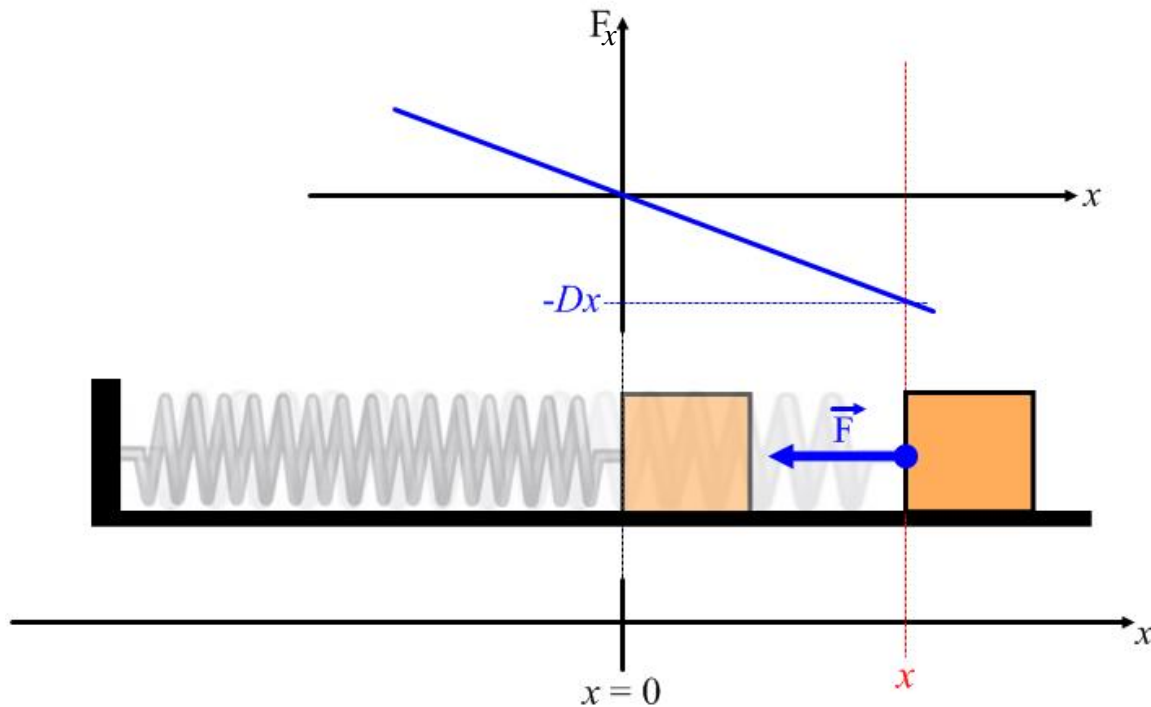


Rezgések

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóhoz rögzített test (ha minden más erő elhanyagolható vagy kiegyenlíti egymást, esetleg konstans, mint pl. a súlyerő).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás
(mozgástörvény):

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

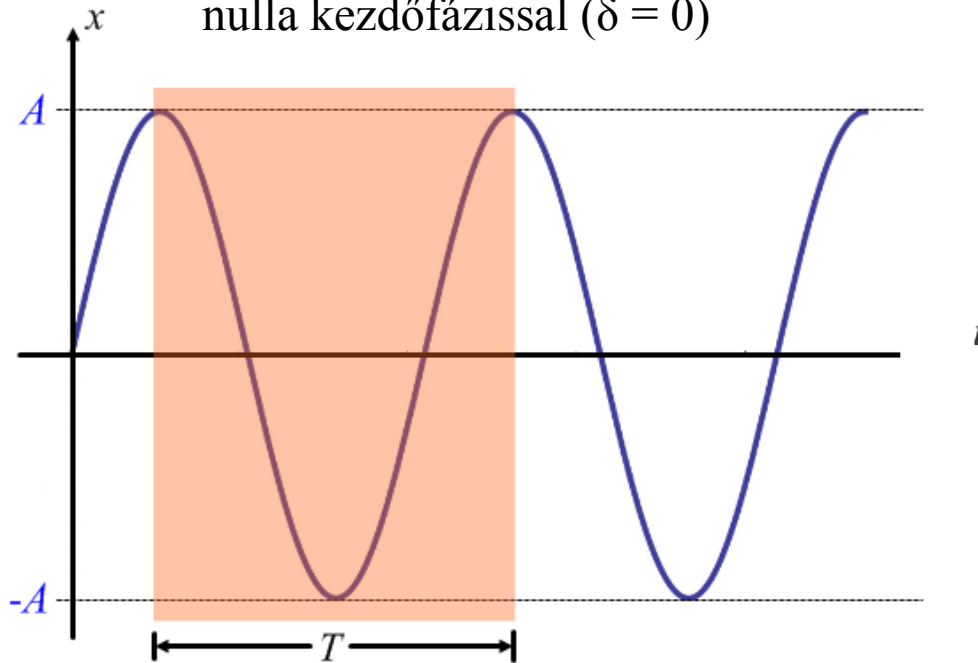
kezdeti feltételek határozzák meg őket

{	A: amplitúdó (maximális kitérés)
	δ : kezdőfázis

ω : körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal ($\delta = 0$)



$$x(t) = x(t + T)$$

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{körfrekvencia}$$

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a
sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a
gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

$$\text{Tehát: } \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Kinetikus és potenciális energia

