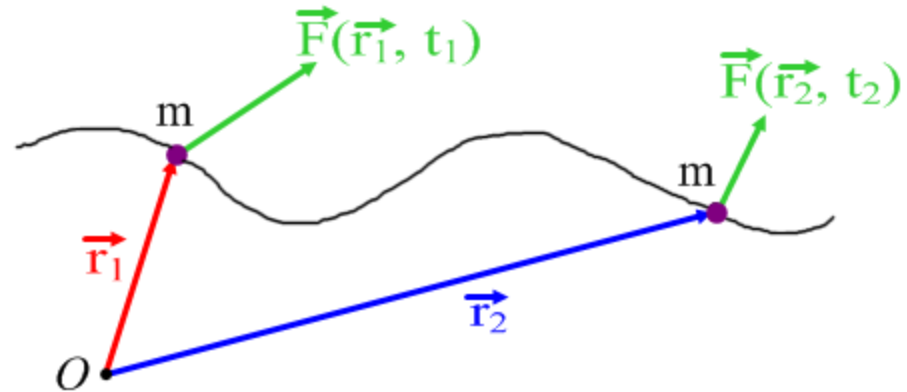


# Fizikai mező (erőtér)

**Fizikai mező:** Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.

Tehát az  $\vec{r}$  és  $t$  az erő vektorfüggvény változói:  $\vec{F}(\vec{r}, t)$



- Az erőter lehet időtől független (**stacionárius**), tehát  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$ .

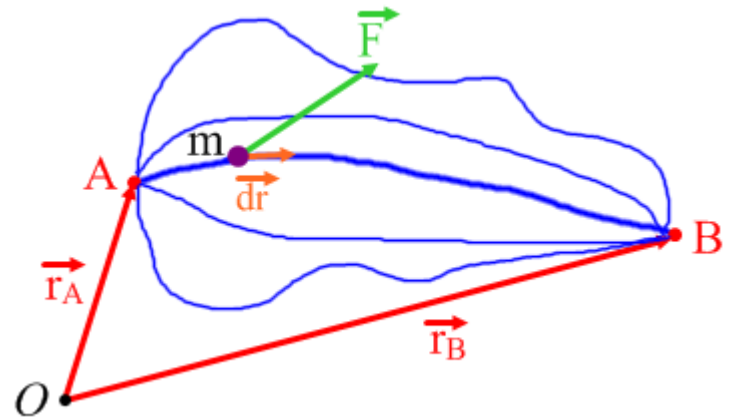
Ekkor az erő csak a helytől függ:  $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőter lehet helytől független (**homogén**), tehát  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$

Ekkor az erő csak az időtől függ:  $\vec{F}(t)$

# Konzervatív erőterek

**Konzervatív erőtér:** Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

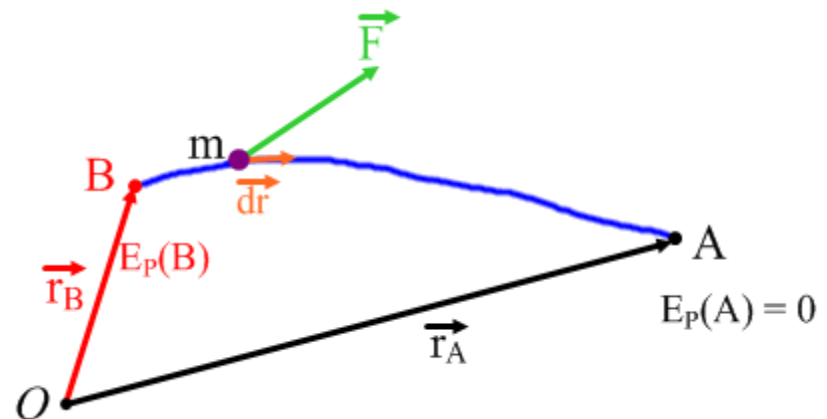


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

## **Potenciális (helyzeti) energia:**

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a **tér** végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_p(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



## Példa: súlyerő munkája

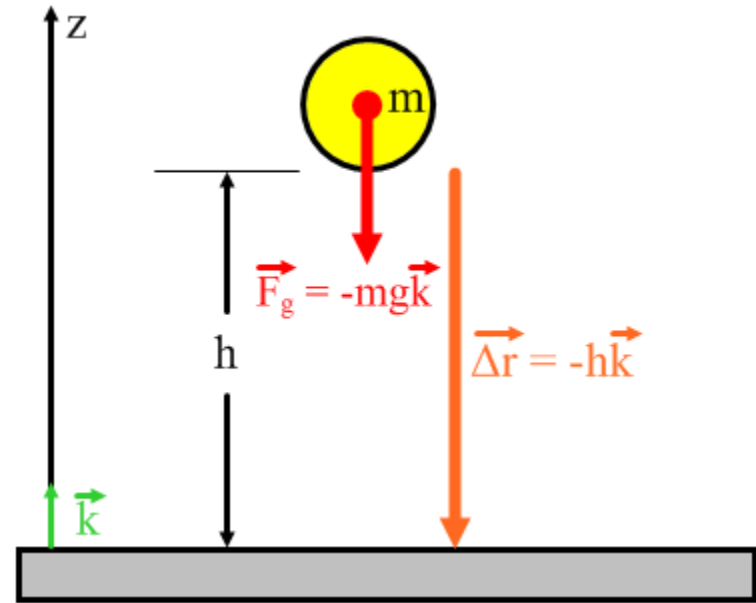
Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy  $F_g = 20\text{N}$  súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$\begin{aligned} E_P(h) &= W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^0 (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) = \\ &= \int_h^0 -mg dz = -mg[z]_h^0 = mgh \end{aligned}$$

Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a  $W = Fs$  képlet is, tehát a  $W = (mg)h = mgh$  egyből látható.

vagyis esetünkben:  $W = (20\text{N})(80\text{m}) = 1600\text{J}$



# Az energiaminimum elve

Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.  
Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

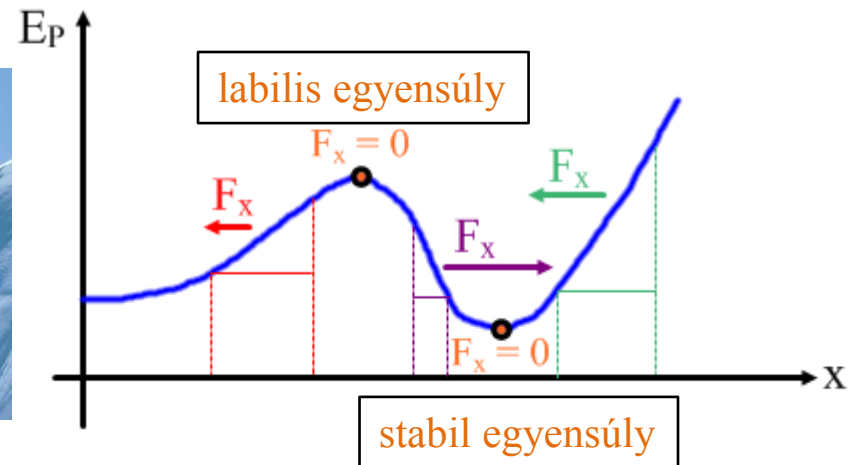
Homogén erőter esetén (illetve az átlagos erőt számolva) egy dimenzióban:  $F_x = -\frac{\Delta E_P}{\Delta x}$

Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban:  $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

**Energiaminimum elve**: Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).

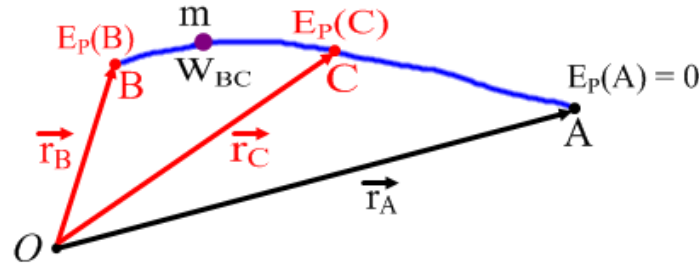
Három dimenzióban:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \\ &= -\frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{k} = \\ &= -\nabla E_P = -\text{grad} E_P\end{aligned}$$



# Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test  $B$ -ből  $C$ -be mozdul.



