

# Soros $RLC$ kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

A kondenzátor töltése és az áramerősség közötti kapcsolat:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad \text{és} \quad i = \dot{Q}$$

Ezzel a huroktörvény egyenlete átrendezve:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Ez szerkezetét tekintve ugyanolyan mint a gerjesztett mechanikai rezgés mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = F_0 \cos \omega t$$

A megfelelő mennyiségek:

$$x \rightarrow Q$$

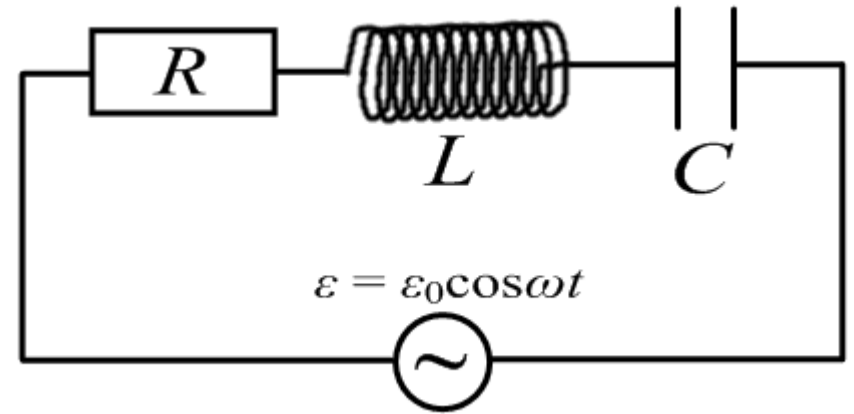
$$m \rightarrow L \text{ (tehetetlenség)}$$

$$b \rightarrow R \text{ (csillapítás)}$$

$$D \rightarrow 1/C \text{ (rúgóállandó)}$$

$$\varepsilon_0 \rightarrow F_0 \text{ (gerjesztés csúcsértéke)}$$

$$\alpha = \frac{b}{2m} \rightarrow \frac{R}{2L} \text{ (csillapítási tényező)}$$



[LÁSD VIDEÓ IDEKATTINVA!](#)

Ez alapján a rezonancia körfrekvenciára várjuk:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

# Differenciálegyenlet soros *RLC* kör esetén

A másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Ennek általános megoldása a homogén egyenlet (a jobb oldal zérus, lásd csillapodó rezgések) általános megoldása és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként írható fel:  $Q_{inh.ált.} = Q_{hom.ált.} + Q_{inh.part.}$

A homogén egyenlet általános megoldása időben lecseng. Elegendően hosszú idő után, a tranziens jelenségeket követően, a megoldást az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása szolgáltatja. Ezt a megoldást keressük  $Q(t)$  formájában:

Az eredeti egyenlet mellé felvesszünk egy segédegyenletet is, fizikai jelentés nélkül:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$L\ddot{Q}'i + R\dot{Q}'i + \frac{1}{C}Q'i = \varepsilon_0 i \sin \omega t \quad (i = \sqrt{-1})$$

A két egyenletet összeadva:

$$L(\ddot{Q} + i\ddot{Q}') + R(\dot{Q} + i\dot{Q}') + \frac{1}{C}(Q + iQ') = \varepsilon_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Euler-összefüggés:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  Tehát:  $\cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}$

# Komplex mennyiségek soros *RLC* kör esetén

Bevezetjük a következő komplex mennyiségeket:

Komplex töltés:  $\tilde{Q} = Q + iQ'$

Komplex elektromotoros erő:  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$

Ezeket beírva az egyenletbe:

$$L\ddot{\tilde{Q}} + R\dot{\tilde{Q}} + \frac{1}{C}\tilde{Q} = \tilde{\varepsilon}$$

Az egyenlet megoldását a következő alakban keressük:  $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0 e^{i\omega t}$

Ahol  $\tilde{Q}_0$  a komplex töltés csúcsértéke (amplitúdója).

