

Ideális gázok állapotváltozásai

Ekvipartíció tétele

Szabadsági fokok száma: (f) – Az egymástól független energiatárolási módok.

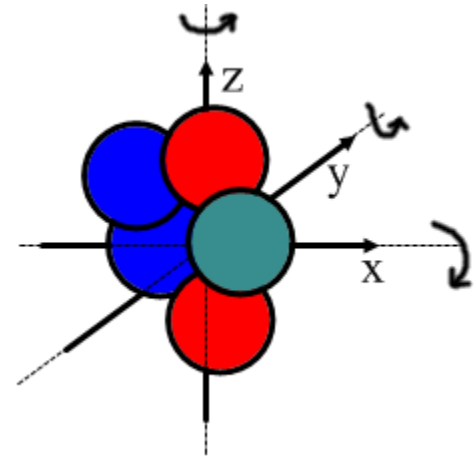
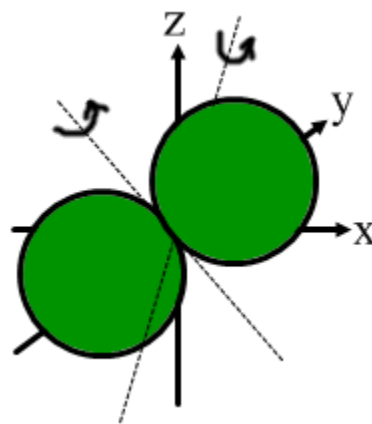
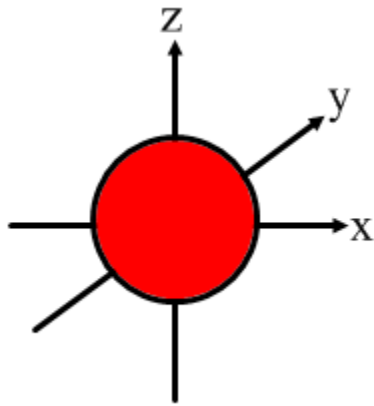
pl. mozgás x irányban, y irányban, z irányban (egyatomos gáz esetén lásd a múlt órai diák)

Tehát: $f = 3$ (egyetlen atomra). Ezek a translációs szabadsági fokok (x, y, z).

Kéttomos vagy egyéb lineáris geometriájú (pl. CO_2) molekulák a hossz tengelyükre merőleges két tengely körül foroghatnak is: $f = 5$. Transzlációs mellett 2 rotációs is.

Sokatomos molekulák három egymásra merőleges tengely körül foroghatnak is: $f = 6$

Energiatárolás csak azon tengely körüli forgás esetén van, amelynél a tehetetlenségi nyomaték nem elhanyagolható (mint a hosszanti tengelyre a lineáris molekuláknál).



Ekvipartíció tétele: Egyensúlyi rendszerben, egy adott hőmérsékleten minden rendelkezésre álló szabadsági fokra időátlagban jutó ε_f energia megegyezik.

Egy részecske egy szabadsági fokára: $\varepsilon_f = \frac{1}{2} kT$ $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ (Boltzmann-állandó)

Ideális gáz belső energiája

Ha az egy szabadsági fokra jutó energia átlagban $\varepsilon_f = \frac{1}{2}kT$, akkor egy részecskére átlagban

$$\bar{\varepsilon} = f \cdot \varepsilon_f = f \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{f}{2}kT \text{ energia jut.}$$

Ha a rendszer N db részecskéből áll, akkor a belső energia ennek egyszerűen az N -szerese:

$$E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT \quad \text{ahol } n = N / N_A \text{ és } R = kN_A$$

n : a mólok száma N_A : az Avogadro-szám $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ az egyetemes gázállandó.

A belső energia tehát csak a hőmérséklettől függ (adott mennyiségű és típusú gáz esetén).

Annak a testnek magasabb a hőmérséklete, ahol az egy szabadsági fokra jutó energia több.

A belső energia megváltozása tehát: $\Delta E_b = \frac{f}{2}Nk\Delta T = \frac{f}{2}nR\Delta T$

