A Maxwell-egyenletek rendszere

A XIX. század legnagyobb hatású eredménye, az elektromágneses hullámok elméleti alapja.

1. Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A} \;\rightarrow\; \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

integrális alak differenciális alak

A mozgó töltések és az időben változó elektromos tér örvényes mágneses teret keltenek.

2. Faraday-Lenz féle indukciós törvény:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} \;\rightarrow\; \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

integrális alak differenciális alak

Az időben változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt.

A Maxwell-egyenletek rendszere

3. Az elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

integrális alak   differenciális alak

Az elektromos tér forrásai a töltések.

4. A mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

integrális alak   differenciális alak

A mágneses térnek nincsenek forrásai (nincsenek monopólusok).

Szükség van még az alábbi egyenletekre:

Lineáris anyagegyenletek: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ és $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ (csak közelítő jellegűek)

Differenciális Ohm-törvény: $\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)$

Elektromágneses hullámegyenlet

Valódi töltésektől és vezetési áramoktól mentes szigetelőkre ($\mu_r \approx 1$) az egyenletek:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Az anyagegyenletek továbbá: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

Felhasználva az összefüggést: $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}$

Ezekből levezethetők a homogén hullámegyenletek a térerősségekre:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{H} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Bármely komponensre (*i* lehet *x*, *y*, vagy *z*):

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = 0$$

Összehasonlítva az általános homogén hullámegyenlettel egy tetszőleges *u* mennyiségre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \left(\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\right)$$

Δ: Laplace operátor

Az általános alakban v a hullám terjedési sebessége, tehát az elektromágneses hullámra:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$ amely vákuum esetén: $$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$ (a fény sebessége vákuumban)

Az elméletileg így megjósolt EM hullámokat Hertz kimutatta kísérletileg 1888-ban.

Monokromatikus síkhullám megoldás

Az előbbi homogén hullámegyenleteknek egyik lehetséges megoldásai a síkhullámok. Ha a **hullám forrásától elegendően messze** vagyunk akkor mindig tekinthetjük a hullámokat síkhullámoknak. Egy *z* irányba terjedő síkhullámra:

$$E_x = E_{x0}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)\right] = E_{x0}\sin(\omega t - kz)$$

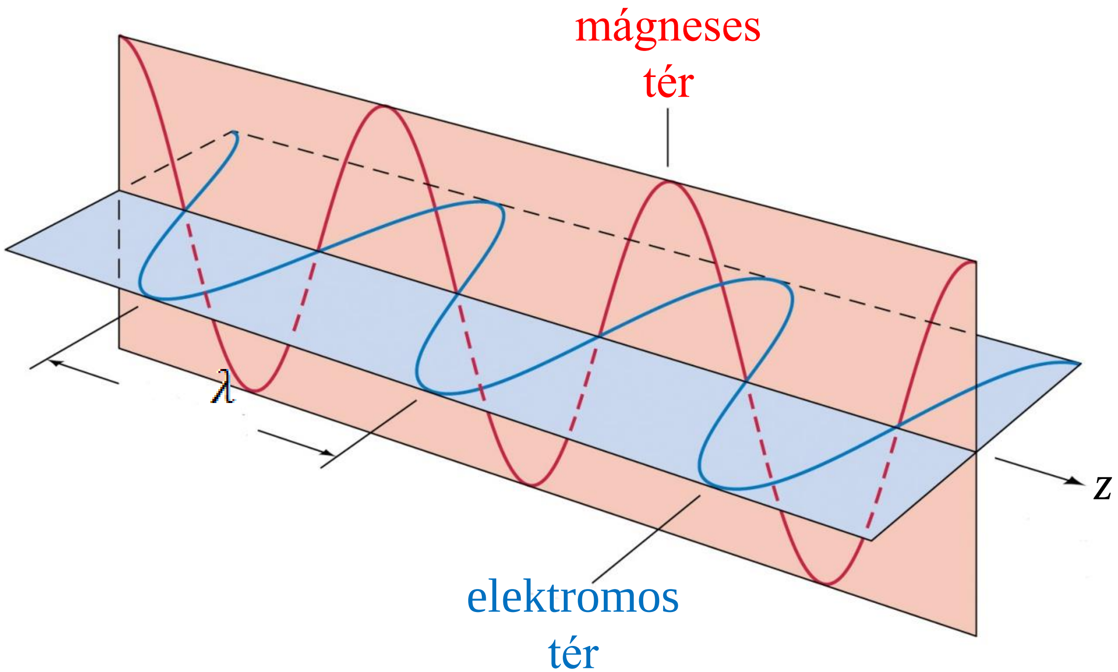
$$H_y = H_{y0}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)\right] = H_{y0}\sin(\omega t - kz)$$