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$) – rugalmas erőter

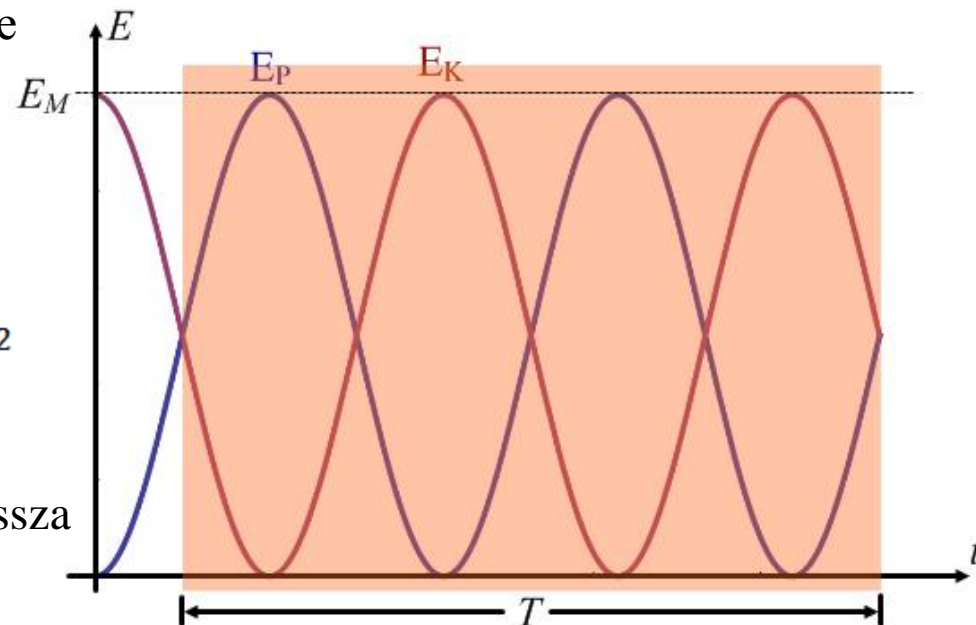
$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

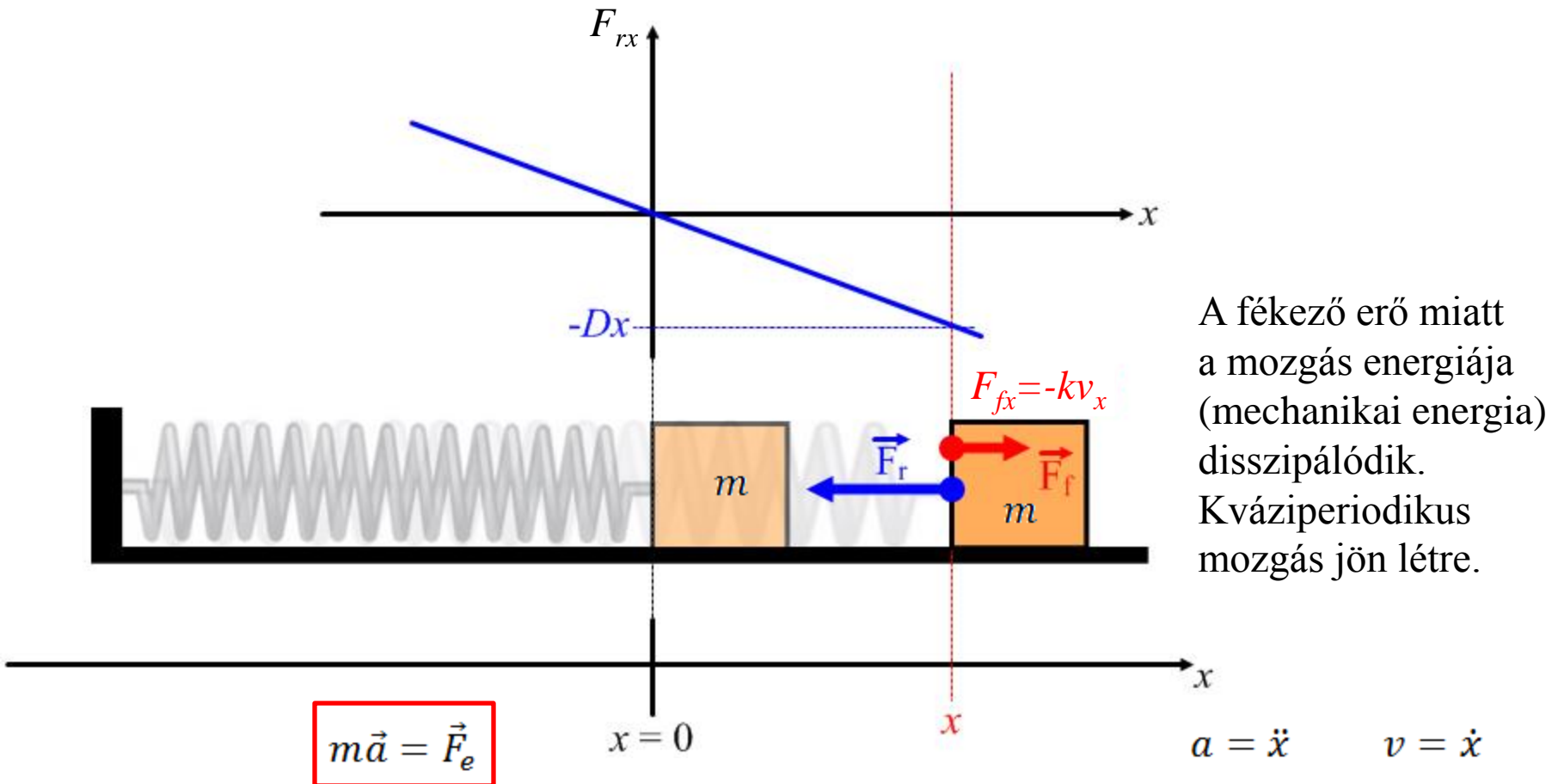
$$\begin{aligned} E_M &= E_K + E_P \\ &= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2 \end{aligned}$$

