

Energiaterjedés az elektromágneses hullámban

Az elektromágneses hullám terjedése során energia is áramlik. Az energiatervedés iránya ugyanaz mint a hullám iránya, és a pillanatnyi energia-áramsűrűséget egy pontban a **Poynting-vektor** adja meg:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\vec{S}] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Egy tetszőleges felületen átáramló pillanatnyi teljesítmény tehát: $P(t) = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{A}$

Az elektromágneses tér energiasűrűsége: $w_{EM} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

Az elektromos és mágneses tér fázisa megegyezik, és az általuk tárolt energia is:

$$\frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad \rightarrow \quad \text{a csúcsértékekre: } \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \rightarrow H_0^2 = \frac{\epsilon}{\mu} E_0^2$$

Tehát a Poynting-vektor kifejezhető csak az egyik térerősséggel:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = EH\vec{e} = \vec{e}E_0\sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})H_0\sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \\ &\vec{e}E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{e} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

a hullám terjedési
 $\vec{e}$ irányába mutató
egységvektor

Emellett írható még:
$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \vec{e} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}} \epsilon E^2 \vec{e} = v \epsilon E^2 \vec{e} = v w_{EM} \vec{e} = w_{EM} \vec{v}$$

Koherens hullámok interferenciája

Az energia-áramsűrűség nagyságának időátlagát a hullám intenzitásának nevezzük:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{2}$$

Ha két egyenlő frekvenciájú, egymásra nem merőleges síkokban rezgő hullám a tér egy részében úgy találkozik, hogy a fázisuk közötti különbség huzamosabb ideig állandó akkor abban a térrészben állóhullám jön létre.

Az ilyen hullámokat **koherens** hullámoknak nevezzük, a megfigyelhető jelenség pedig az **interferencia**.

Legyen a két hullám: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$ $\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$

Az eredő térerősség minden pontban és időben a két térerősség vektori összege:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$$

Az eredő térerősség négyzete: $E^2 = \vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

Az interferencia tag

A két koherens hullám által létrehozott intenzitás:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_1^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_2^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{10}^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{20}^2}{2}}_{I_2} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}}$$

Az interferencia tag:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) \rangle \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \end{cases} +$$

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} [\cos(2\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \delta)] \rangle$$

Az első tag időátlaga 0, másodiké önmaga, hisz az időtől független:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - \delta] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[\Delta\varphi] \quad \Delta\varphi: \text{fáziskülönbség}$$

Speciális eset: $\vec{E}_{10} = \vec{E}_{20} = \vec{E}_0$ tehát $I_1 = I_2 = I$ konstruktív és destruktív interferencia:

$$I_k = I + I + 2I = 4I \quad (\Delta\varphi = 0)$$

$$I_d = I + I - 2I = 0 \quad (\Delta\varphi = \pi)$$

Hullám terjedése közegben

Amikor az elektromágneses hullám valamilyen közegben terjed, akkor a vákuumbeli sebességéhez képest lelassul.

Vákuumban: $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (ez a fény terjedési sebessége vákuumban)

Valamilyen nem ferromágneses szigetelő közegben:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad \rightarrow \quad n = \frac{c}{v}$$

Itt n az adott közeg abszolút törésmutatója, ami megadja, hogy hányad részére csökken le a hullám (fény) sebessége a vákuumbeli sebességhez képest.

Két közeg egymásra vonatkoztatott relatív törésmutatója az abszolút törésmutatók hányadosa:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Tehát a törésmutatók hányadosára mindig írhatjuk, hogy: $\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$

Vékonyréteg-interferencia

Konstruktív interferencia: $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ ($m = 0, 1, \dots$)

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (n_3 > n_2 > n_1)$$

$$\varphi_1 = k_1 \overline{AD} + \pi \quad *$$

$$\varphi_2 = k_2 (\overline{AB} + \overline{BC}) + \pi \quad *$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_2} (\overline{AB} + \overline{BC}) - \frac{2\pi}{\lambda_1} \overline{AC} \sin \theta_1$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_1 n_1} \left(\frac{2d}{\cos \theta_2} \right) - \frac{2\pi}{\lambda_1} \overline{AC} \sin \theta_1$$