A komplex töltés deriváltja a komplex áram:  $\dot{\tilde{Q}} = i\omega\tilde{Q}_0 e^{i\omega t} = i\omega\tilde{Q} = \tilde{I} \rightarrow \tilde{Q} = \frac{\tilde{I}}{i\omega}$

Valamint:  $\ddot{\tilde{Q}} = (i\omega)^2\tilde{Q}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2\tilde{Q}$

$$-L\omega^2\tilde{Q} + i\omega R\tilde{Q} + \frac{1}{C}\tilde{Q} = \tilde{\varepsilon}$$

$$i\omega\tilde{Q} \left( R - \frac{L\omega^2}{i\omega} + \frac{1}{i\omega C} \right) = \tilde{\varepsilon}$$

$$i\omega\tilde{Q} \left( R + iL\omega - i\frac{1}{\omega C} \right) = \tilde{\varepsilon}$$

$$\tilde{I} \left[ R + i \left( L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \tilde{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \tilde{I}\tilde{Z} = \tilde{\varepsilon} \quad \text{komplex Ohm-törvény}$$

# Komplex és valós impedancia

A komplex impedanciára kaptuk:  $\tilde{Z} = R + i \left( L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)$

Az induktív és kapacitív reaktanciák komplex alakja:  $\tilde{X}_L = iL\omega$  és  $\tilde{X}_C = -i \frac{1}{\omega C}$

$X_L = L\omega$  induktív reaktancia

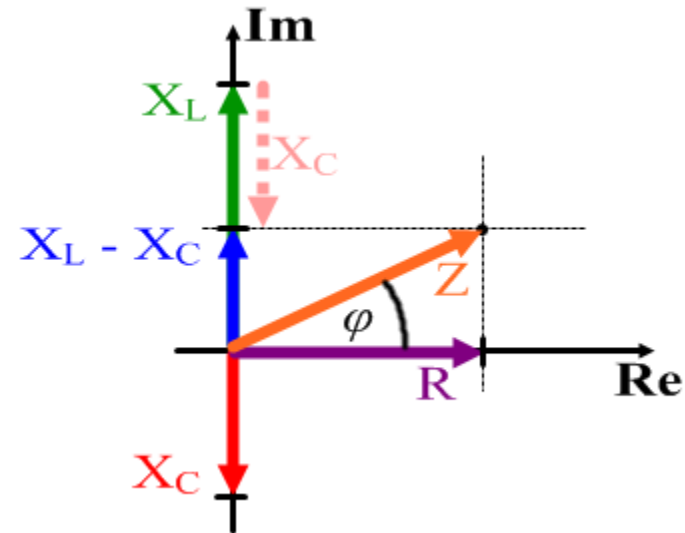
$X_C = \frac{1}{\omega C}$  kapacitív reaktancia

Az impedancia:

$$|\tilde{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

A komplex impedancia valós tengellyel bezárt szögére:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$  és  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$

Ezekkel felírva a komplex impedanciát:  $\tilde{Z} = Z e^{i\varphi}$



# Soros $RLC$ körben folyó áram

A komplex Ohm-törvény alapján a komplex áramerősség:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{Z}} = \frac{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{Z e^{i\varphi}} = \frac{\varepsilon_0}{Z} e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 \cos(\omega t - \varphi) + i I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

A komplex áramnak csak a valós része rendelkezik fizikai jelentéssel (ez a megoldás):

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

ahol  $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}$  az áram csúcsértéke.

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

A  $\varphi$  szög a fáziskésés szöge. Ennyivel késik az áram a gerjesztő feszültséghez képest.