T: periódusidő λ: hullámhossz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{körfrekvencia}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{körhullámszám}$$

Ez a megoldás monokromatikus mivel csak egyféle frekvenciát tartalmaz.



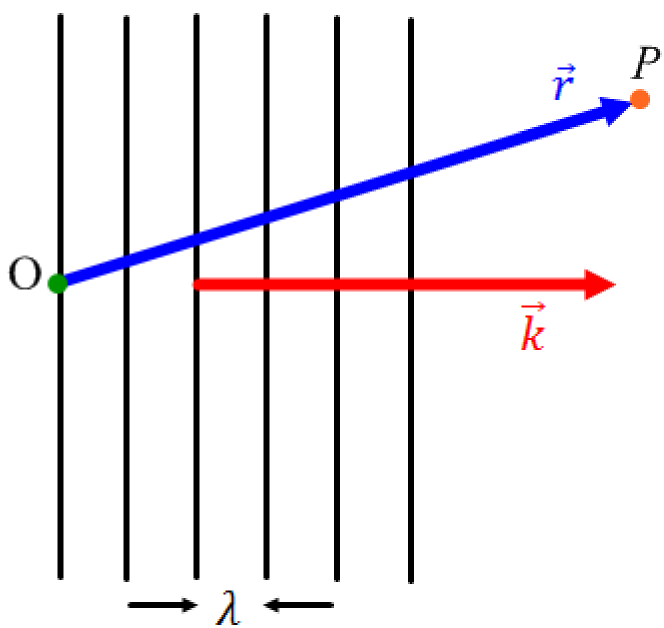
Az elektromágneses hullámban $\vec{E}$ és $\vec{H}$ merőleges, továbbá $\vec{E}$, $\vec{H}$, és $\vec{v}$ jobbsodrású rendszert alkot (itt *x*, *y*, *z*). Az elektromágneses hullám **transzverzális**. Az elektromos és mágneses tér egymással azonos fázisban van.

Animáció kattintva!

Tetszőleges irányba terjedő síkhullám

Általánosan a hullám terjedési irányát a körhullámszám vektor iránya jelöli ki (a sebesség iránya is ugyanaz). Az elektromos és mágneses térerősség a hely és idő függvényében:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$



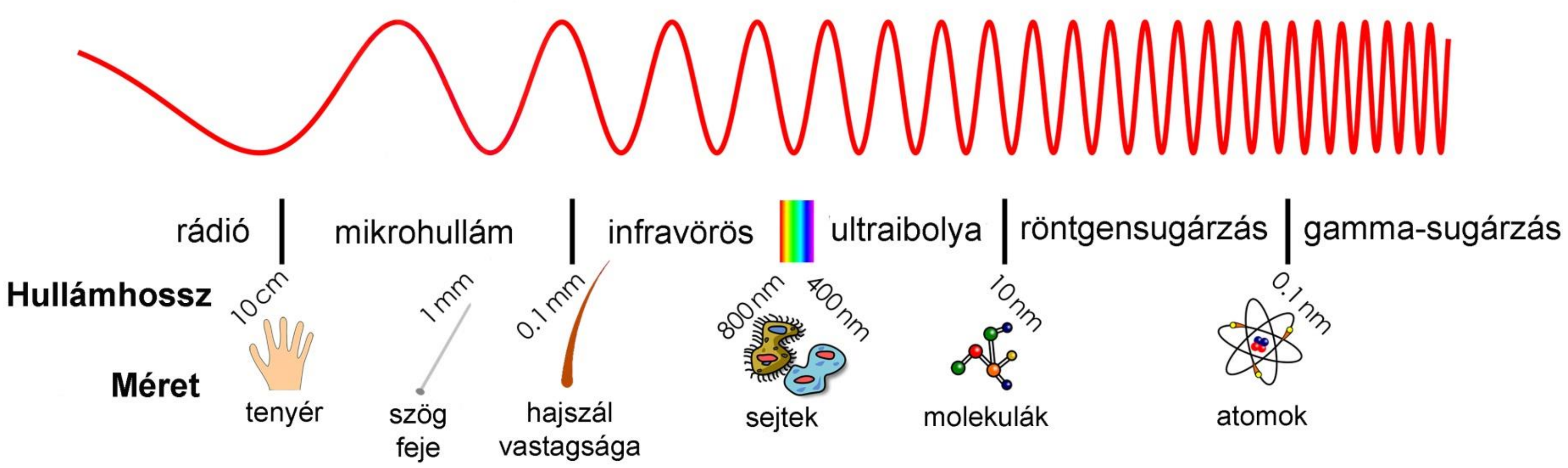
Térben az azonos fázisban lévő pontok halmaza egymást hullámhossznyi távolságonként követő síkok.