Ekkor bármely  $B$  és  $C$  pontokra:  $E_P(B) - E_P(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_P = W_{BC} = \Delta E_K$$

Ennek az egyenletnek a differenciális alakja:  $-dE_P = \delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dE_K$

Tehát az **elemi munka a potenciális energia teljes differenciálja**.

Az eredeti egyenletet átrendezve:  $E_P(B) + E_K(B) = E_P(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_P + E_K$$

Ez a mechanikai energia konzervatív erőterben megmarad:  $E_M(B) = E_M(C)$

# Nem konzervatív erők munkája

Amikor **nem konzervatív** erők ( $nk$ ) is hatnak (pl. súrlódás, közegellenállás, emberi munka) a tömegpontra:

$$W_{BC} = W_{BC}^k + W_{BC}^{nk} = E_K(C) - E_K(B)$$

Ahol:  $W_{BC}^k = E_P(B) - E_P(C)$  a konzervatív erő munkája.

Átrendezve a nem konzervatív erők munkájára, és behelyettesítve:

$$W_{BC}^{nk} = E_K(C) - E_K(B) - E_P(B) + E_P(C)$$

$$W_{BC}^{nk} = E_K(C) + E_P(C) - E_P(B) - E_K(B)$$

Mivel:  $E_K(C) + E_P(C) = E_M(C)$  és  $E_P(B) + E_K(B) = E_M(B)$

$$W_{BC}^{nk} = E_M(C) - E_M(B)$$

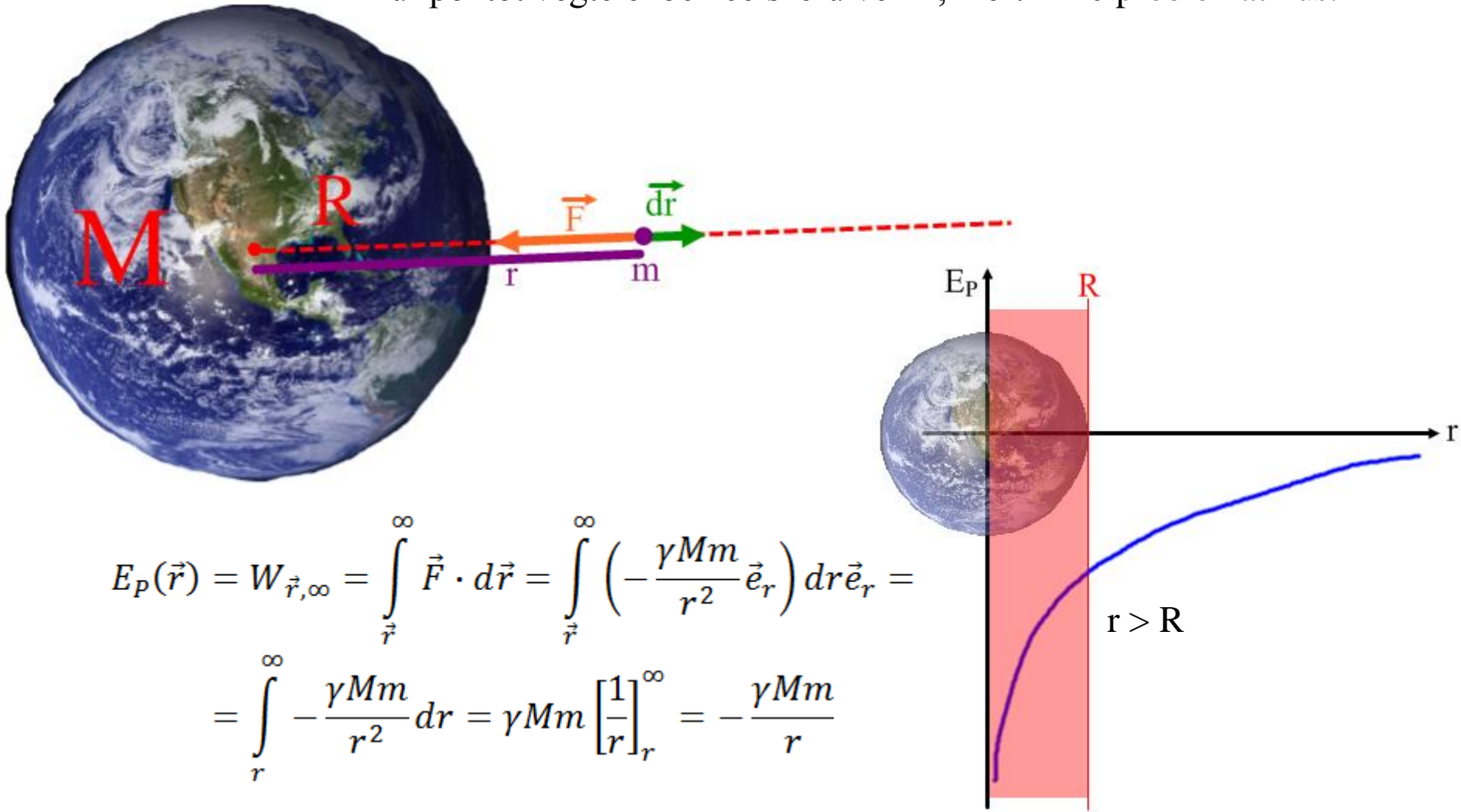
Tehát a nem konzervatív erők munkája egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.

Példák konzervatív erőterekre

# Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben

Legyen a  $M$  tömegű test rögzítve, és tőle  $r$  távolságban kiszámoljuk a  $m$  tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert  $r = 0$  problematikus.



$$\begin{aligned} E_p(\vec{r}) &= W_{\vec{r}, \infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left( -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r \right) dr \vec{e}_r = \\ &= \int_r^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[ \frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r} \end{aligned}$$

