

# Erőtörvények

Olyan függvények, amelyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.

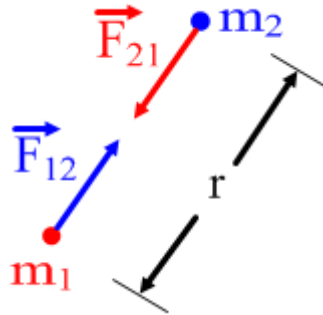
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:

- a test helye
- a test sebessége
- az idő

# Newton-féle gravitációs erő

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

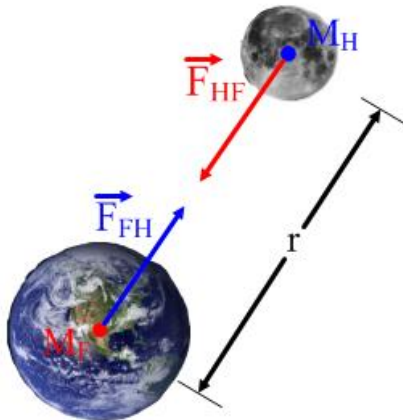
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

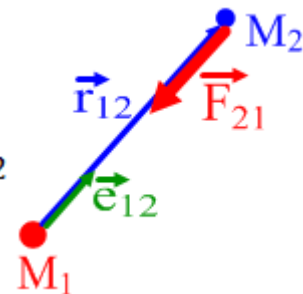
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó:  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Az erőtvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok. A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



# Súlyerő

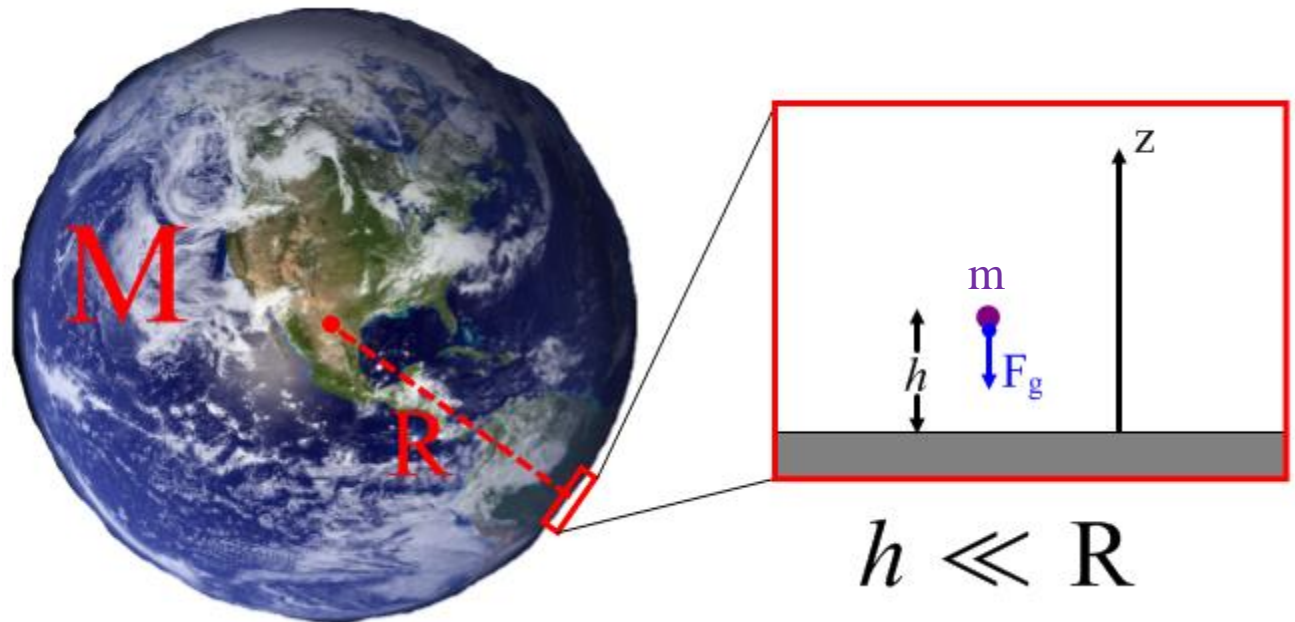
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtvénnyből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2} \vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2} \vec{e}_r = -m g \vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gravitációs gyorsulás  
a Föld felszínén