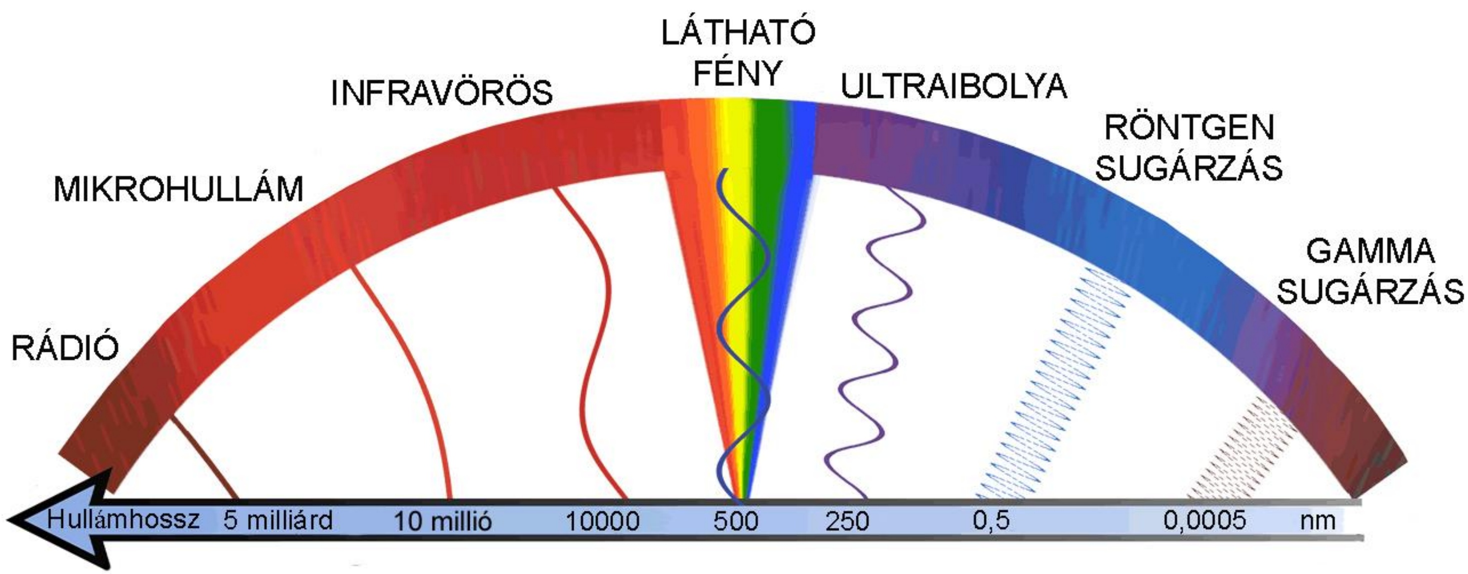
Általában az elektromágneses hullám sok különböző frekvenciájú hullámból tevődik össze. A különböző frekvenciák arányát mutatja az elektromágneses hullám spektruma (színképe).