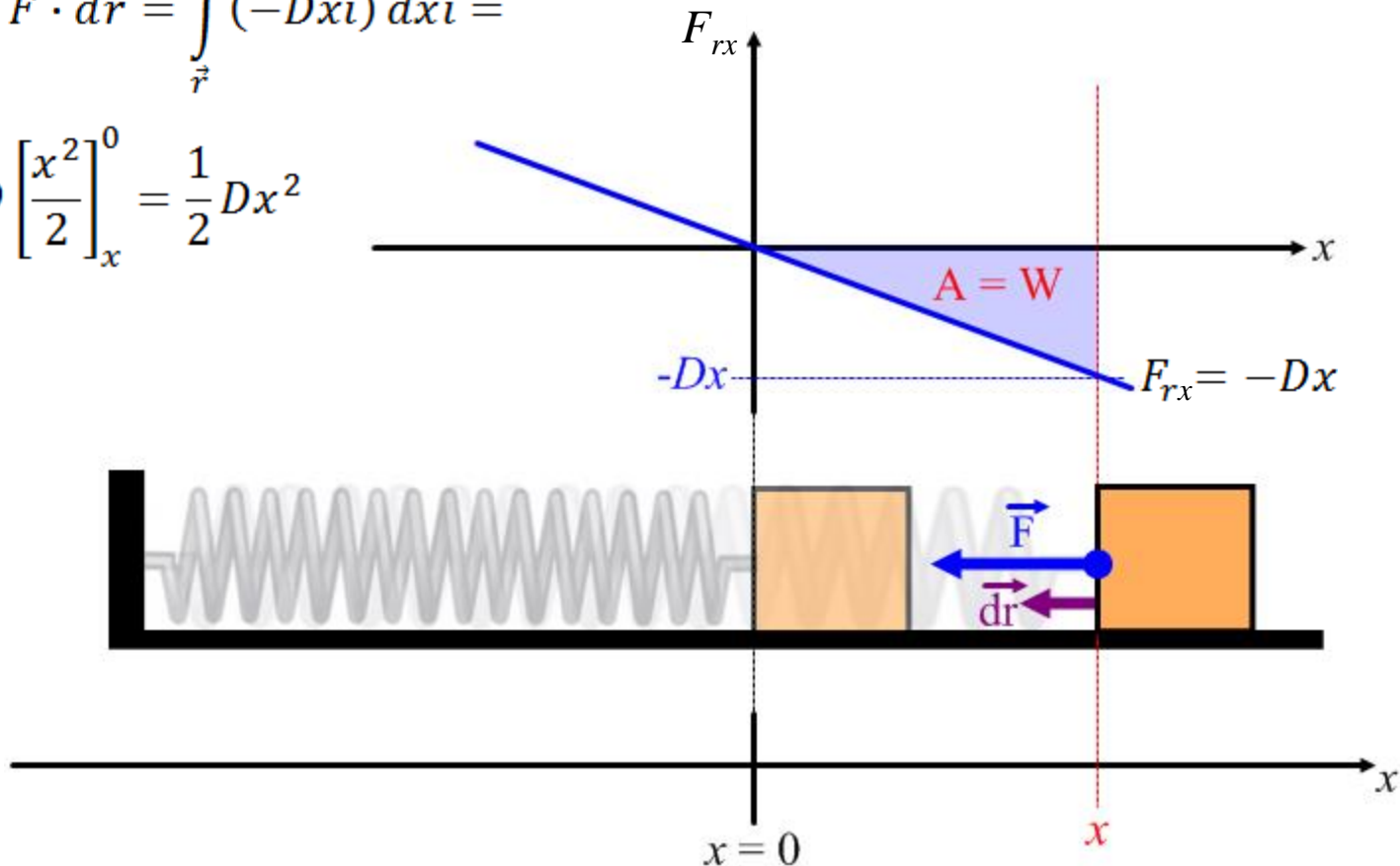


# Rugóerő potenciális energiája

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.  
Ez konzervatív erőteret eredményez.

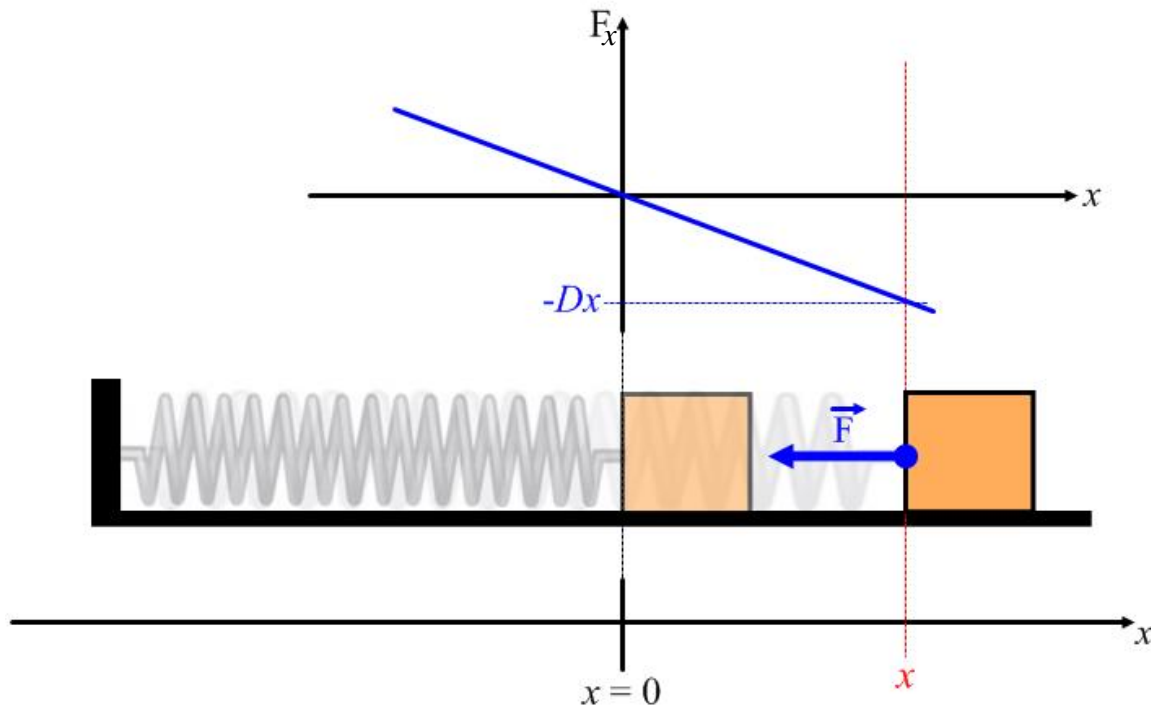
Az  $x$  hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$E_P(x) = W_{\vec{r},0} = \int_{\vec{r}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^0 (-Dx\vec{i}) dx\vec{i} =$$
$$= \int_x^0 -Dx dx = -D \left[ \frac{x^2}{2} \right]_x^0 = \frac{1}{2} Dx^2$$



# Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

**Harmónikus rezgés:** Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen:  $F_x = -Dx$  (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóhoz rögzített test (ha minden más erő elhanyagolható vagy kiegyenlíti egymást, esetleg konstans, mint pl. a súlyerő).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás  
(mozgástörvény):

