Folyadékok és gázok mechanikája

Hidrosztatikai nyomás

A folyadékok és gázok közös tulajdonsága, hogy alakjukat szabadon változtatják. Ha a részecskékből álló felépítés helyett ezeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor **kontinuum**ról beszélünk.

Hidrosztatika: nyugvó folyadékok mechanikája

Nyomás: Egy pontban a nyomás a pontot körülvevő (végtelen) kicsiny felületre ható erő felületre merőleges komponense, osztva a felület nagyságával. Skalár mennyiség.

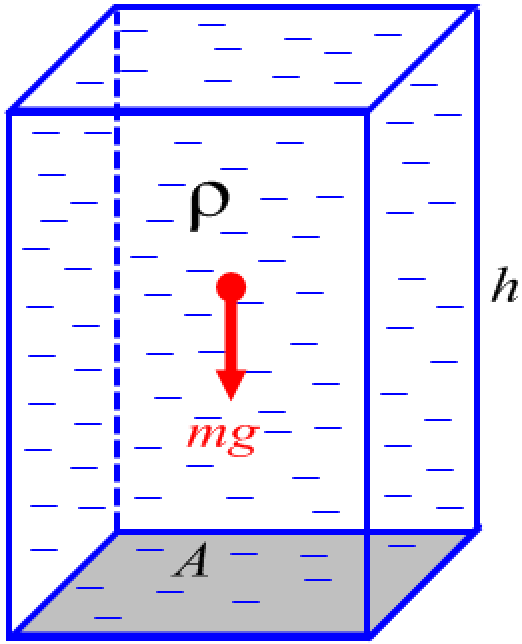
$$p = \lim_{A\to 0} \frac{F_\perp(A)}{A}$$

Mértékegysége: $[p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$ (Pascal)

A **hidrosztatikai nyomás** a folyadék (h magasságú oszlop) súlyereje által okozott nyomás (egyenletesen oszlik el):

$$p = \frac{F_\perp(A)}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g$$

ρ: sűrűség



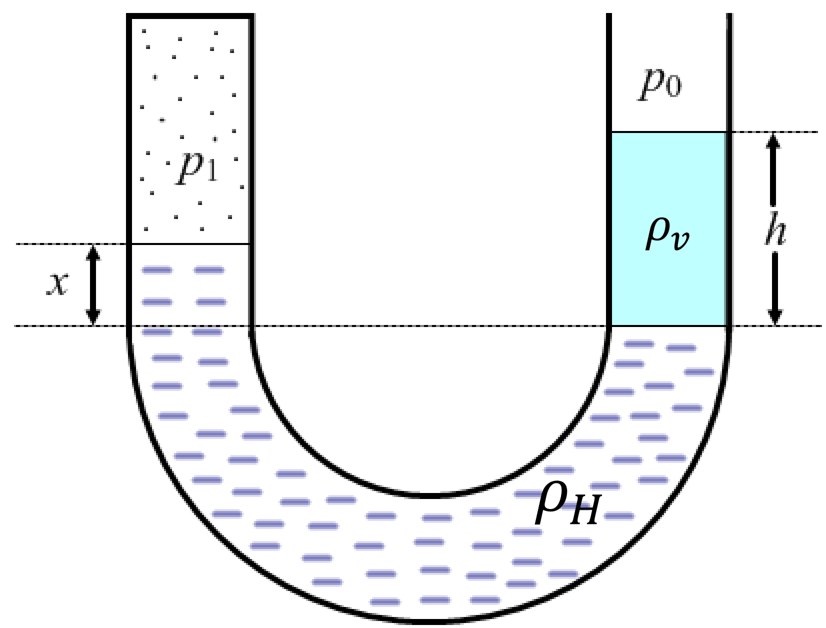
Mivel a folyadék alakja szabadon változhat, adott mélységben a nyugvó folyadék nyomása nem függ a felület irányításától, a kifejtett erő pedig mindig merőleges a felületre.

Pascal törvénye: Egynemű nyugvó folyadék azonos magasságú pontjaiban a nyomás azonos.