A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.



Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak. A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A fékező erő miatt a mozgás energiája (mechanikai energia) disszipálódik. Kváziperiodikus mozgás jön létre.

A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás x mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \alpha = \frac{k}{2m} \quad \alpha - \text{a csillapítási tényező}$$

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$ és $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$

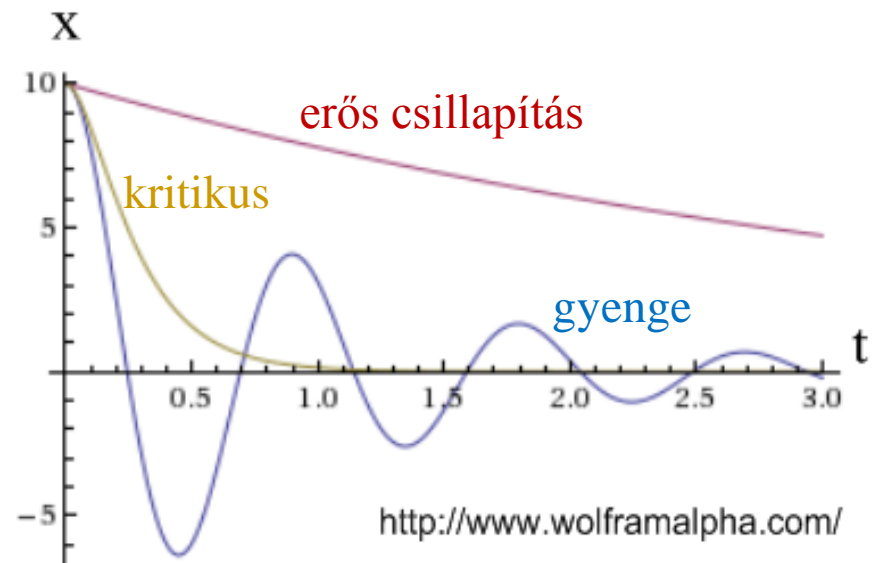
Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$



Gyengén csillapított rezgés

$$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta)$$

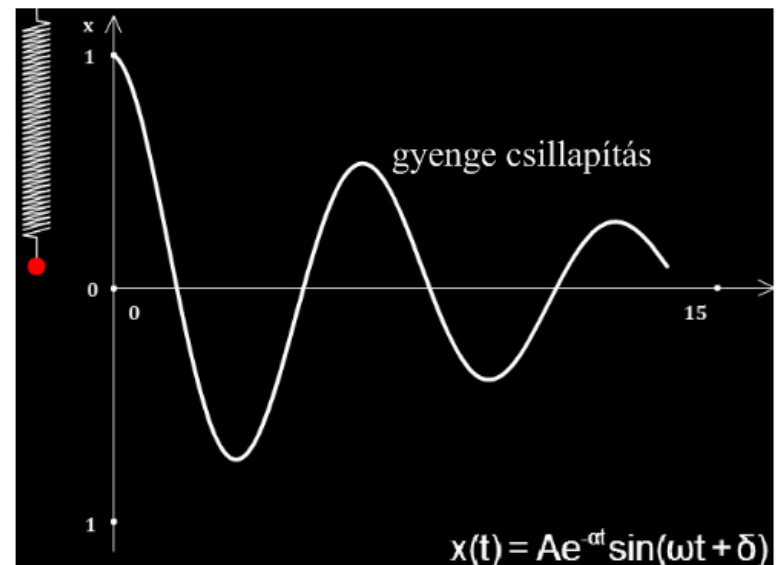
Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta) + \omega C e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta)$$

A C és δ konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.

Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és a két egyenletet megoldva a konstansok kiszámolhatók.

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)



Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0\sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.

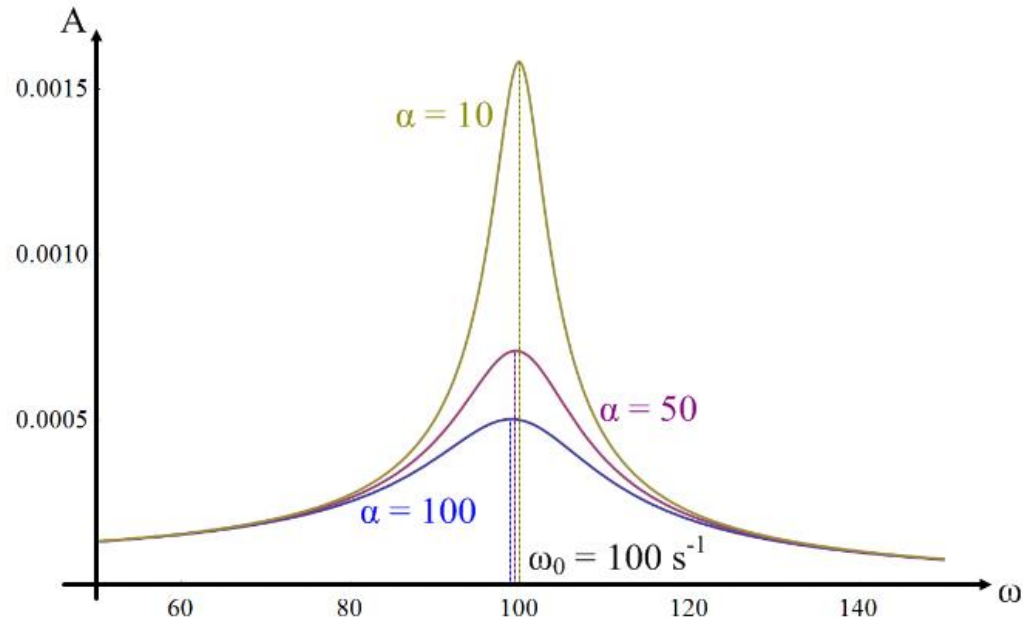
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{sajátfrekvencia}$$

$\delta - \text{fáziskésés}$

Rezonancia: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.

Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik...) – rezonancia katasztrófa.



Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.

Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)

A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).

Ez határozza meg milyen időközés van a két távoli pont rezgése között.

Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot (vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).

A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A \sin(\omega t)$

Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{c} \right) \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = A \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

T : a rezgés **periódusideje** ω : a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

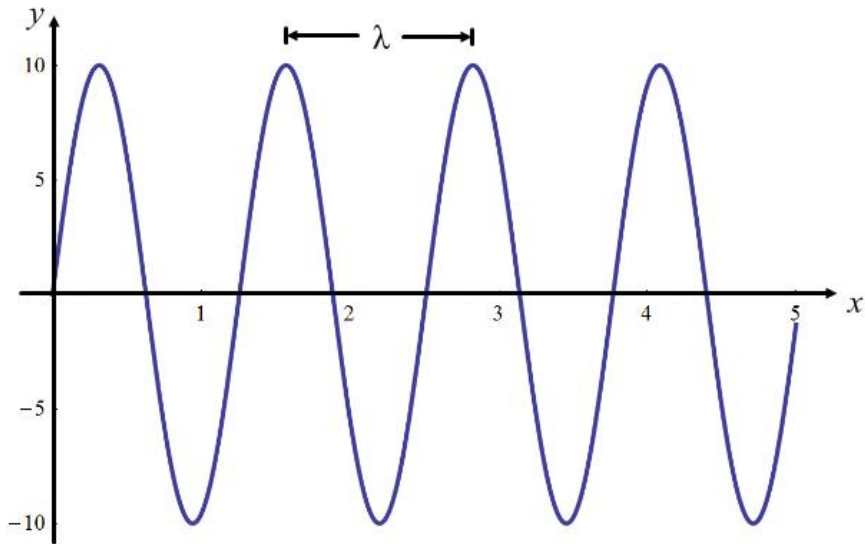
λ : a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$

k : **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$ Mivel: $T = 1/f$ ezért $c = \lambda f$