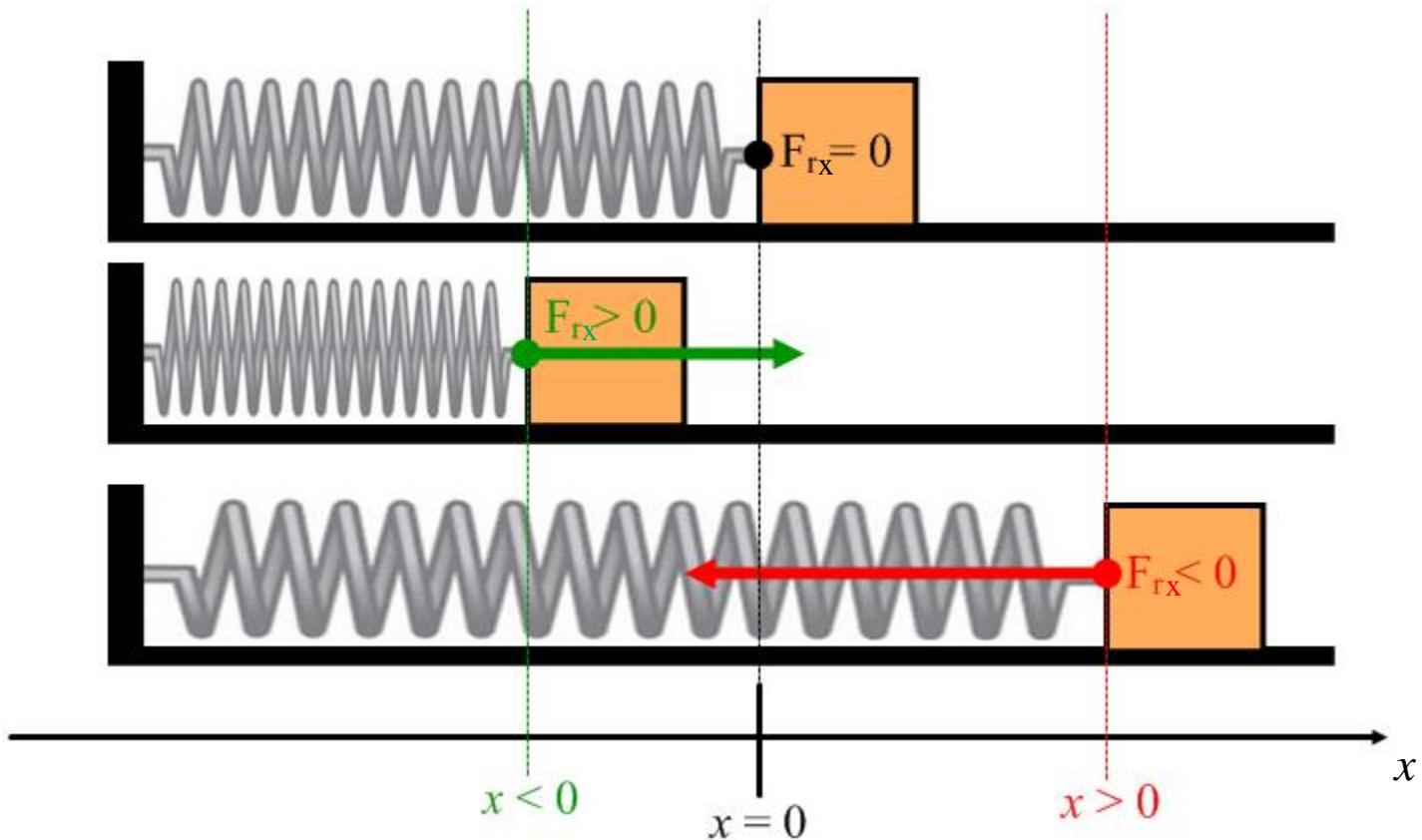


# Rugóerő

**Hooke-törvény:** Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.

Az arányossági tényező a rugóállandó  $D$ .