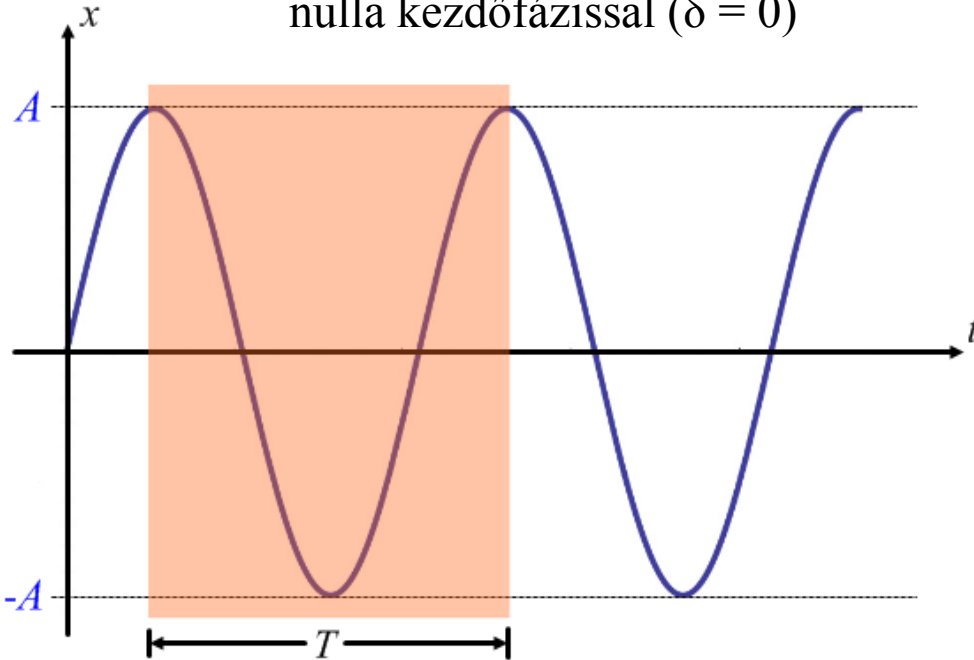
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket

- A: amplitúdó (maximális kitérés)
- $\delta$ : kezdőfázis
- $\omega$ : körfrekvencia (lásd később)

# Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,  
nulla kezdőfázissal ( $\delta = 0$ )



$$x(t) = x(t + T)$$

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{körfrekvencia}$$

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a  
sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a  
gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk:  $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra:  $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt:  $a_x = -\frac{D}{m} x$

$$\text{Tehát: } \omega^2 = \frac{D}{m}$$

# Kinetikus és potenciális energia

**Kinetikus energia:** A sebesség-idő függvényt felhasználva ( $\delta = 0$ )

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

**Potenciális energia:** A kitérés-idő függvényt felhasználva ( $\delta = 0$ ) – rugalmas erőter

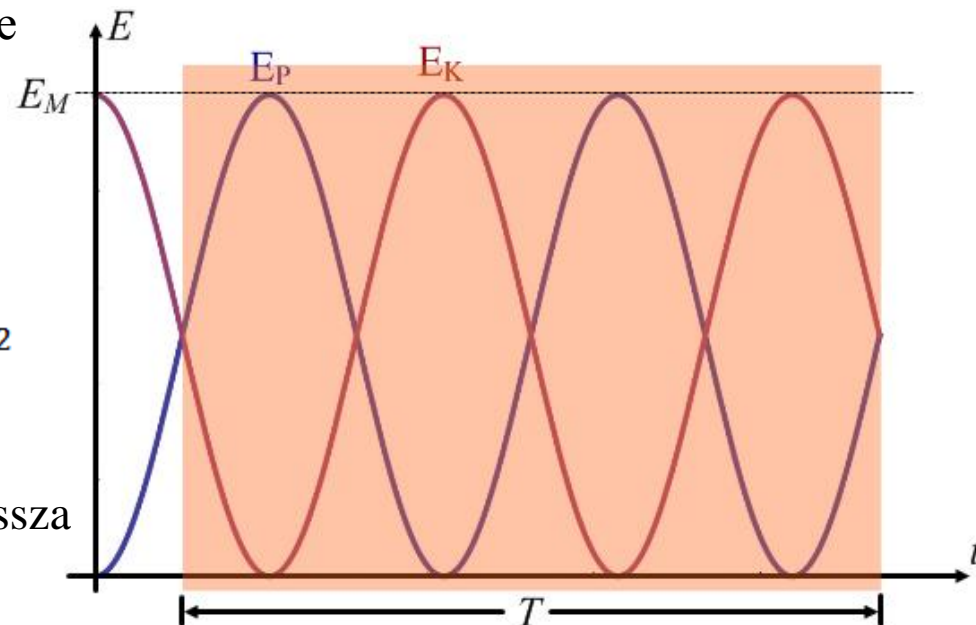
$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

**Mechanikai energia:**

A potenciális és a kinetikus energia összege

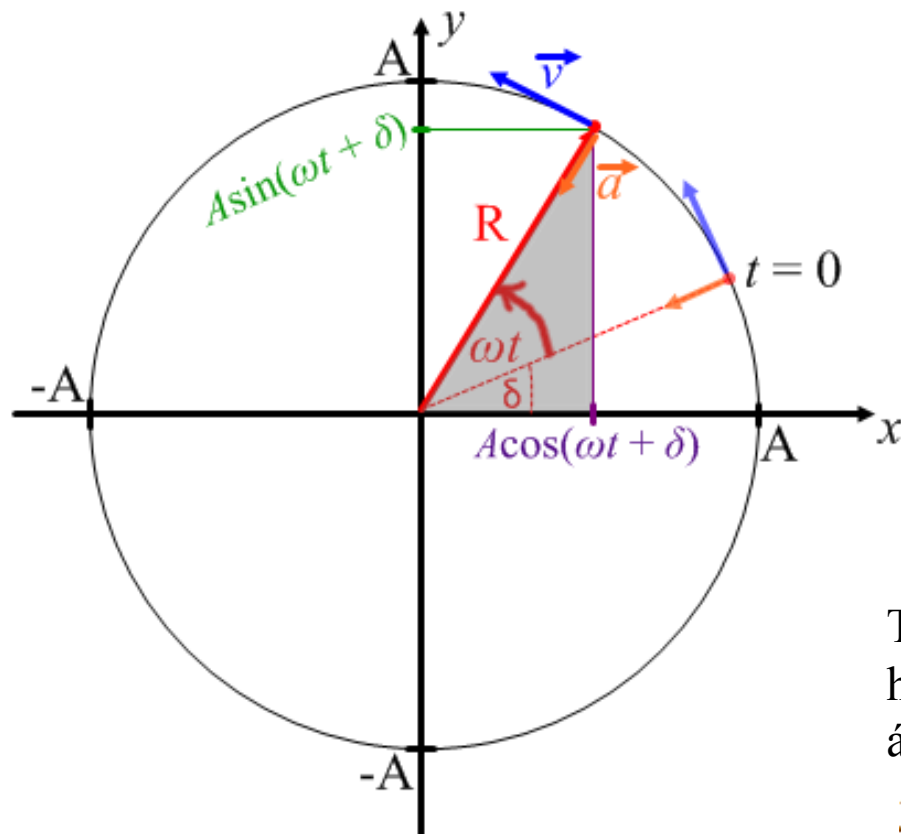
$$\begin{aligned} E_M &= E_K + E_P \\ &= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2 \end{aligned}$$

A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.



# Egyenletes körmozgás és harmonikus rezgés kapcsolata

Körmozgás esetén mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.