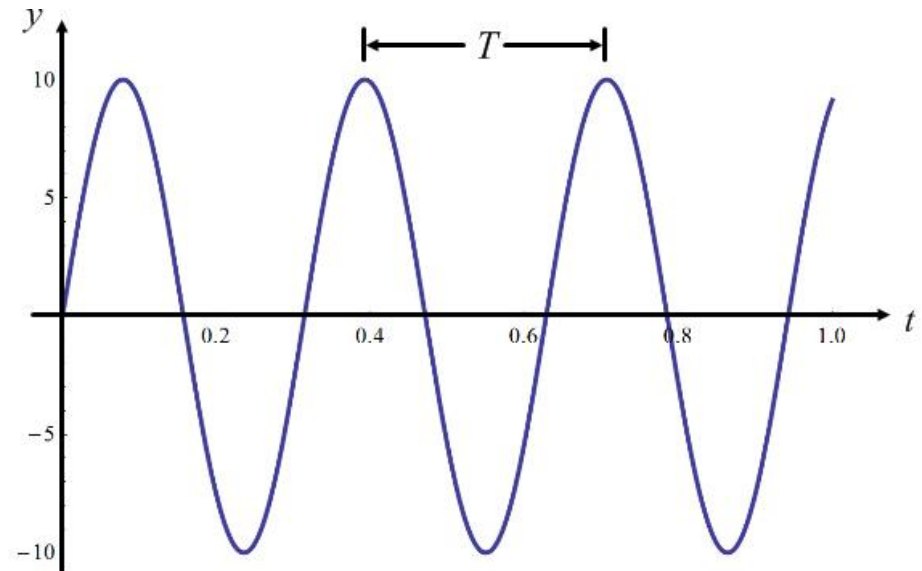


Hullámok: hely és időfüggés

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$

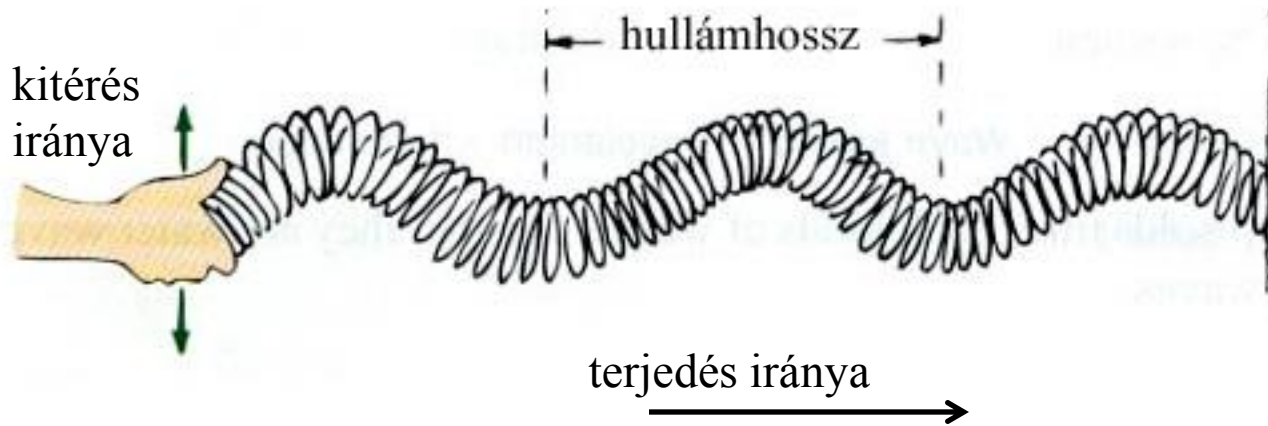


A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

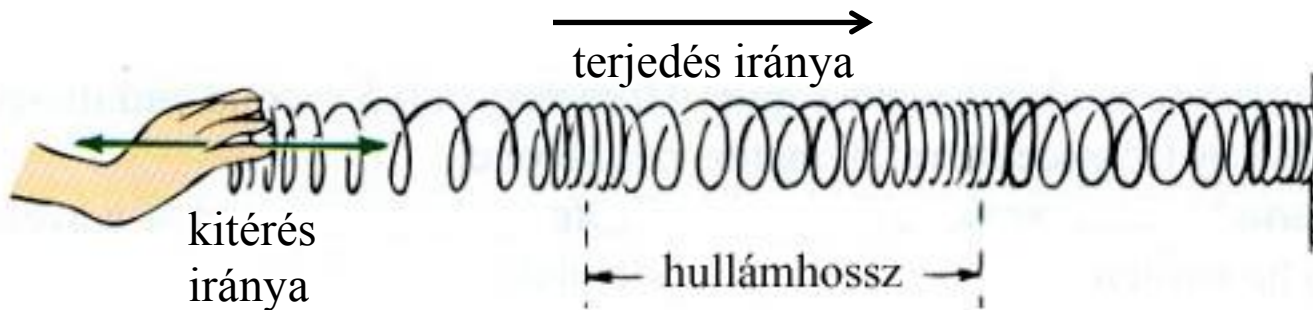


Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok



transzverzális hullám:
a kitérés merőleges a terjedési irányra



longitudinális hullám:
a kitérés párhuzamos a terjedési irányal

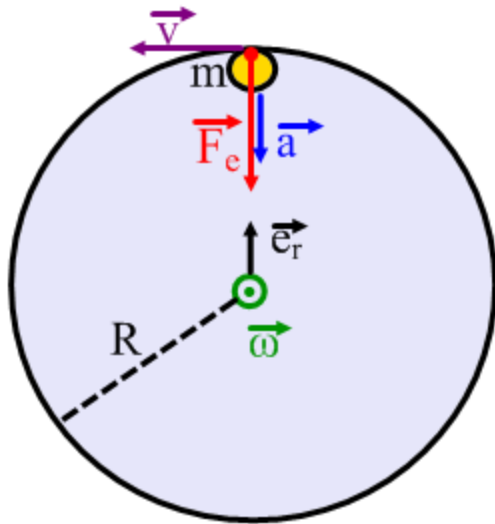
a hang is
longitudinális
hullám
(20Hz – 20kHz)



Körmozgás és forgómozgás

Egyenletes körmozgás dinamikája