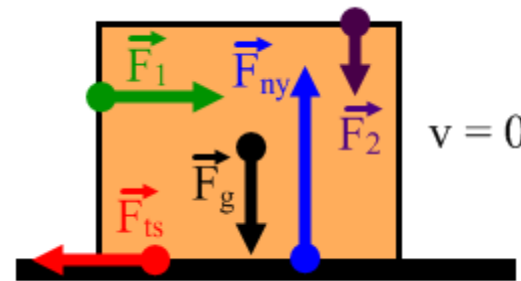
$$F_{rx} = -Dx$$



# Súrlódási erő

Három fajta lehet:

1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekeznek megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).

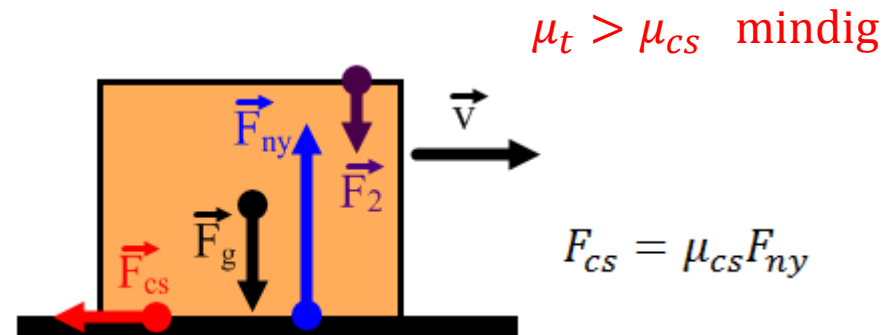


$$F_{ts} = F_1$$

amíg

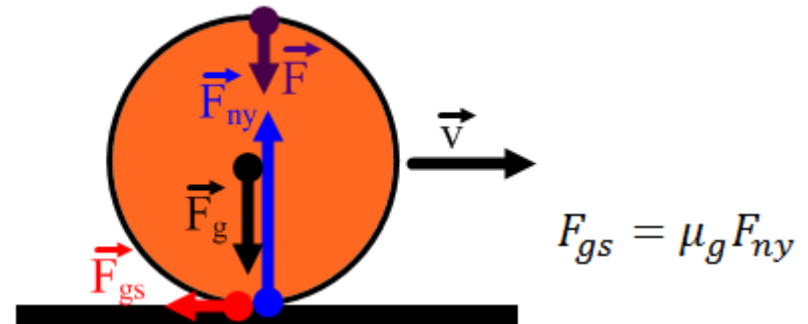
$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekezni gátolni. Csak az anyagi minőségtől ( $\mu$ ) és a felületeket összenyomó erőttől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

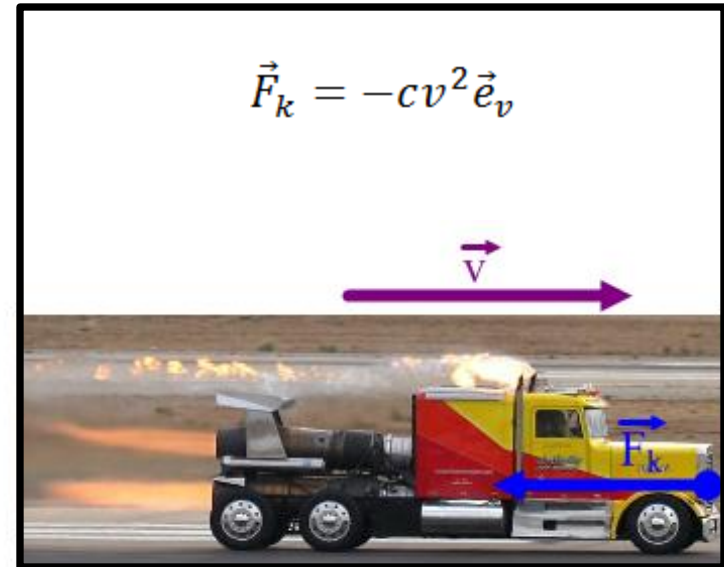
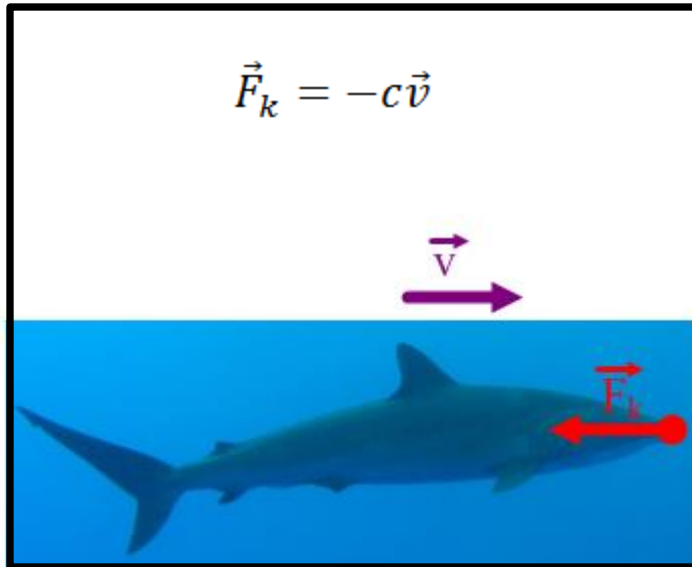
3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban.  
(pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)