$T$ : keringési vagy periódusidő

$\omega$ : szögsebesség vagy körfrekvencia

Felhasználva a kapcsolatot:

$$R = A$$

$$v_{ker} = R\omega = A\omega = v_{max}$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 A = a_{max}$$

Tehát a körmozgás két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás összetevéseként áll elő:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) = A \sin\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Hogy körmozgás legyen az eredmény, frekvenciák és amplitúdók meg kell egyezzenek, fáziskülönbség pedig  $\pi/2$  kell legyen. [ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

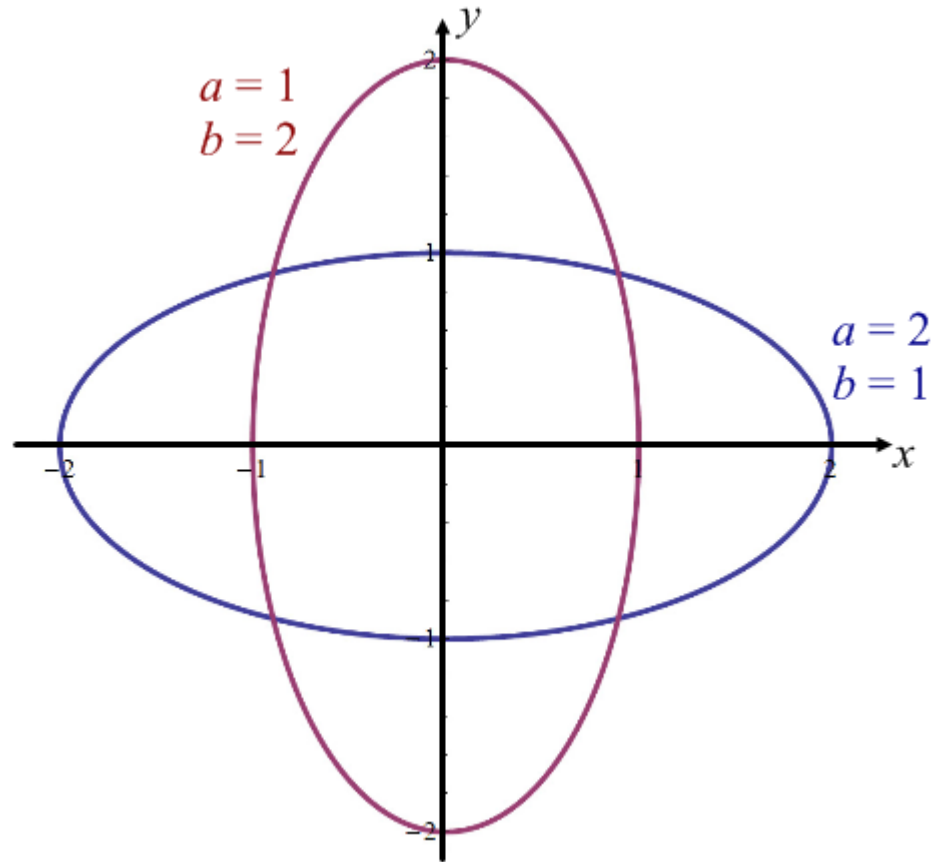
# Merőleges rezgések összetevése (többi eset)

## Eltérő amplitúdók, $\pi/2$ fáziskülönbség

A két merőleges kitérésre: 
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \sin(\omega t) \end{array} \right\} \frac{x}{a} = \cos(\omega t) \text{ és } \frac{y}{b} = \sin(\omega t)$$

Tehát: 
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

**frekvenciák azonosak**

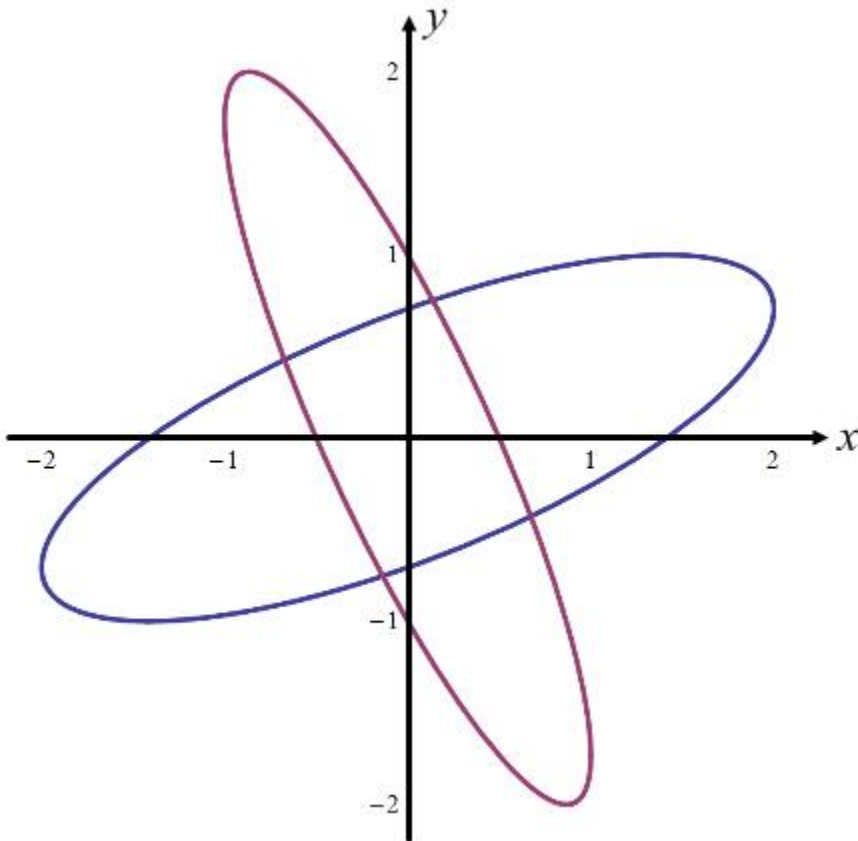


# Tetszőleges fáziseltérés

Abban az esetben, ha a frekvenciák azonosak, az amplitúdók nem, és a fáziseltérés bármi:  
A mozgás továbbra is **ellipszis** alakú:

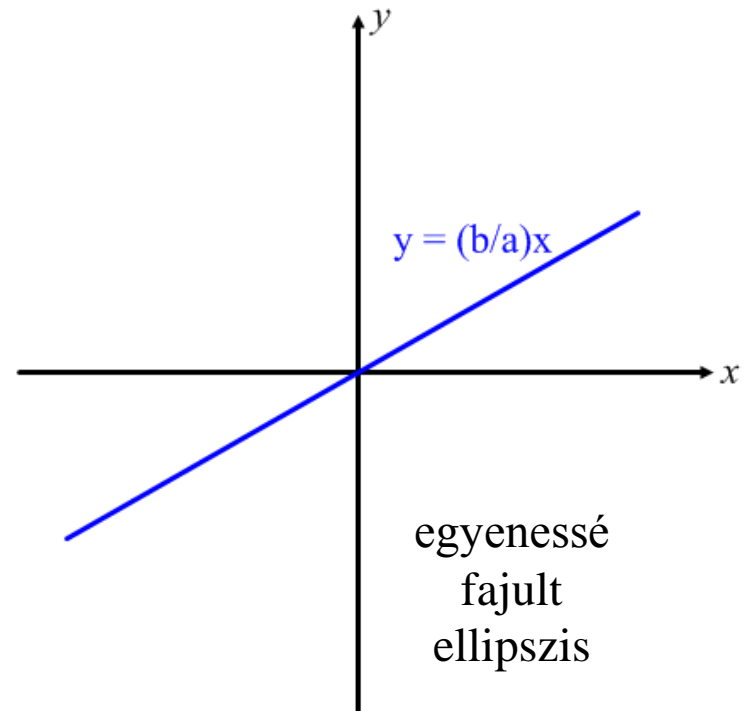
viszont torzul és elfordul

$-5\pi/6$  illetve  $-\pi/4$  fáziskülönbség



másik speciális eset: 0 fáziskülönbség  
(vagy  $\pi$ )

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = a \sin(\omega t) \\ y(t) = b \sin(\omega t) \end{array} \right\} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \rightarrow y = \frac{b}{a} x$$





# Lissajous-görbék

Teljesen általános eset: A frekvenciák sem egyeznek meg.