Egyenletes körmozgás: A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).



INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötél-erő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.

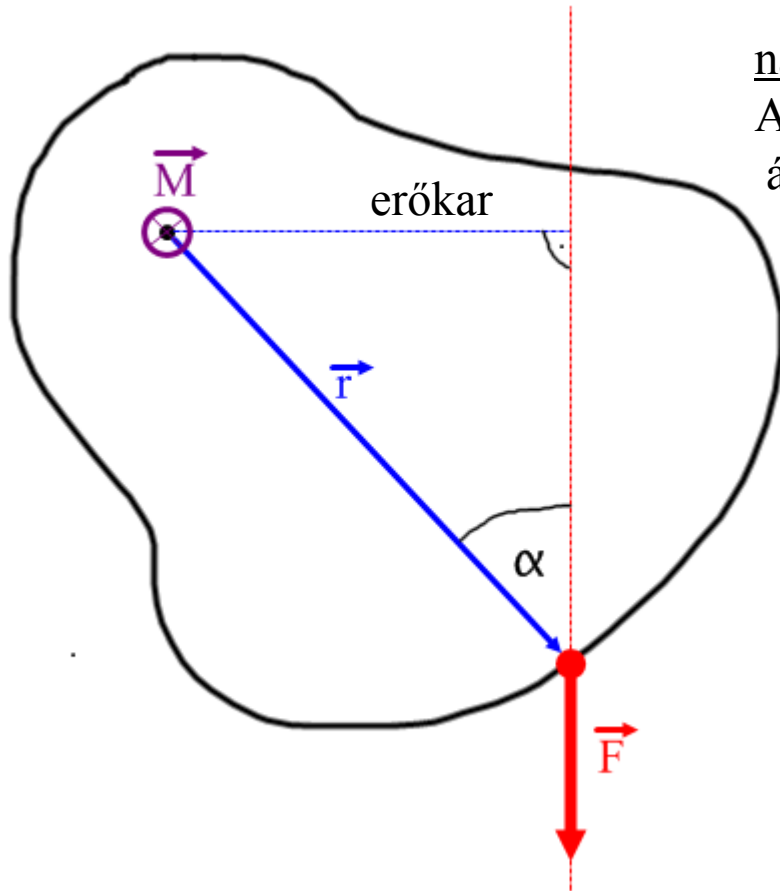
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Erőkar: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága



nagysága: erő \times erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr \sin \alpha$
A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

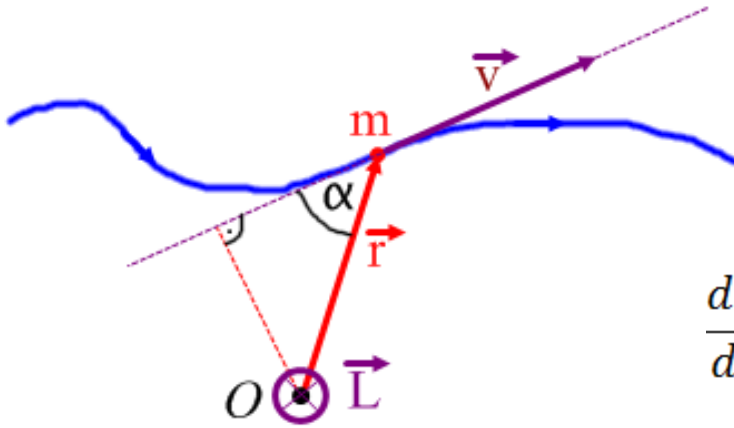
iránya: a vektorszorzat alapján (jobbkez-szabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