$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

# Közegellenállás vagy légellenállás

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, és azzal ellentétes irányú.

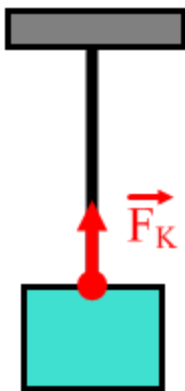


Az arányossági tényező  $c$  függ:

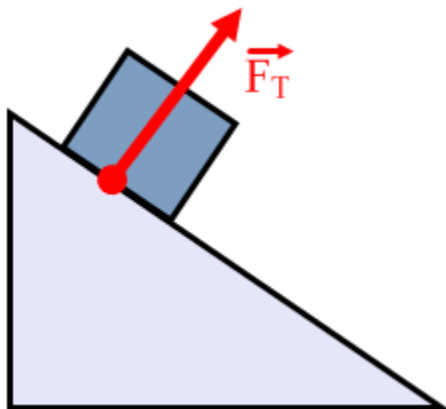
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

# Kényszererők

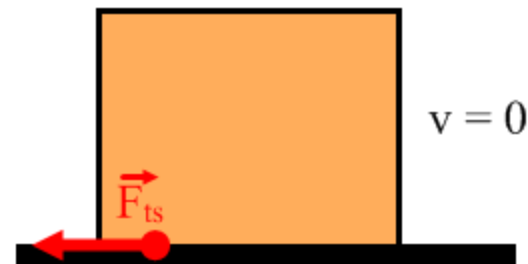
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:  
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

# A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. törvényét, akkor megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtörvényeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ex}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_{ey}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_{ez}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \right\} \text{ másodrendű, csatolt differenciálegyenletek}$$

Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.

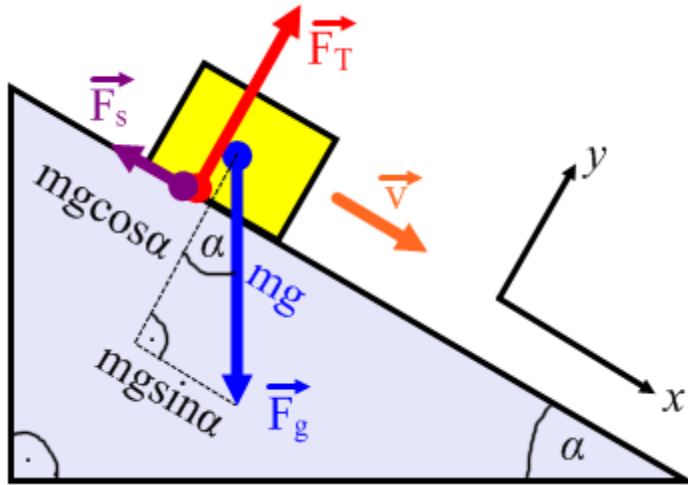
A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája:  $\vec{r}_0$  és  $\vec{v}_0$

Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete):  $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$



## Példa: Lejtőn mozgó test

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét: 
$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$$



Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az  $y$  irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$\begin{aligned} (x) \quad m\ddot{x} &= ma_x = mgsin\alpha - F_s \\ (y) \quad m\ddot{y} &= ma_y = 0 = F_T - mg\cos\alpha \end{aligned}$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mg\cos\alpha$$