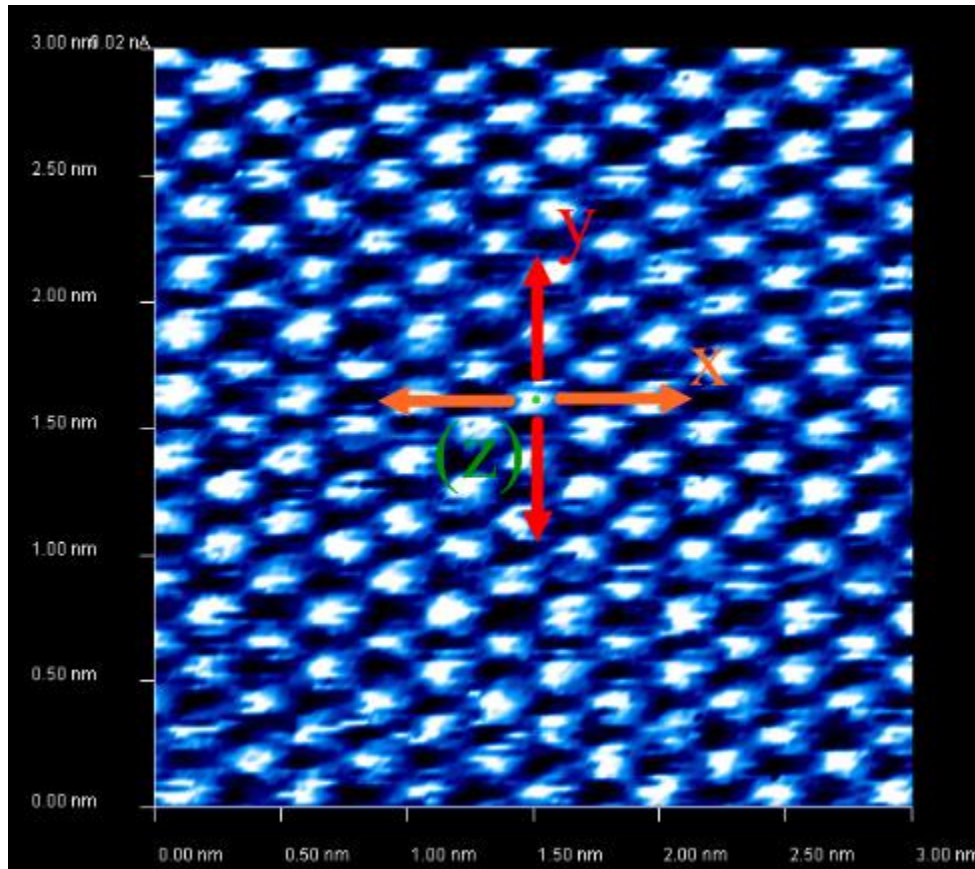
Ha visszatérünk egy pillanatra az egyatomos ideális gázokhoz, akkor kiszámíthatjuk az atomok sebességének **négyzetes középértékét** (v_{rms} vagyis „root mean square”):

$$E_b = N\bar{\varepsilon} = N \frac{3}{2}kT \quad \text{de így akkor} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

(m_0 : egy atom tömege, M : moláris tömeg)

Dulong-Petit szabály

Szilárd testekben az atomok rezgéseket végeznek három egymásra merőleges (x, y, z) irányban. Minden irányhoz tartozik egy kinetikus és egy potenciális energia tag.



szén atomok pásztázó alagútmikroszkópos képe (3 nm × 3 nm) grafitban

Minden atomra: $f = 6$
szabadsági fok.

Szilárd test belső energiája:

$$E_b = \frac{f}{2} NkT = 3NkT = 3nRT$$

Mivel $V = \text{áll}$, $W = 0$,
a hőtan első főtétele alapján:

$$\Delta E_b = Q + W = Q$$

$$Q = 3nR\Delta T = c_M n\Delta T$$

Dulong-Petit szabály:

a szilárd test mólhője:

$$c_M = 3R$$

Ideális gázok állapotegyenlete

A belső energiát egyatomos ideális gázokra kétféle módon is megkaptuk:

$$E_b = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \quad E_b = \frac{3}{2}pV \quad \rightarrow \quad pV = NkT = nRT$$

Ez nem csak egyatomos, hanem többatomos molekulákból álló ideális gázokra is igaz, az adott ideális gáz bármely állapotában. Innen az egyenlet neve...

Állapotegyenlet: Ideális gáz minden állapotában, az állapotváltozók között érvényes a következő összefüggés:

$$pV = NkT \quad \text{vagy} \quad pV = nRT$$

A belső energia tehát többféleképp írható: $E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}pV$

Abban az esetben, ha a gáz mennyisége állandó ($N = \text{állandó}$, vagy $n = \text{állandó}$), az állapotegyenletből megkapjuk az **egyesített gáztörvényt**.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

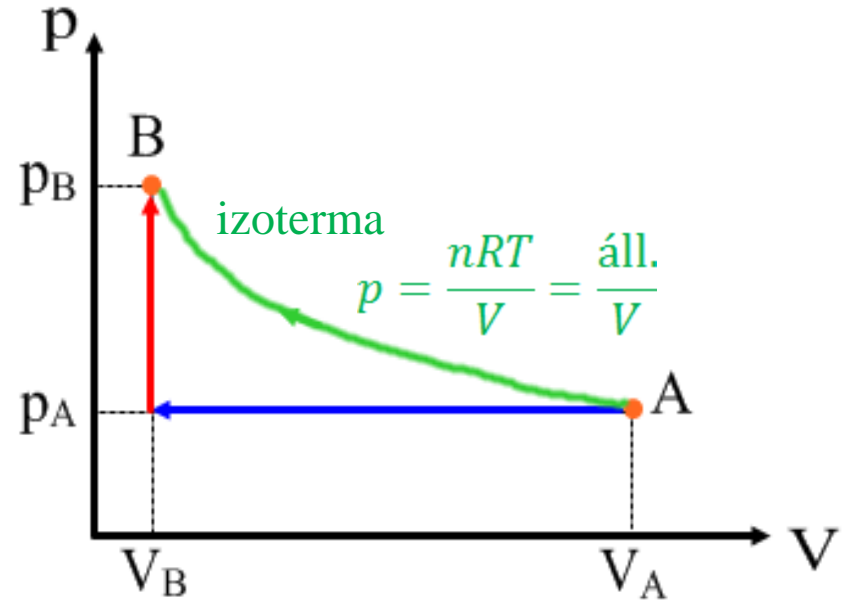
Ideális gázok speciális állapotváltozásai