Perdület (impulzusmomentum)

Pontszerű test **perdületének** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$



A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \vec{v}) = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \\ &= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e \end{aligned}$$

Perdülettétel:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e$$

Tehetlenségi nyomaték

Speciális eset: tömegpont rögzített tengely körül, állandó távolságban mozog (körmozgás)

$$L(t) = mr^2 \omega(t)$$

Ekkor a perdületet idő szerint deriválva: $\frac{dL}{dt} = mr^2 \frac{d\omega(t)}{dt} = mr^2 \beta(t)$

β a szöggyorsulás, az mr^2 tag pedig a tömegpont **tehetlenségi nyomatéka**.

Tömegpontra a tehetlenségi nyomaték tehát: $\theta = mr^2$, ahol r a tengelytől mért távolság.

A perdülettélt felhasználva: $\frac{dL}{dt} = mr^2 \frac{d\omega(t)}{dt} = \theta \beta(t) = M$

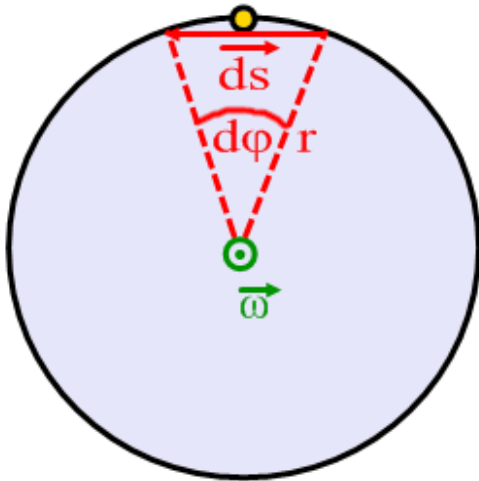
Megkaptuk a forgómozgás alapegyenletét: $M = \theta \beta$

A tömegpont **mozgási energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$

Munka és teljesítmény

Az elemi munka egy infinitezimális elmozdulás során (körmozgás):

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = ma_t ds = m\beta r ds = m\beta r^2 d\phi = \theta\beta d\phi = M d\phi$$



Haladó és forgó mozgások közötti analógia

	Haladó mozgás (1 dimenzió)	Forgó mozgás
változó	x	ϕ
(szög)sebesség	v_x	ω
(szög)gyorsulás	a_x	β
tehetetlenség	m	θ
A (szög)gyorsulás oka	$F_x = m a_x$	$M = \theta\beta$
Impulzus(momentum)	$p_x = m v_x$	$L = \theta\omega$
Kinetikus energia	$\frac{1}{2} m v_x^2$	$\frac{1}{2} \theta\omega^2$
munka	$F_x \Delta x$	$M\Delta\phi$
teljesítmény	$F_x v_x$	$M\omega$

Ebből a teljesítmény:

$$P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M\omega$$

Kiterjedt tesztek, tömegpontrendszerek

Súlypont

A testek mérete sokszor nem hanyagolható el a problémában szereplő méretekhez képest. A kiterjedésük miatt a haladó mozgás mellett a forgó mozgásukat is figyelembe kell venni.