Beírva az  $(x)$  egyenletbe a súrlódást:

Ha  $a_x < 0$  jön ki megoldásnak: ← 
$$\begin{aligned} ma_x &= mgsin\alpha - \mu mg\cos\alpha \\ a_x &= g(sin\alpha - \mu\cos\alpha) \end{aligned}$$

- a lefelé csúszó test lassul

---

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:

- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ( $\mu, F_T$ )

# Lendület

**Lendület (impulzus):** A test tömegének és sebességének szorzata.  
**vektormennyiség:** iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

**Lendülettétel:** Az lendület erő hatására változik meg.  
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

Az okozott lendületváltozás  $t_1$  és  $t_2$  között az eredő erő által:

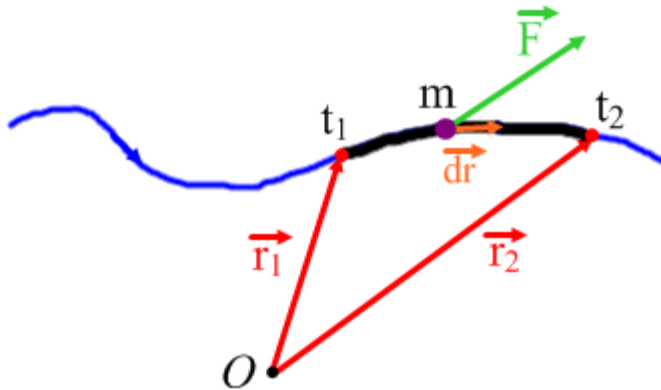
$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e dt$$

tömegtől független



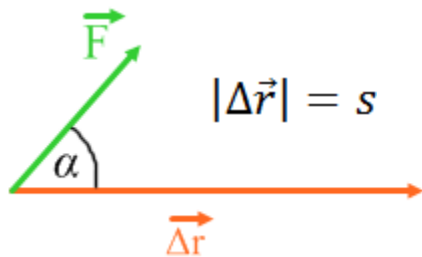
# Munka

**Munka:** Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1(g)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Speciális eset: A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos \alpha dr = F \cos \alpha \int_g dr = Fs \cos \alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat ( $\alpha = 0$ ):  $W = Fs$

# Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó:  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$  (a mozgás pályája egyenes vonalú)  $\rightarrow a_x \rightarrow a$

-  $t$  idő múlva sebessége:  $v = at$ , a megtett út pedig:  $s = x = \frac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka:  $W = Fs = ma \frac{a}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**:  $E_K = \frac{1}{2}mv^2$  (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

**Munkatétel:** A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett munkával.

$$W = \Delta E_K$$



# Teljesítmény

**Teljesítmény:** Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

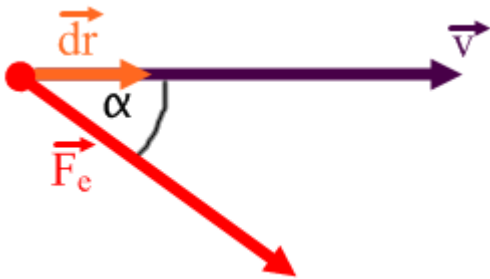
$$P = \frac{dE}{dt} \quad (\text{lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia})$$

A mechanikai **teljesítménytétel:** A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával:

$$P = \frac{dE_K}{dt}$$

Az elemi munka:  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_K$

A munkatétel felhasználásával:  $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$



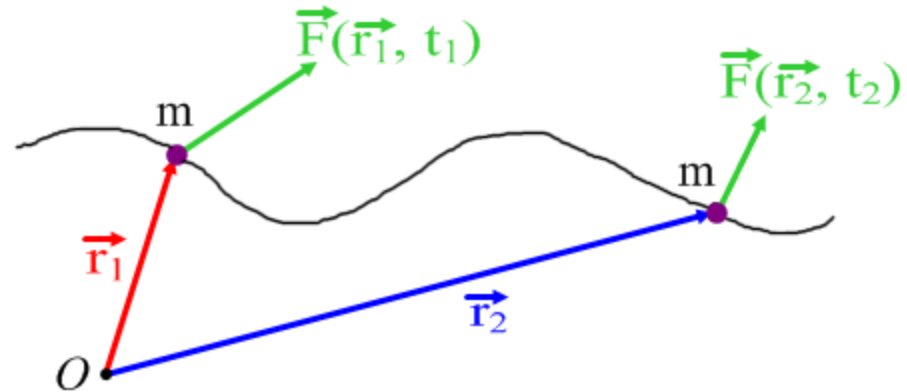
Végrehajtva egy változótranszformációt:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_{1,g}}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