Pascal törvénye - Példa

Egy U alakú üvegcső baloldali vége zárt, a másik nyitott. A csőben alul 13,6g/cm^3 sűrűségű higany, a jobb szárban efölött 50cm magas vízoszlop van. A légköri nyomás 1bar, a bal szárban a Hg fölött a levegő nyomása 0,9bar. Mekkora a magasságkülönbség a két higanyszint között?

$p_0 = 10^5\text{Pa}, \quad p_1 = 0{,}9 \cdot 10^5\text{Pa}, \quad h = 50\text{cm}$



A higanyban, mint egynemű nyugvó folyadékban a szaggatott vonallal megjelölt szinten a bal és jobb oldalon meg kell egyeznie a nyomásnak:

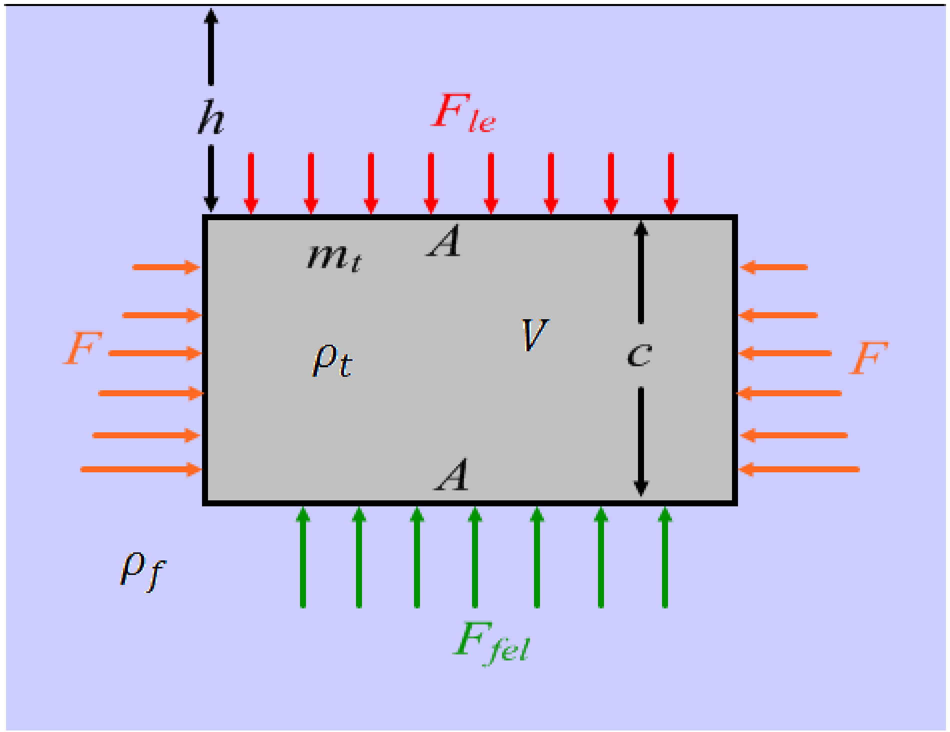
$$p_b = p_j$$

$$p_1 + x\rho_H g = p_0 + h\rho_v g$$

$$x = \frac{p_0 + h\rho_v g - p_1}{\rho_H g} = \cdots = 11{,}17\text{cm}$$

Felhajtó erő

A **felhajtó erő** a folyadék által a test teljes felületére kifejtett eredő erő.
A téglatest alakú test lapjaira:
- elülső és hátulsó eredője nulla
- bal oldali és jobb oldali eredője nulla
- alsó és felső eredője...



$$F_f = F_{fel} - F_{le} = p_{lent}A - p_{fent}A =$$
$$= \rho_f g(h+c)A - \rho_f ghA = \rho_f gcA =$$
$$= \rho_f Vg = m_f g$$

V a test által kiszorított folyadék térfogata, aminek tömege m_f
Tehát a felhajtó erő nagysága egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. Ez más alakra is igaz.

Archimédesz törvénye: Minden folyadékba mártott testre felhajtó erő hat, amely egyenlő a kiszorított (bemerülő rész által) folyadék súlyával.