A mozgás **periodikus**, ha a frekvenciák aránya **racionális**

pl.  $1/2$  vagy  $1/3$

(y:  $-\pi/2$  fáziskülönbség)

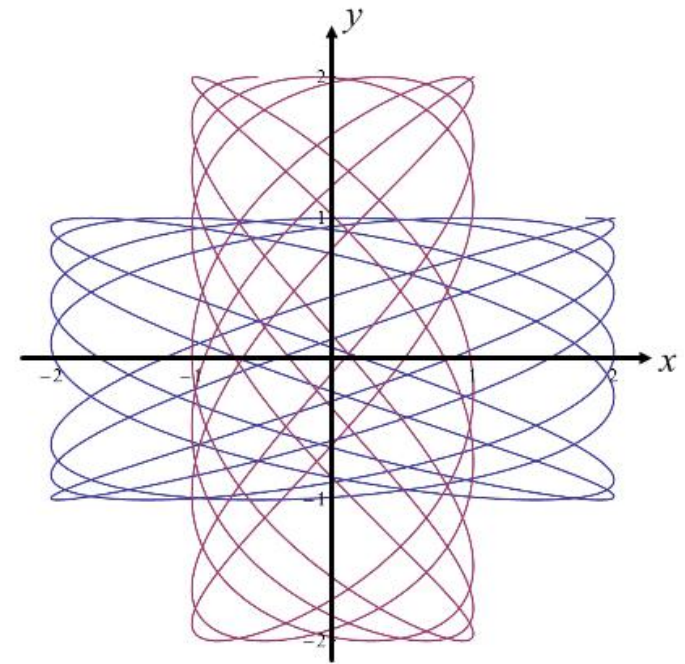
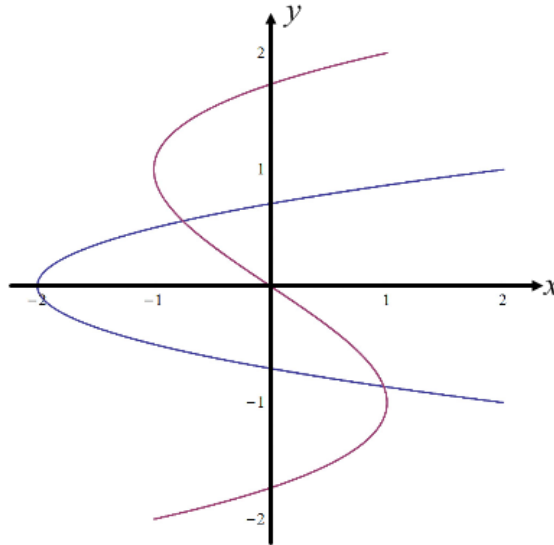
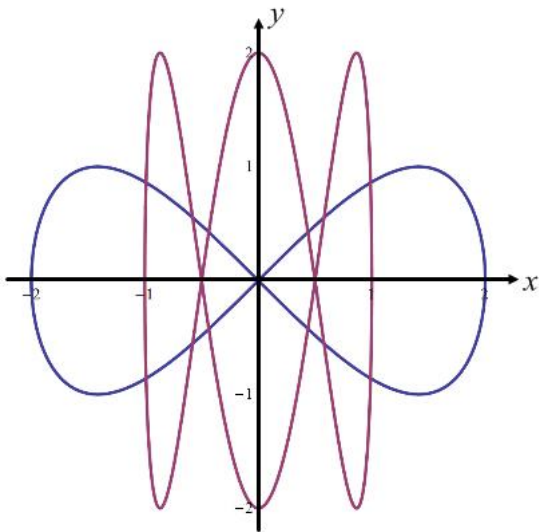
$2$  vagy  $3$

(0 fáziskülönbség)

Ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor soha nem zárul a görbe, a mozgás nem periodikus (ismétlődő). pl.

(0 fáziskülönbség)

$\sqrt{2}$  és  $\sqrt{3}$



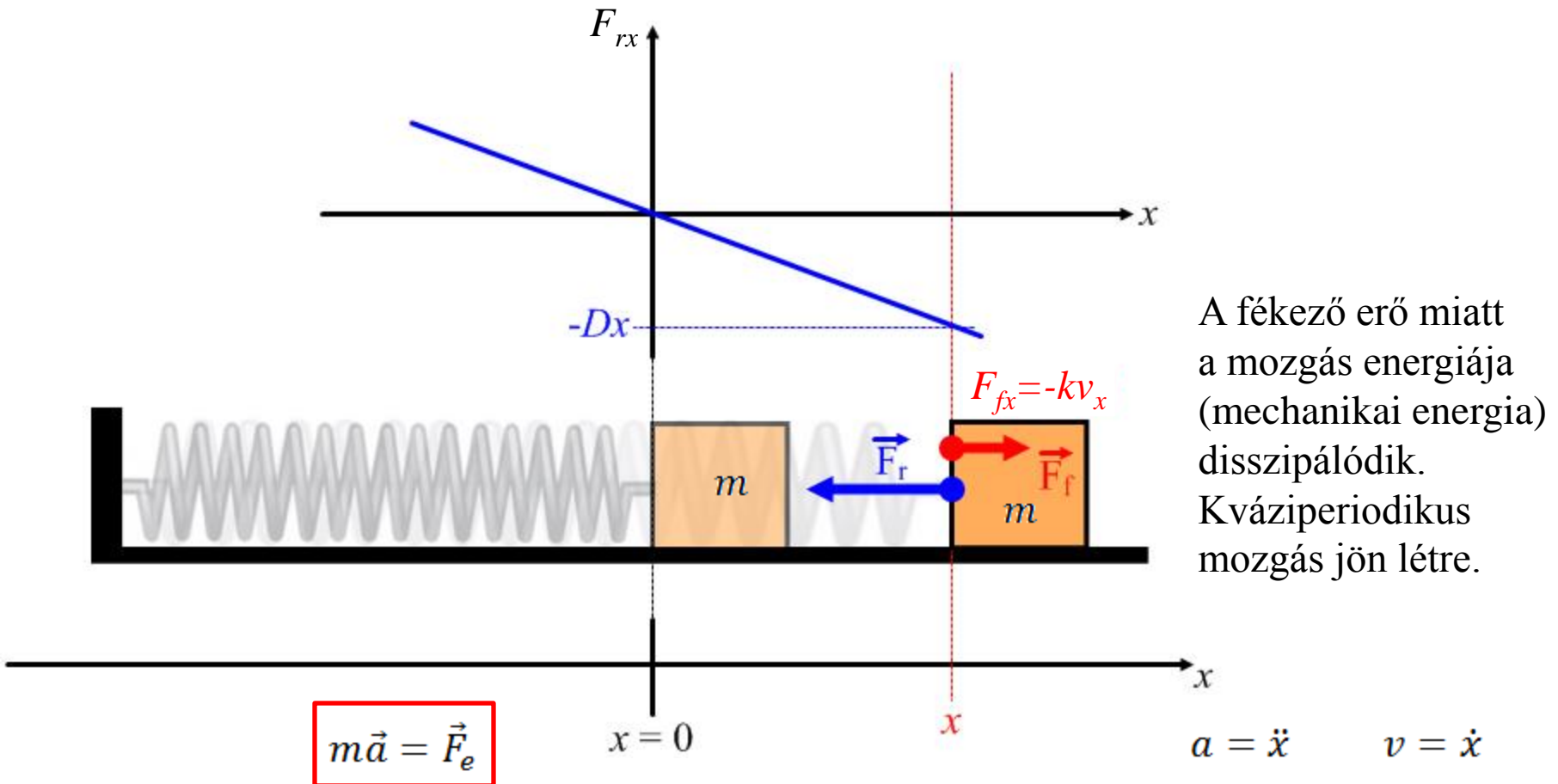
a pálya ismétlődő görbét alkot  
a periódusidők legkisebb közös többszöröse múlva

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

a pálya sohasem ismétlődik  
(teljesen besatírozná...)