# Fizikai mező (erőtér)

**Fizikai mező:** Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.

Tehát az  $\vec{r}$  és  $t$  az erő vektorfüggvény változói:  $\vec{F}(\vec{r}, t)$



- Az erőter lehet időtől független (**stacionárius**), tehát  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$ .

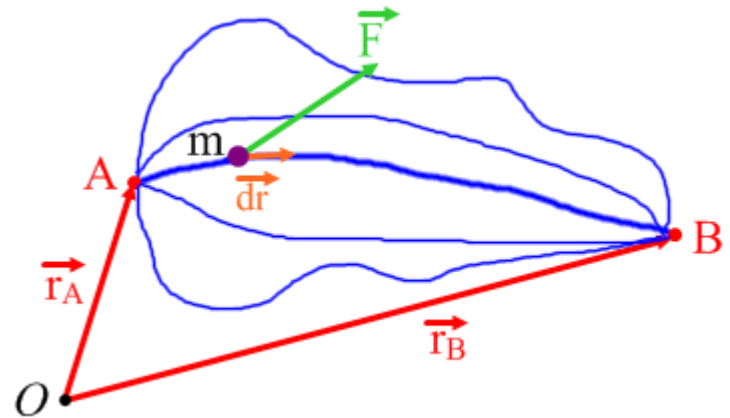
Ekkor az erő csak a helytől függ:  $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőter lehet helytől független (**homogén**), tehát  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$

Ekkor az erő csak az időtől függ:  $\vec{F}(t)$

# Konzervatív erőterek

**Konzervatív erőtér:** Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

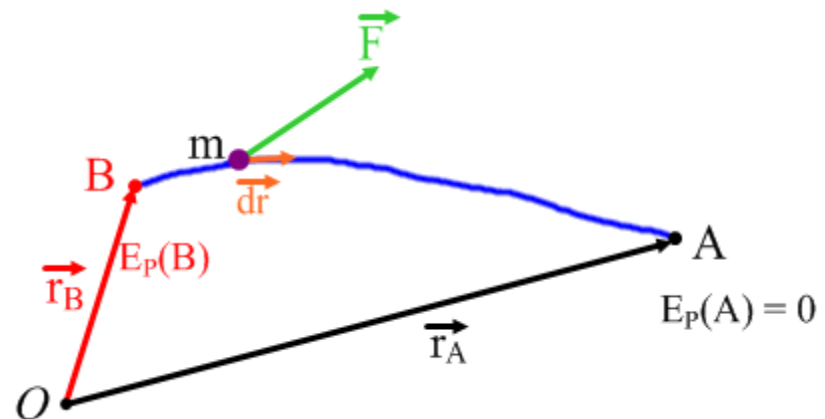


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

## **Potenciális (helyzeti) energia:**

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a **tér** végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_p(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



## Példa: súlyerő munkája

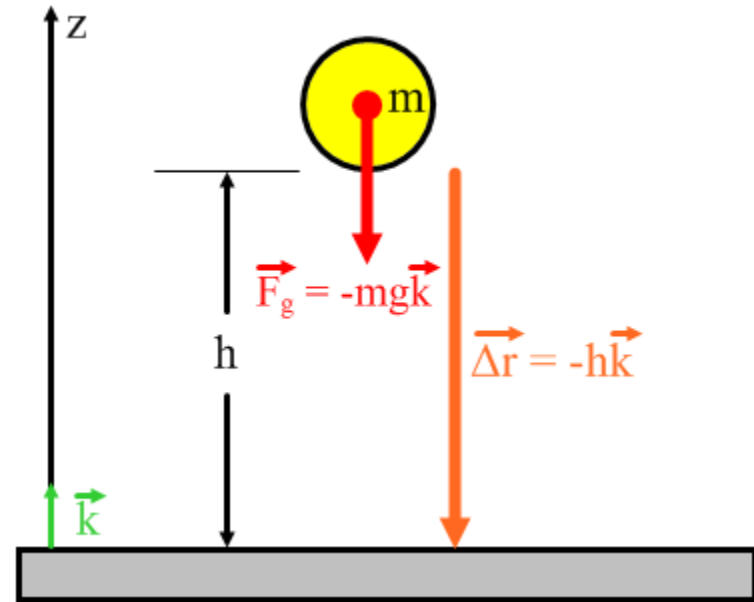
Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy  $F_g = 20\text{N}$  súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$\begin{aligned} E_P(h) &= W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^0 (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) = \\ &= \int_h^0 -mg dz = -mg[z]_h^0 = mgh \end{aligned}$$

Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a  $W = Fs$  képlet is, tehát a  $W = (mg)h = mgh$  egyből látható.

vagyis esetünkben:  $W = (20\text{N})(80\text{m}) = 1600\text{J}$





# Az energiaminimum elve

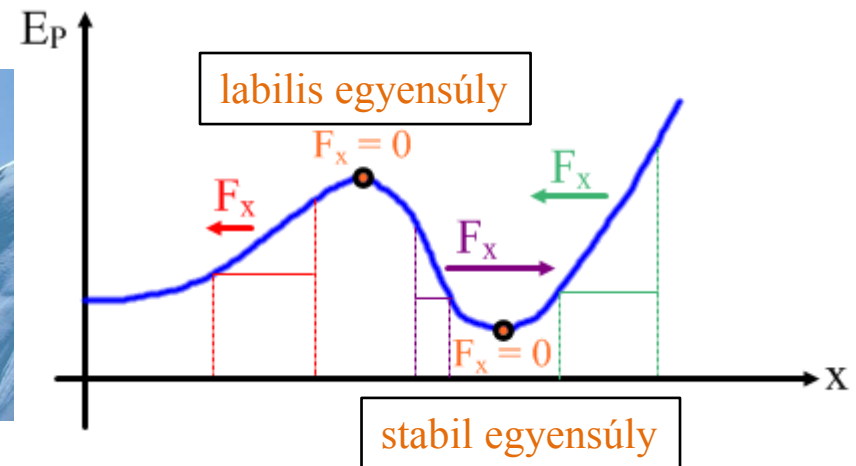
Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.  
Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban:  $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

**Energiaminimum elve**: Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).

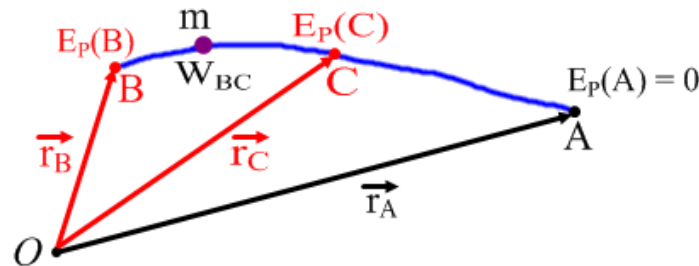
Három dimenzióban:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \\ &= -\frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{k} = \\ &= -\nabla E_P = -\text{grad} E_P\end{aligned}$$



# Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test  $B$ -ből  $C$ -be mozdul.



Ekkor bármely  $B$  és  $C$  pontokra:  $E_P(B) - E_P(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_P = W_{BC} = \Delta E_K$$

Ennek az egyenletnek a differenciális alakja:  $-dE_P = \delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dE_K$

Tehát az **elemi munka a potenciális energia teljes differenciálja**.

Az eredeti egyenletet átrendezve:  $E_P(B) + E_K(B) = E_P(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_P + E_K$$