Ha a hullámhossz nagyjából 400 és 800 nm között van, akkor a hullám a látható tartományba esik.

A teljes elektromágneses színkép

Az elektromágneses hullám hullámhossza (frekvenciája, vagy energiája) több nagyság-rendenen keresztül változhat. A látható tartomány (fény) ennek csak nagyon kis része:





Energiaterjedés az elektromágneses hullámban

Az elektromágneses hullám terjedése során energia is áramlik. Az energiaterjedés iránya ugyanaz mint a hullám iránya, és a pillanatnyi energia-áramsűrűséget egy pontban a **Poynting-vektor** adja meg:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad [\vec{S}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Egy tetszőleges felületen átáramló pillanatnyi teljesítmény tehát: $P(t) = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{A}$

Az elektromágneses tér energiasűrűsége: $w_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$

Az elektromos és mágneses tér fázisa megegyezik, és az általuk tárolt energia is:

$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 \quad \rightarrow$ a csúcsértékekre: $\frac{1}{2}\varepsilon {E_0}^2 = \frac{1}{2}\mu {H_0}^2 \rightarrow \; {H_0}^2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\, {E_0}^2$

Tehát a Poynting-vektor kifejezhető csak az egyik térerősséggel:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = EH\vec{e} = \vec{e}E_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) H_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) =$$

$$\vec{e}E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \sin^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = \vec{e}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} {E_0}^2 \sin^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$\vec{e}$ a hullám terjedési irányába mutató egységvektor

Emellett írható még: $\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2\vec{e} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}\varepsilon E^2\vec{e} = v\varepsilon E^2\vec{e} = v w_{EM}\vec{e} = w_{EM}\vec{v}$

Koherens hullámok interferenciája

Az energia-áramsűrűség nagyságának időátlagát a hullám intenzitásának nevezzük:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T {E_0}^2 \sin^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{{E_0}^2}{2}$$

Ha két egyenlő frekvenciájú, egymásra nem merőleges síkokban rezgő hullám a tér egy részében úgy találkozik, hogy a fázisuk közötti különbség huzamosabb ideig állandó akkor abban a térrészben állóhullám jön létre.
Az ilyen hullámokat **koherens** hullámoknak nevezzük, a megfigyelhető jelenség pedig az **interferencia**.

Legyen a két hullám: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right)$ $\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos\left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta\right)$

Az eredő térerősség minden pontban és időben a két térerősség vektori összege:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{10} \cos\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right) + \vec{E}_{20} \cos\left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta\right)$$

Az eredő térerősség négyzete: $E^2 = \vec{E}^2 = {\vec{E}_1}^2 + {\vec{E}_2}^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

Animáció kattintva!

Az interferencia tag

A két koherens hullám által létrehozott intenzitás:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle E^2\rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle {E_1}^2\rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle {E_2}^2\rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{{E_{10}}^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{{E_{20}}^2}{2}}_{I_2} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\rangle}_{I_{12}}$$

Az interferencia tag:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\langle 2\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\cos\left(\omega t - \vec{k}_1\cdot\vec{r}\right)\cos\left(\omega t - \vec{k}_2\cdot\vec{r} + \delta\right)\right\rangle \quad \begin{cases}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{cases} \quad +$$

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\langle \vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\left[\cos\left(2\omega t - \vec{k}_1\cdot\vec{r} - \vec{k}_2\cdot\vec{r} + \delta\right) + \cos\left(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \vec{k}_1\cdot\vec{r} - \delta\right)\right]\right\rangle$$

Az első tag időátlaga 0, másodiké önmaga, hisz az időtől független:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\cos\left[\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1\right)\cdot\vec{r} - \delta\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}\cos[\Delta\varphi]$$

$\Delta\varphi$: fáziskülönbség

Speciális eset: $\vec{E}_{10} = \vec{E}_{20} = \vec{E}_0$ tehát $I_1 = I_2 = I$ konstruktív és destruktív interferencia:

$$I_k = I + I + 2I = 4I \quad (\Delta\varphi = 0)$$

$$I_d = I + I - 2I = 0 \quad (\Delta\varphi = \pi)$$