Ha  $\varphi > 0$  akkor  $I$  késik  $\varepsilon$ -hoz képest, ha pedig  $\varphi < 0$  akkor  $I$  siet  $\varepsilon$ -hoz képest.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{és} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (\text{előző oldali fázisdiagram alapján})$$

# Feszültség az áramköri elemeken

A különböző áramköri elemeken úgy kapjuk meg a komplex feszültségeket, hogy a komplex áramerősséget megszorozzuk a megfelelő komplex reaktanciával vagy az ellenállással. A tényleges feszültséget a kapott eredmény valósrésze adja meg.

$$\tilde{U}_R = \tilde{I}R = RI_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = U_{R0} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$U_R(t) = U_{R0} \cos(\omega t - \varphi), \text{ ahol } U_{R0} = RI_0$$

$$\tilde{U}_C = \tilde{X}_C \tilde{I} = -i \frac{1}{\omega C} I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega C} I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = \frac{1}{\omega C} I_0 e^{i(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})} = U_{C0} e^{i(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$U_C(t) = U_{C0} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}), \text{ ahol } U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0$$

$$\tilde{U}_L = \tilde{X}_L \tilde{I} = iL\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = e^{i\frac{\pi}{2}} L\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = L\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})} = U_{L0} e^{i(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$U_L(t) = U_{L0} \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}), \text{ ahol } U_{L0} = L\omega I_0$$

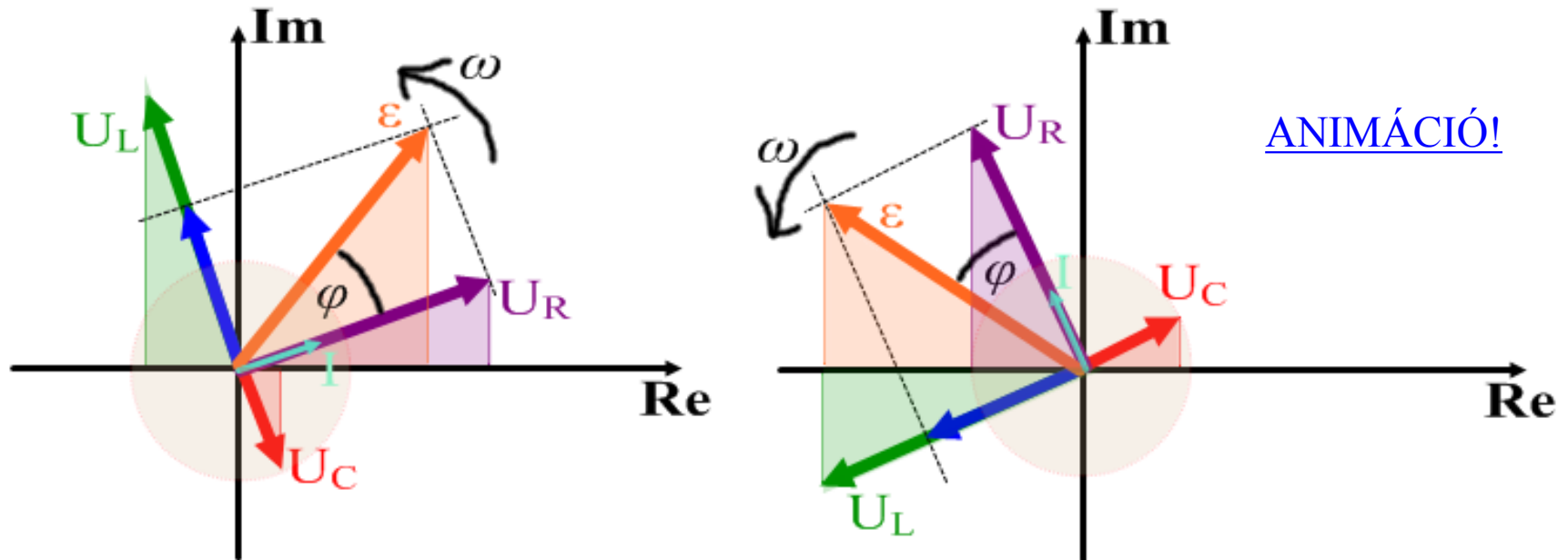
[ANIMÁCIÓ!](#)

Látható, hogy az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, de a kondenzátoron  $\pi/2$  fázissal késik, míg a tekercsen  $\pi/2$  fázissal siet.