# Csillapított rezgés

**Csillapított rezgés:** A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak. A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A fékező erő miatt a mozgás energiája (mechanikai energia) disszipálódik. Kváziperiodikus mozgás jön létre.

A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás  $x$  mentén):  $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

# Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből :  $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \alpha = \frac{k}{2m} \quad \alpha - \text{a csillapítási tényező}$$

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális:  $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve:  $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$  és  $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet:  $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$

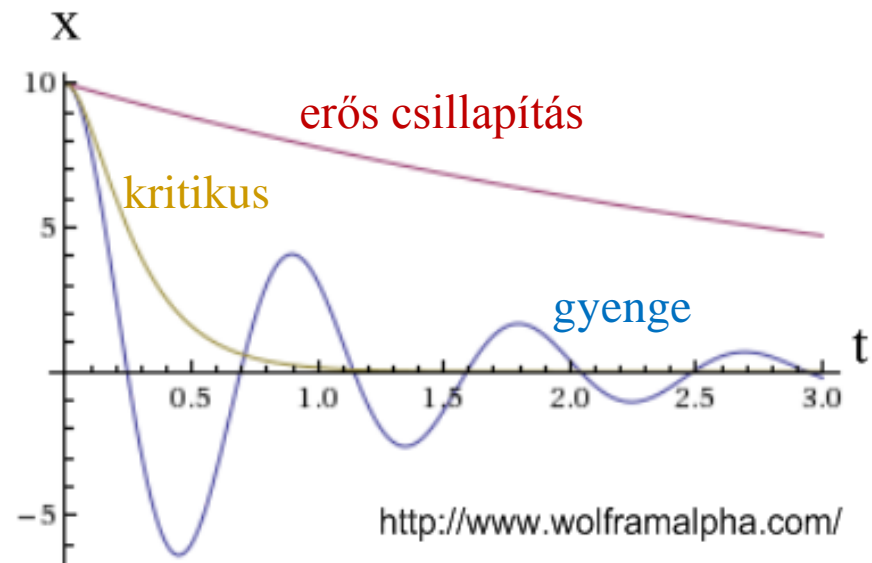
Megoldásai:  $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás:  $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

2. kritikus csillapítás:  $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$

3. erős csillapítás:  $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$



# Gyengén csillapított rezgés

$$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta)$$

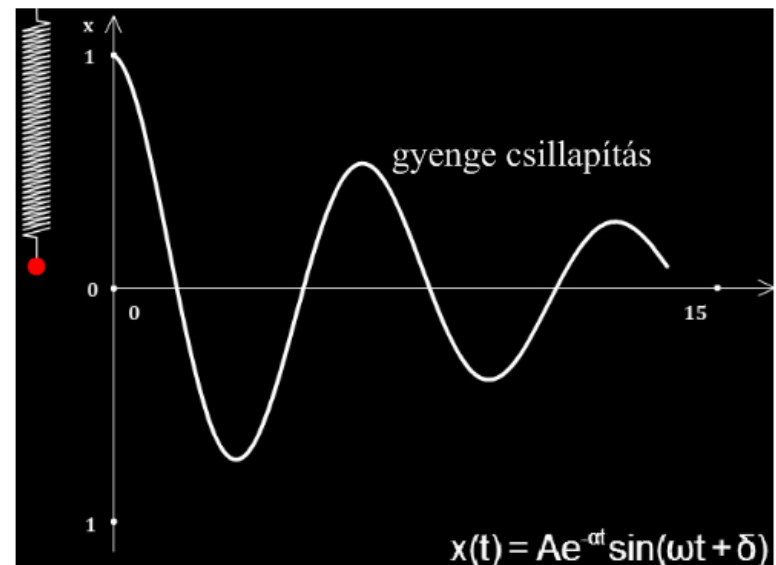
Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta) + \omega Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta)$$

A  $C$  és  $\delta$  konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.

Pl.  $x(0)$  és  $v(0)$  megadható, és a két egyenletet megoldva a konstansok kiszámolhatók.

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)



# Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0\sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.

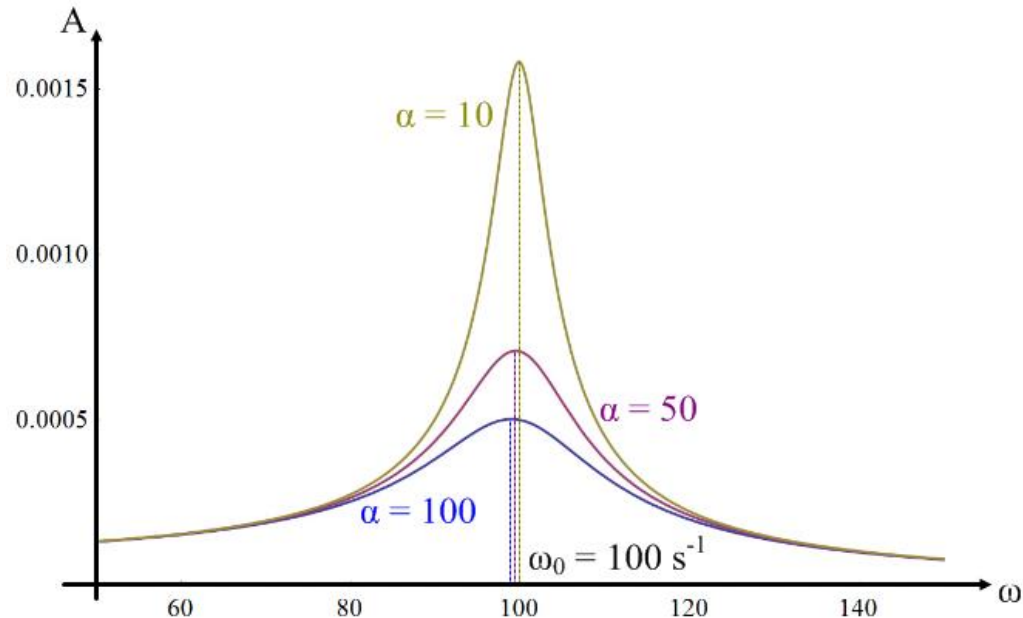
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{sajátfrekvencia}$$

$\delta - \text{fáziskésés}$

Rezonancia: Az az  $\omega_r$  körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.

Ha a csillapítás gyenge ( $\alpha$  kicsi), akkor  $\omega_r \approx \omega_0$  és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik...) – rezonancia katasztrófa.



# Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.

Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)

A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** ( $c$ ).

Ez határozza meg milyen időközés van a két távoli pont rezgése között.

Tekintsünk egy  $x$  irányban terjedő síkhullámot (vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).