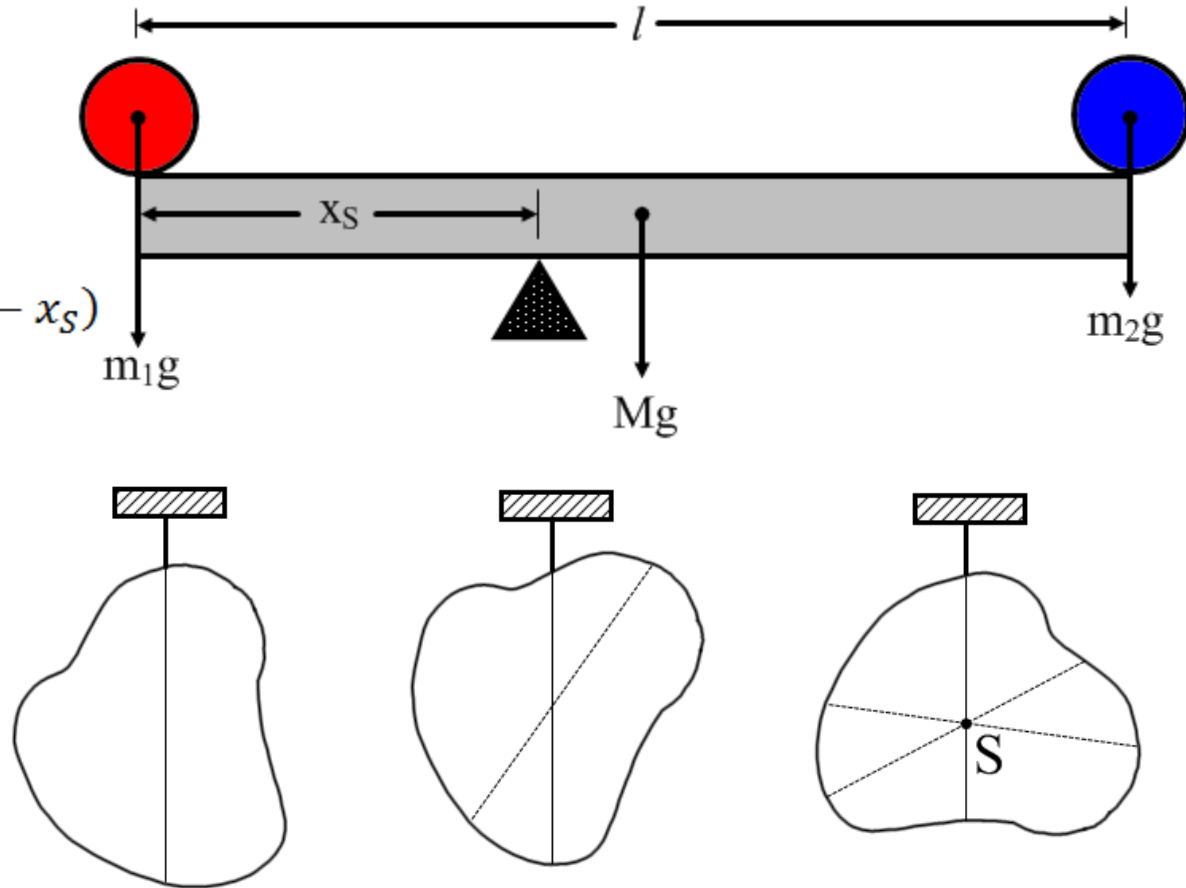
A **súlypont** az a pont ami alatt úgy alátámaszthatjuk a testet, hogy az egyensúlyban legyen:

Az alátámasztás helyére az eredő forgatónyomatéknak nullának kell lennie. Például:

$$m_1 g x_S = Mg \left(\frac{l}{2} - x_S \right) + m_2 g (l - x_S)$$

$$x_S = \frac{Mg \left(\frac{l}{2} \right) + m_2 g l}{m_1 g + Mg + m_2 g}$$

Egy bonyolult alakú test súlypontját azt több pontjában felfüggesztve határozhatjuk meg, mint a függőleges vonalak metszéspontja:

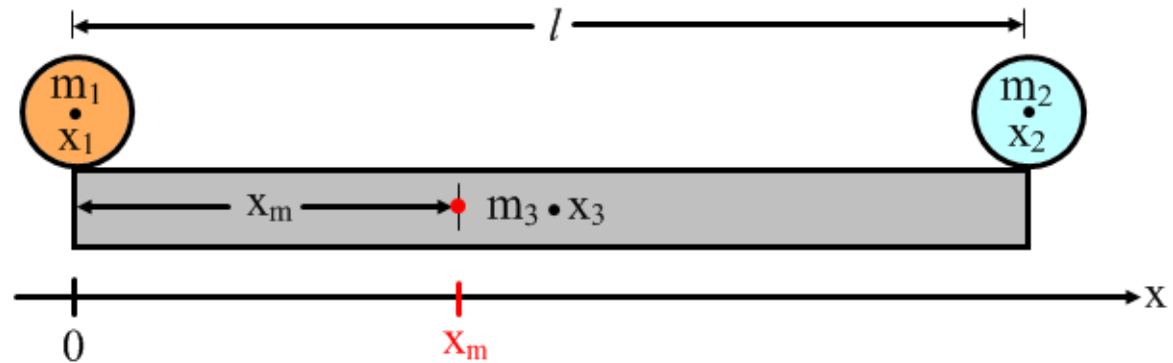


Tömegközéppont

Kiterjedt test **tömegközéppontjának** helye a testet felépítő pontok helyének tömegekkel súlyozott átlaga (illetve a részek tömegközéppontjainak tömegekkel súlyozott átlaga):

A példában az összetett test tömegközéppontjának x koordinátája:

$$x_m = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 \left(\frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$



A **tömegközéppont** helye általában: $(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right) =$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m} \right) \text{ tehát: } \vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}$$

[ANIMÁCIÓ](#)
[IDEKATTINTVA!](#)

A legtöbb esetben a **súlypont** és a **tömegközéppont** helye ugyanott van, és a kettő közül bármelyik használható. Különbség a két pont helye között csak akkor van, ha a test mérete olyan nagy, hogy a gravitáció nem tekinthető a test minden pontjára ugyanolyan erősségűnek.