Ha a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké akkor elmerül, mert a felhajtóerő kisebb mint a test súlya. Ha a folyadék sűrűsége nagyobb, akkor a test egy része nem merül el, a test úszik.

Felhajtó erő - elmerülés

Amennyiben a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké: $\rho_t > \rho_f$
A test teljes térfogata a víz alá merül.

A felhajtó erő nagysága: $F_f = V\rho_f g$

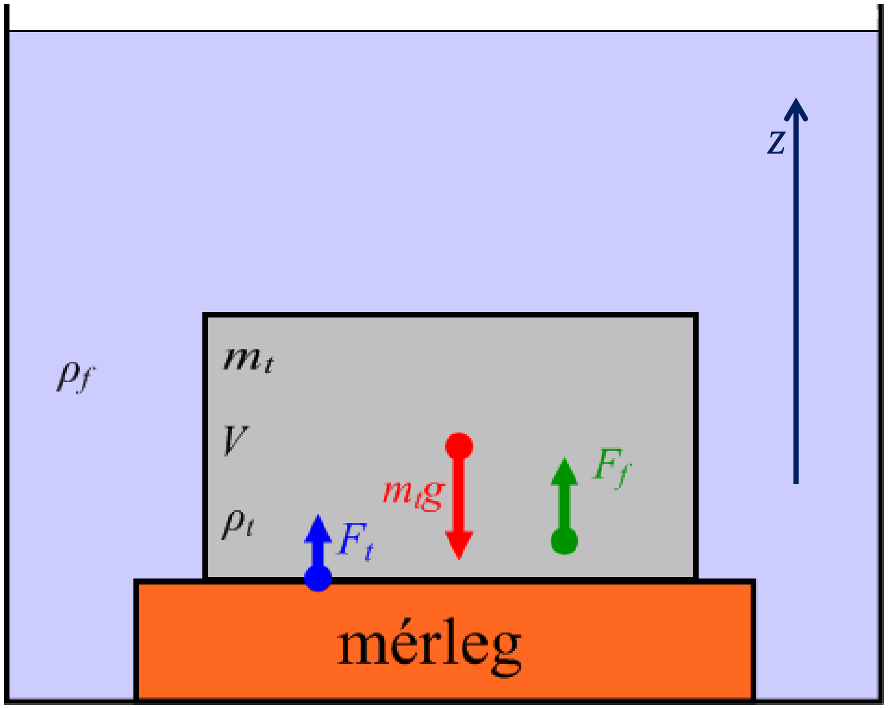
A test egyensúlyához egy tartó erő is szükséges, pl. egy mérleg a folyadék alján.

A test egyensúlyának feltétele: $F_e = 0$

$$F_f + F_t - m_t g = 0$$
$$V\rho_f g + F_t - V\rho_t g = 0$$

A szükséges tartó erő tehát (látszólagos súly):