A rezgés az  $x = 0$  helyen a szokásos harmonikus függvény:  $y(t) = A \sin(\omega t)$

Ehhez képest az  $x$  helyen a rezgés  $x/c$  idővel késik:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \sin \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right) \\ &= A \sin \left( \omega t - \frac{2\pi x}{Tc} \right) = A \sin \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = A \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

$T$ : a rezgés **periódusideje**     $\omega$ : a rezgés **körfrekvenciája**     $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

$\lambda$ : a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út)     $\lambda = Tc$

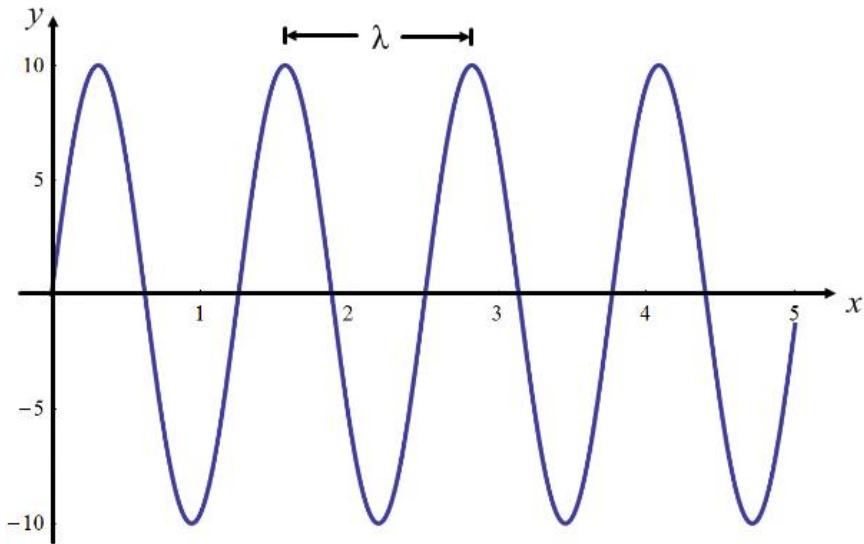
$k$ : **körhullámszám**     $k = 2\pi/\lambda$

Mivel:  $T = 1/f$  ezért  $c = \lambda f$

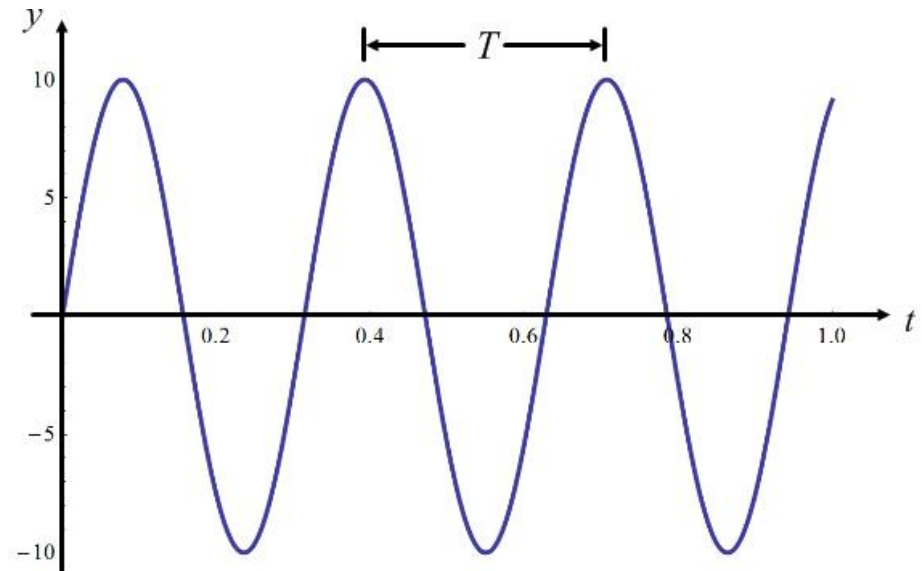


# Hullámok: hely és időfüggés

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény:  $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$

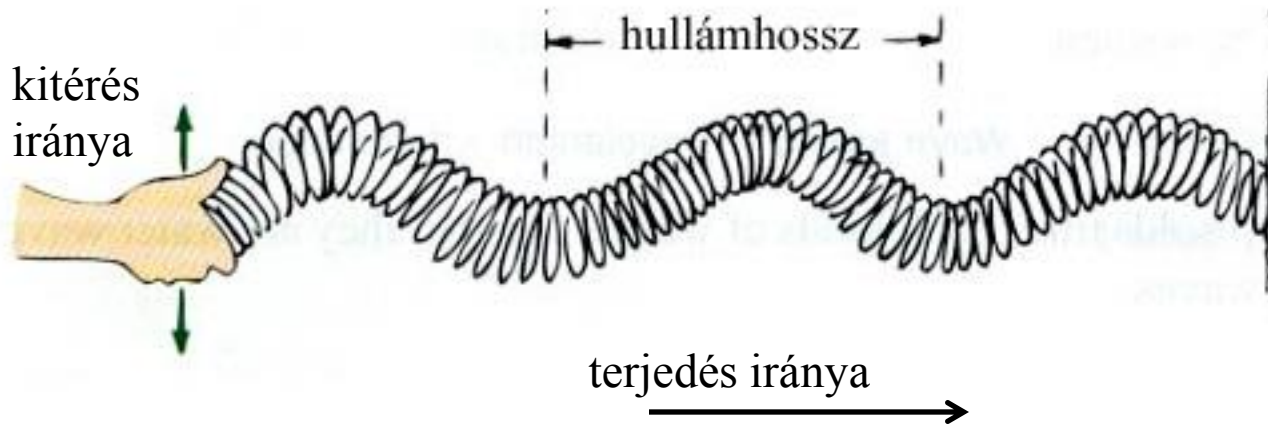


A térbeli periodicitás a hullámhossz  
(adott időbeli pillanatkép)

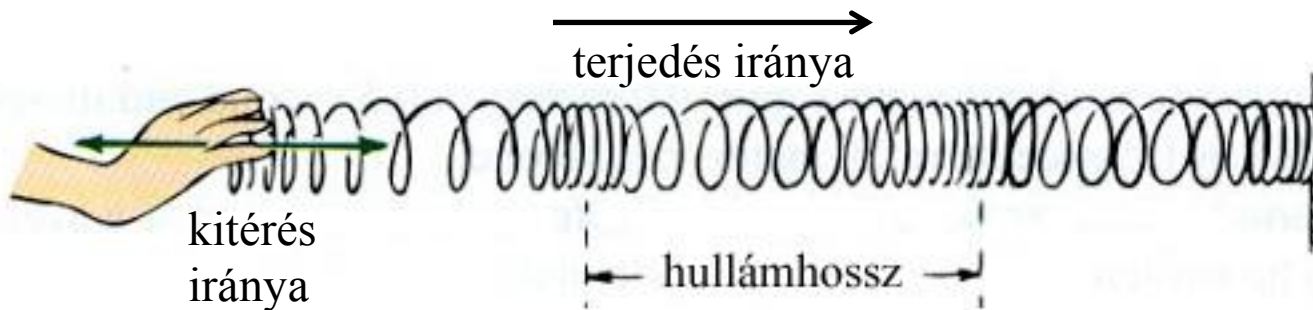


Az időbeli periodicitás a periódusidő  
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

# Transzverzális és longitudinális hullámok



**transzverzális hullám:**  
a kitérés merőleges a terjedési irányra



**longitudinális hullám:**  
a kitérés párhuzamos a terjedési irányal

a hang is  
longitudinális  
hullám  
(20Hz – 20kHz)