A komplex tárgyalásmód nem használható a kezdeti tranziens jelenség leírására, valamint akkor, ha  $\varepsilon(t)$  nem szinuszos vagy koszinuszos függvény.

# Feszültségek grafikus ábrázolása

Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel.



$$\text{Eredeti egyenlet: } L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}Q = \varepsilon \quad \rightarrow \quad \tilde{U}_L + \tilde{U}_R + \tilde{U}_C = \tilde{\varepsilon}$$

Az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, a kondenzátoron  $\pi/2$  fázissal késik, a tekercsen pedig  $\pi/2$  fázissal siet. Az ábra  $\omega$  szögsebességgel forog az origó körül. Egy időpontban a ténylegesen mérhető feszültség a valós tengelyre vett vetület. Az áramerősségre és elektromotoros erőre ugyanez vonatkozik.

# Áramrezonancia soros $RLC$ körben

A kapacitív és az induktív reaktanciák függenek a frekvenciától, ezért az impedancia is frekvenciafüggő:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Amikor az impedancia minimális értéket vesz fel az áramerősség a lehető legnagyobb. Rezonancia frekvencia az a frekvencia amelynél az impedancia minimális és áramrezonancia lép fel. Látható, hogy ez akkor igaz amikor:

$$L\omega_r = \frac{1}{\omega_r C} \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ebben az esetben a kondenzátor és a tekercs éppen kiejtik egymás hatását, tehát az áram fáziskésése nulla lesz, az impedancia pedig egyszerűen az ohmos ellenállással lesz egyenlő:

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{L\omega_r - \frac{1}{\omega_r C}}{R} = 0 \rightarrow \varphi_r = 0$$

$$Z_r = \sqrt{R^2 + (0)^2} = \sqrt{R^2} = R$$



# Feszültségrezonanciák soros $RLC$ körben

Az ohmos ellenálláson eső feszültség csúcsértéke:  $U_{R0} = RI_0$

Mivel az  $R$  csak egy állandó, az ellenálláson eső feszültség rezonanciája az áramrezonanciával megegyező frekvencián történik:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A kondenzátoron eső feszültség csúcsértéke:  $U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

A rezonancia körfrekvencia értékénél ennek szélsőértéke van, tehát a derivált nulla.

$$0 = \frac{dU_{C0}}{d\omega} \rightarrow \omega_C = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

A tekercs feszültségének rezonanciájára az előzőhöz hasonlóan:

$$0 = \frac{dU_{L0}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} (\omega LI_0) = \frac{d}{d\omega} \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \rightarrow \omega_L = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{C^2 R^2}{2}}$$

# Teljesítmény soros *RLC* körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye:  $P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

Ezt átalakítjuk trigonometrikus összefüggések felhasználásával:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} +$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta$$

Legyenek:  $\alpha = \omega t$  és  $\beta = \omega t - \varphi$   $\frac{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi}{2} = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)$

Tehát a pillanatnyi teljesítmény:  $P(t) = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$

Az átlagteljesítmény ennek az időátlaga, de az első tag egész periódusokra vett integrálja nulla. A második (konstans) tag időátlaga önmaga:

$$\bar{P} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{R}{Z} = I_{\text{eff}}^2 R \quad \begin{array}{l} \text{ez rezonancia esetén} \\ \text{a legnagyobb} \end{array}$$

Ezt hívják  $P_h$  hatásos teljesítménynek. A  $\cos \varphi = R/Z$  szorzó pedig a teljesítménytényező.

Látszólagos teljesítmény:  $P_l = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$       Meddő teljesítmény:  $P_m = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi$

SOROS és PÁRHUZAMOS  
RLC körös példák:  
[VIDEÓ IDEKATTITVA!](#)