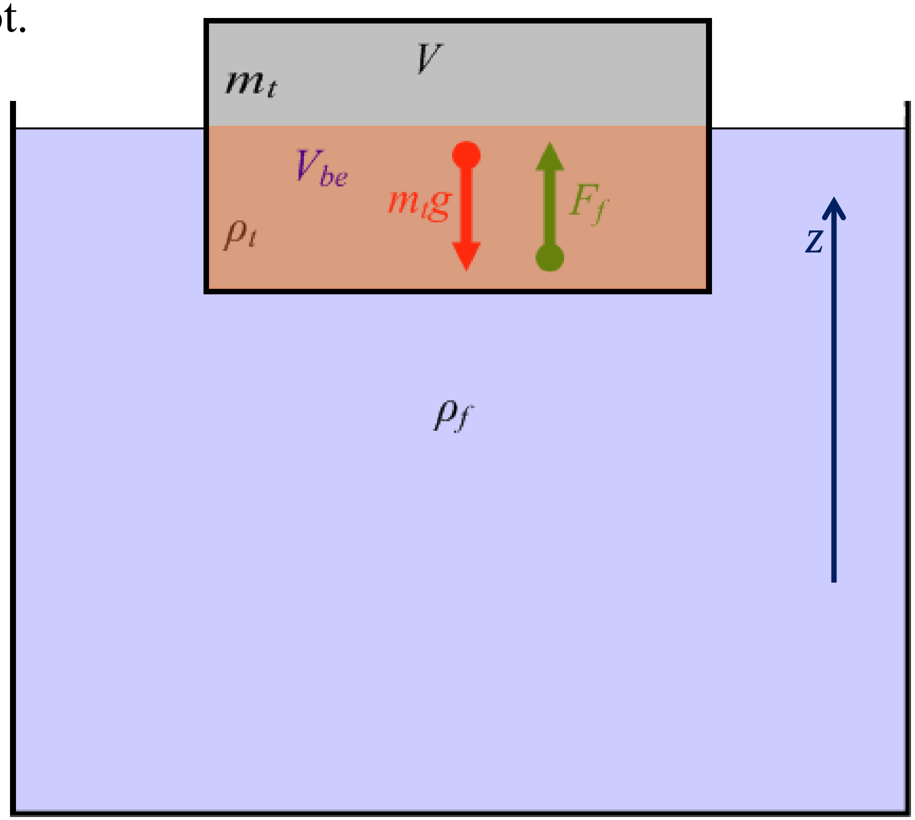
$$F_t = Vg(\rho_t - \rho_f)$$



Abban az esetben amikor a test és a folyadék sűrűsége megegyezik, a tartó erő nulla. Egy tetszőleges mélységbe helyezett test ekkor nyugalomban van, hiszen $F_f = m_t g$

Felhajtó erő - úszás

Amennyiben a V térfogatú test sűrűsége kisebb mint a folyadéké: $\rho_t < \rho_f$
A test egy része nem merül el.
Csak a bemerült rész (V_{be}) szorít ki folyadékot.



A felhajtó erő nagysága tehát: $F_f = V_{be} \rho_f g$

A test egyensúlyának feltétele: $F_e = 0$

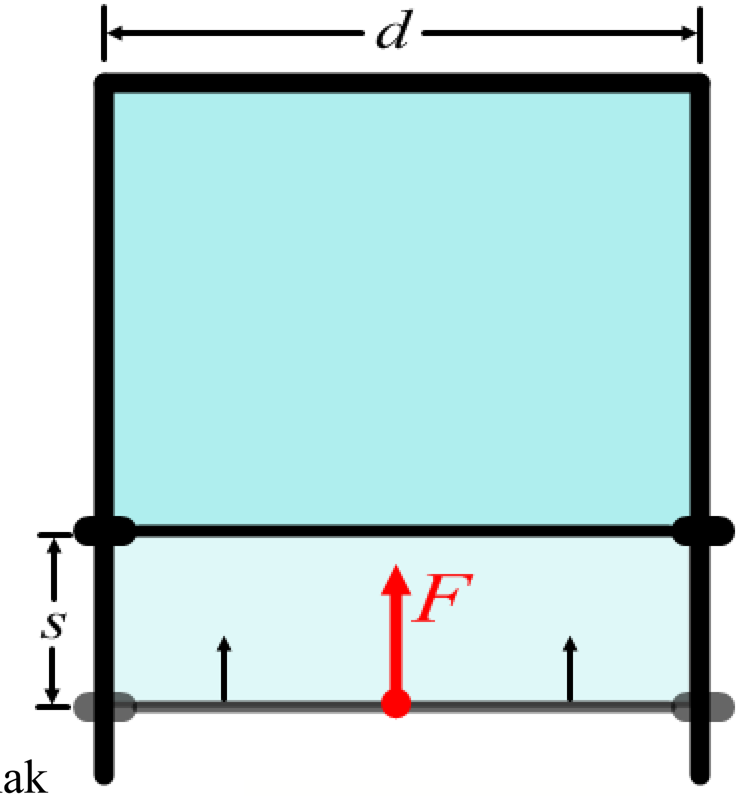
$$F_f - m_t g = 0$$

$$V_{be} \rho_f g = V \rho_t g$$

$$\frac{V_{be}}{V} = \frac{\rho_t}{\rho_f}$$

A test bemerülő részének térfogata úgy aránylik annak teljes térfogatához, mint a sűrűsége a folyadék sűrűségéhez.