Gáz mennyisége mindig adott, tehát $n = \text{áll!}$

- izobár: a nyomás is állandó ($pV = nRT$)
($V/T = \text{áll.}$ $W = -p\Delta V = -nR\Delta T$)

- izochor: a térfogat is állandó ($pV = nRT$)
($p/T = \text{áll.}$ $W = 0$)

- izoterm: a hőmérséklet is állandó ($pV = nRT$)
($pV = \text{áll.}$)



$$\delta W = -pdV$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} pdV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT [\ln V]_{V_1}^{V_2} =$$

$$= -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

- adiabatikus: a közölt hő nulla $Q = 0$ (később...)

Izobár és izochor mólhő

A belső energia megváltozása izochor folyamat esetén ($V = \text{állandó}$, így $W = 0$):

$$Q = c_{MV} n \Delta T \quad \Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q \quad \text{izochor mólhő: } c_{MV} = \frac{f}{2} R$$

A belső energia megváltozása izobár folyamat esetén:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q + W = Q - p \Delta V = Q - n R \Delta T$$

$$\frac{f}{2} n R \Delta T + n R \Delta T = Q$$

$$Q = c_{Mp} n \Delta T \quad Q = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) n R \Delta T \quad \text{izobár mólhő: } c_{Mp} = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R$$

A két mólhő hányadosa (fajhők hányadosa) az **adiabatikus kitevő**:

$$\kappa = \frac{c_{Mp}}{c_{MV}} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f + 2}{f} \quad \kappa = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$$

Adiabatikus állapotváltozás

A folyamat során a hőátadás nulla: $Q = 0 \rightarrow \Delta E_b = W$

A belső energia megváltozása: $dE_b = \delta W \rightarrow \frac{f}{2} nRdT = -pdV$

Mivel: $nRT = pV \rightarrow nRdT = pdV + dpV$

$$\frac{f}{2} (pdV + dpV) = -pdV$$

$$\frac{f}{2} pdV + pdV = -\frac{f}{2} Vdp$$

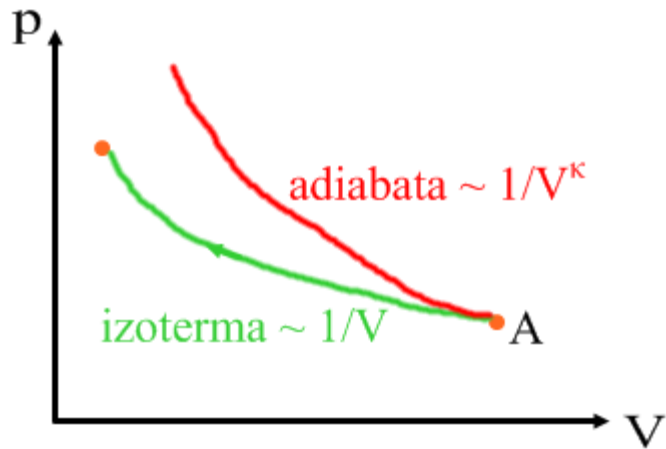
$$\left(\frac{f}{2} + 1\right) \frac{dV}{V} = -\frac{f}{2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \rightarrow \kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -[\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

$$\kappa \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa = \frac{p_1}{p_2}$$



Első Poisson-egyenlet:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$$

További Poisson-egyenletek

Adiabatikus folyamatra kaptuk az első egyenletet: $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$

Felhasználva az állapotegyenletet, kapjuk a második Poisson-egyenletet:

$$pV = nRT \rightarrow pV^\kappa = nRTV^{\kappa-1}$$
$$nRT_1 V_1^{\kappa-1} = nRT_2 V_2^{\kappa-1}$$

Egyszerűsítve nR -el: $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$

Kifejezve V -t az állapotegyenletből: $V = \frac{nRT}{p}$

Behelyettesítve az első Poisson egyenletbe: $p_1 \left(\frac{nRT_1}{p_1} \right)^\kappa = p_2 \left(\frac{nRT_2}{p_2} \right)^\kappa$

Egyszerűsítve $(nR)^\kappa$ -al és reciprokokat véve kapjuk a harmadik Poisson egyenletet:

$$\frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^\kappa} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^\kappa}$$