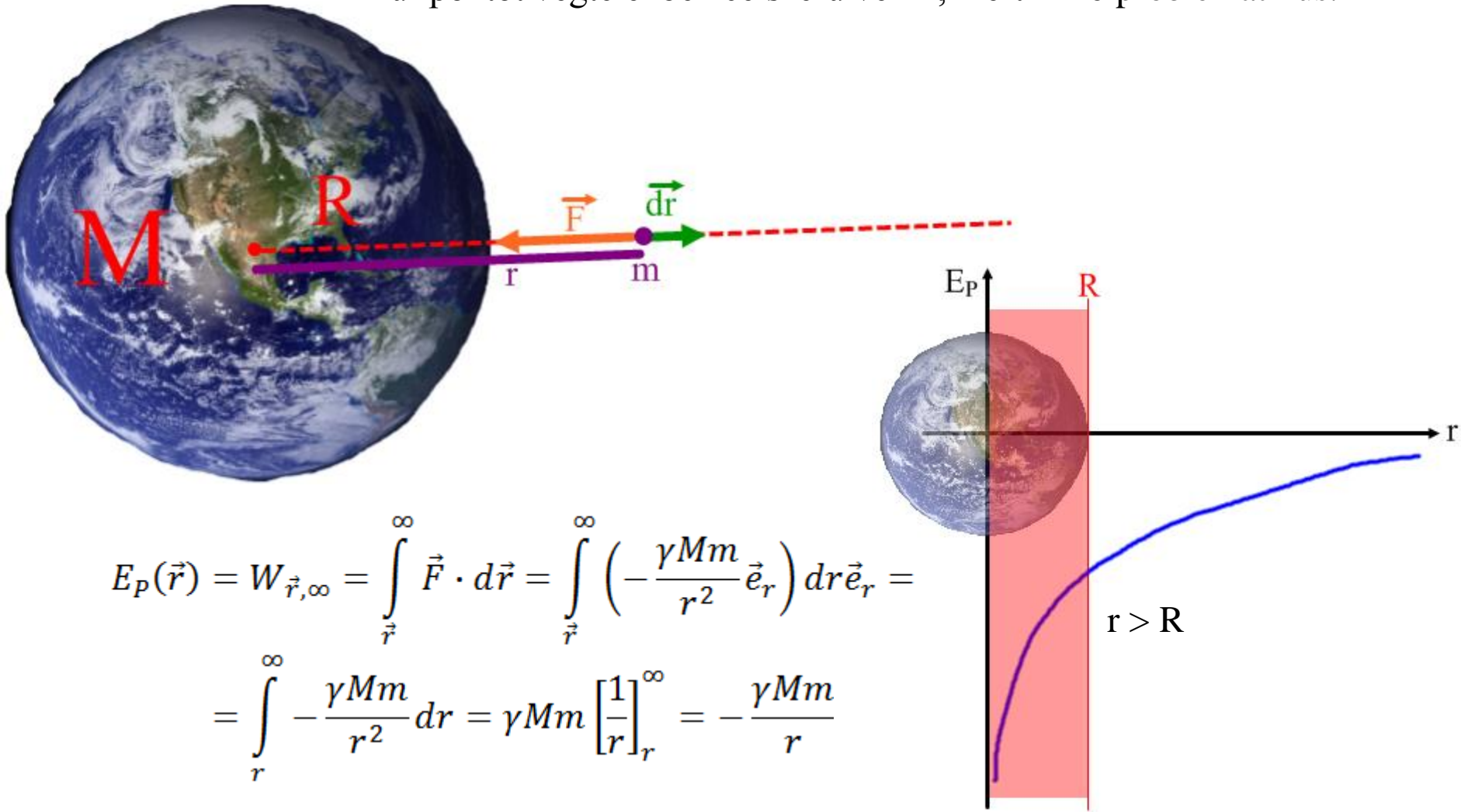
Ez a mechanikai energia konzervatív erőterben megmarad:  $E_M(B) = E_M(C)$

Példák konzervatív erőterekre

# Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben

Legyen a  $M$  tömegű test rögzítve, és tőle  $r$  távolságban kiszámoljuk a  $m$  tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert  $r = 0$  problematikus.



$$\begin{aligned} E_p(\vec{r}) &= W_{\vec{r}, \infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left( -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r \right) dr \vec{e}_r = \\ &= \int_r^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[ \frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r} \end{aligned}$$

# Rugóerő potenciális energiája

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak. Ez konzervatív erőteret eredményez.

Az  $x$  hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$E_P(x) = W_{\vec{r},0} = \int_{\vec{r}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^0 (-Dx\vec{i}) dx\vec{i} =$$
$$= \int_x^0 -Dx dx = -D \left[ \frac{x^2}{2} \right]_x^0 = \frac{1}{2} Dx^2$$