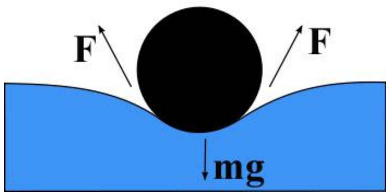
Felületi feszültség

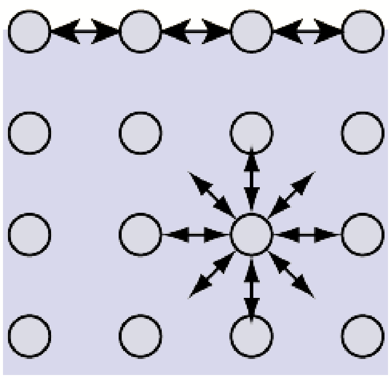


Mosószeres vízbe mártott drótkeret oldalaira a kifeszült hártya összehúzó erőt fejt ki.
Az alsó *d* hosszúságú oldalra:

$F = 2\alpha d$ ahol α a **felületi feszültség**.
A kettes szórzó az elülső és hátulsó felületek miatt van (2 felület).

Ha az alsó oldal egy mozgatható rúd, amely s távolságot mozdul felfelé, a felület megváltozása:
$\Delta A = -2ds$ (2 oldal továbbra is)
A szappanhártya erejének munkája pedig:
$W = Fs = 2\alpha ds = -\alpha \Delta A$
Mivel a munka a felületváltozással arányos, a folyadéknak a felületével arányos energiája van:
$E = \alpha A$
Ennek oka a molekulák közötti vonzó kölcsönhatásban rejlik.
A felületet igyekszik a folyadék minimalizálni: csepp alakja





Tömegmegmaradás

A **hidrodinamika** a folyadékok, mint kontinuumok áramlását leíró tudományág.

Kétféle tárgyalásmód:

1. Lagrange-módszer: az egyes kiszemelt folyadékrészekre a Newton féle mozgásegyenletet írjuk fel, és a kezdeti feltételeket használva megoldjuk.

2. Euler-féle leírás: a különböző pontokban az ott áramló folyadék tulajdonságait mérjük (pl. sebesség, nyomás, sűrűség).
Ha ezek időben állandóak minden pontban, akkor **stacionárius** áramlásról beszélünk.

Kontinuitási egyenlet: A tömeg megmaradó mennyiség, nem keletkezik, és nem tűnik el.
Tekintsünk egy nyugvó *V* térfogatot, amelyet az *A* zárt felület határol. A *dt* idő alatt a *dA* elemi felületdarabon kiáramló tömeg: $dm = \rho dV = \rho dA v \cos\alpha \, dt = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} dt$
Tehát időegység alatt: $\frac{dm}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$

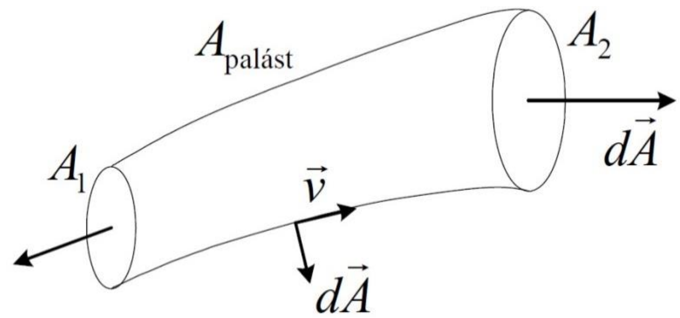
A *V* térfogatból a teljes *A* felületen keresztül időegység alatt kiáramló tömeg megegyezik a térfogatban lévő tömeg csökkenésével (negatív deriváltjával):

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Kontinuitási egyenlet

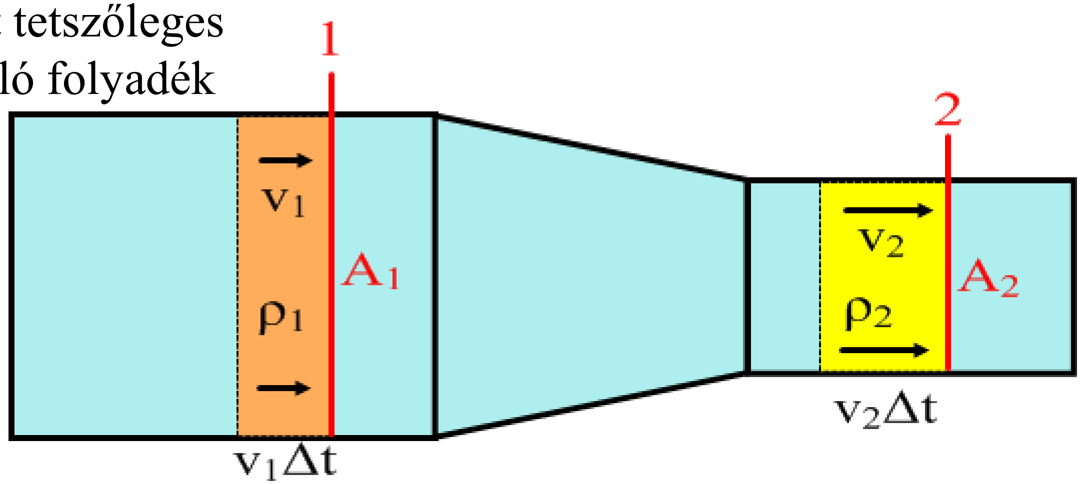
Stacionárius (időben állandó) áramlás: Minden idő szerinti derivált nulla.

$$0 = \oint_A \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} + \int_{A_p} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$$



A palástra vett integrál nulla, mert a sebesség párhuzamos a felülettel. Tehát a két végen történő be- és kiáramlás ki kell, hogy ejtse egymást.

Ennek eredménye, hogy egy cső két tetszőleges helyén a keresztmetszeteken átáramló folyadék tömege megegyezik.



Az A_1 és A_2 keresztmetszetű helyekre Δt idő alatt:

$$m_1 = m_2$$
$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$
$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ a **tömegáram** ugyanaz a cső mentén.

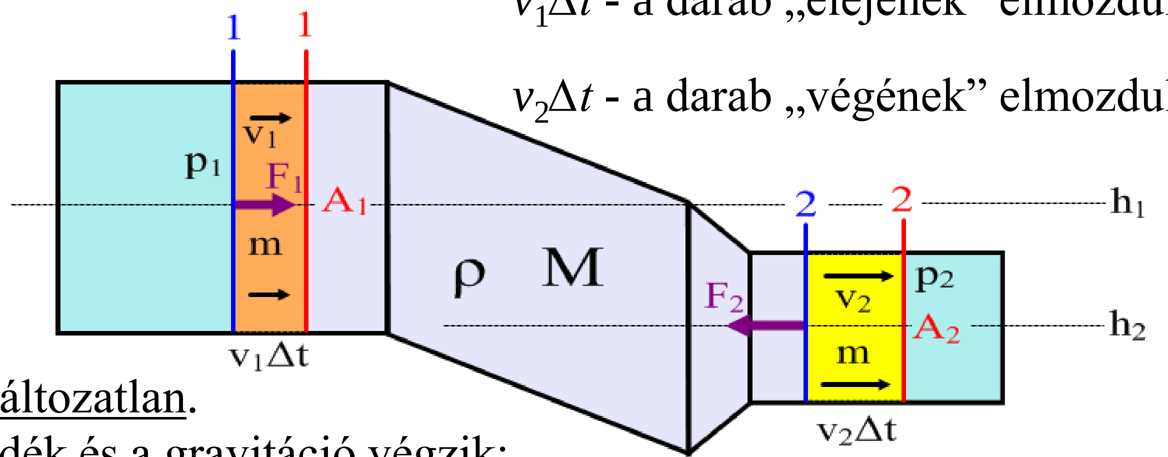
Összenyomhatatlan folyadékra ($\rho_1 = \rho_2$): $A_1 v_1 = A_2 v_2$ a **térfogatáram** is ugyanaz a cső mentén.

Bernoulli egyenlet

Alkalmazzuk a $W = \Delta E_K$ munkatételt a h_1 magasságban lévő A_1 keresztmetszetű rész és a h_2 magasságban lévő A_2 keresztmetszetű rész között az $m + M$ tömegű összenyomhatatlan ρ sűrűségű folyadékdarabra, stacionárius áramlás esetén. Kis Δt idő alatt:

$v_1\Delta t$ - a darab „elejének” elmozdulása

$v_2\Delta t$ - a darab „végének” elmozdulása



Az M tömegű közbülső rész <u>változatlan</u>.
A munkát a szomszédos folyadék és a gravitáció végzik:

$$W = W_f + W_g = F_1v_1\Delta t - F_2v_2\Delta t + mg(h_1 - h_2) = p_1A_1v_1\Delta t - p_2A_2v_2\Delta t + mg(h_1 - h_2) =$$
$$= p_1\Delta V - p_2\Delta V + \rho\Delta V g(h_1 - h_2) = \Delta V(p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2)$$

A kinetikus energia megváltozása: $\Delta E_K = E_{K2}(m) + E_K(M) - E_{K1}(m) - E_K(M)$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \Delta V\left(\frac{1}{2}\rho v_2{}^2 - \frac{1}{2}\rho v_1{}^2\right)$$

Tehát:

$$p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho v_2{}^2 - \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 \to \boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2{}^2 + \rho g h_2}$$

Bernoulli egyenlet - Példa

Milyen sebességgel folyik ki egy vödör alján fúrt lyukon a víz, ha a vödörben *h* magasságig van víz?

Feltételezve, hogy a vízszint nagyon lassan csökken: $v_1 \approx 0$

A Bernoulli-egyenletet felhasználva:

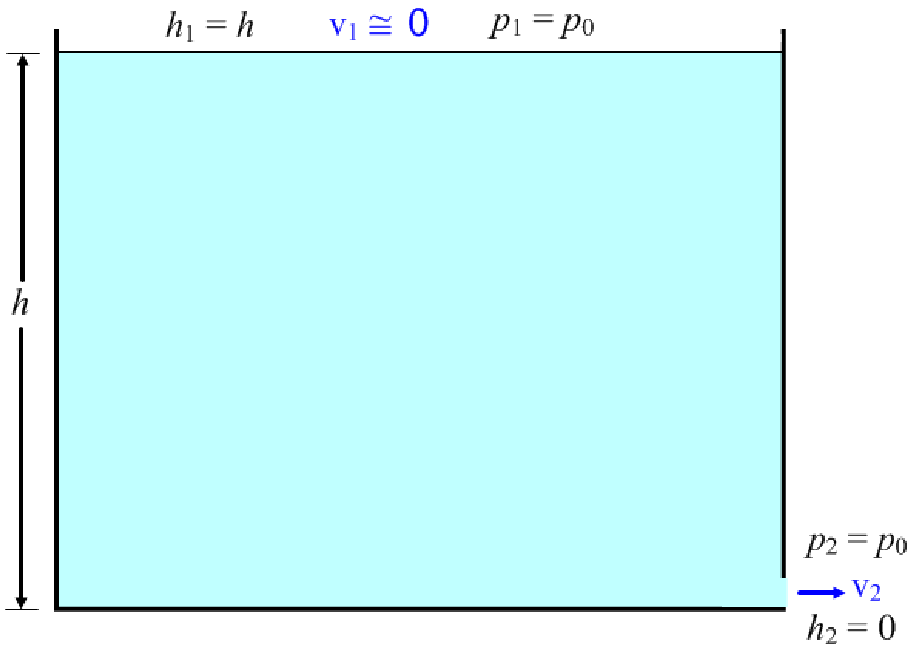
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g h_2$$

$$p_0 + 0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + 0$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

$$2gh = {v_2}^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$



A sebesség megegyezik azzal, amit egy *h* magasságból szabadon eső test érne el.