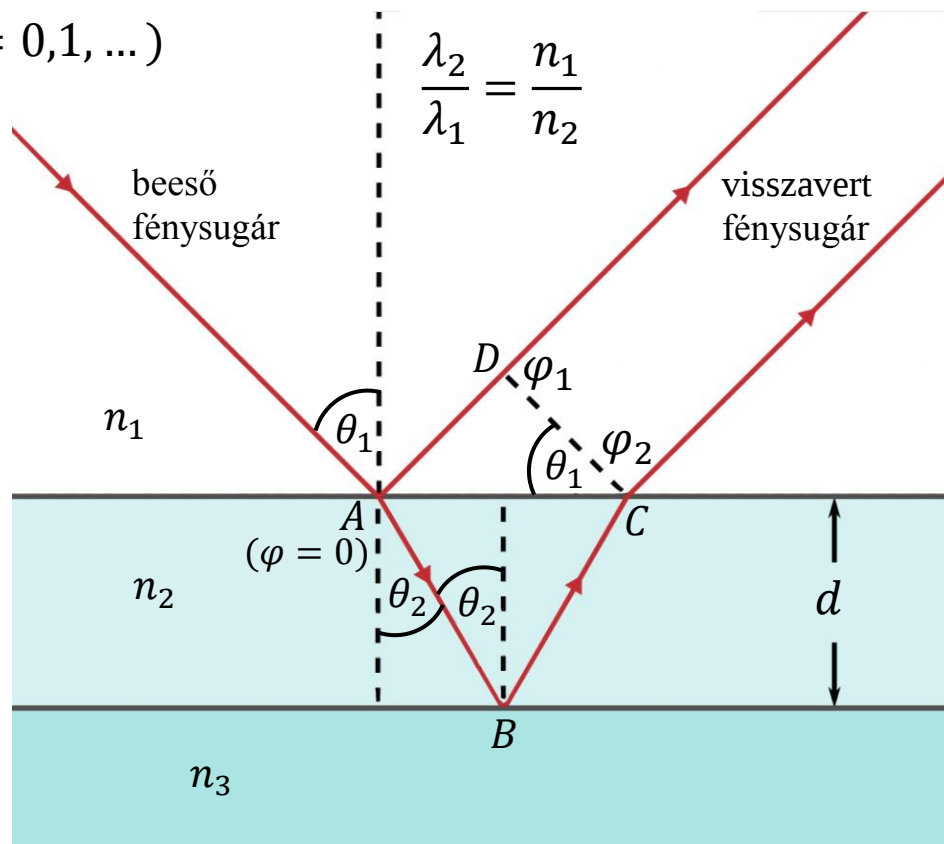
Közelítőleg merőleges beesésnél:

$$\cos \theta_2 \approx 1 \quad \sin \theta_1 \approx 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_1 n_1} \cdot 2d = m \cdot 2\pi$$

$$\frac{n_2}{\lambda_1 n_1} \cdot 2d = m$$

$$\frac{n_2}{n_1} \cdot 2d = m \lambda_1$$



Ha az 1-es közeg levegő: $n_1 \approx 1$, $\lambda_1 \approx \lambda$, $n_2 = n$

$$n \cdot 2d = m \lambda \quad (\text{optikai úthossz: } s_o = n \cdot l)$$

* Amikor a hullám optikailag **sűrűbb** közegről verődik vissza, akkor **π fázisugrást** szenved! Ha csak az egyiknél sűrűbb, akkor ez pont a gyengítés feltétele lenne!



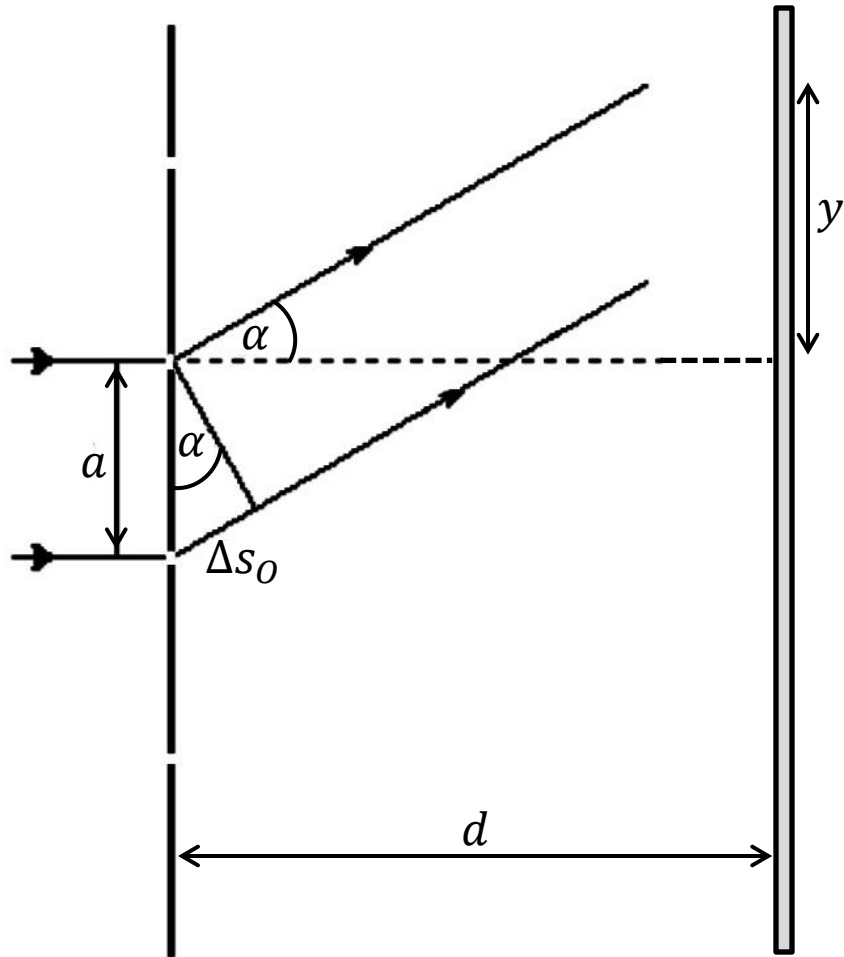
Optikai rács

Konstruktív interferencia: $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ ($m = 0, 1, \dots$)

Optikai úthosszak különbségére: $\Delta s_0 = m\lambda$

Pozíció az ernyőn:

$$\begin{aligned} a \sin \alpha &= m\lambda \\ \sin \alpha &= \frac{m\lambda}{a} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{y}{d} \\ y &= d \text{ tg } \alpha \end{aligned}$$

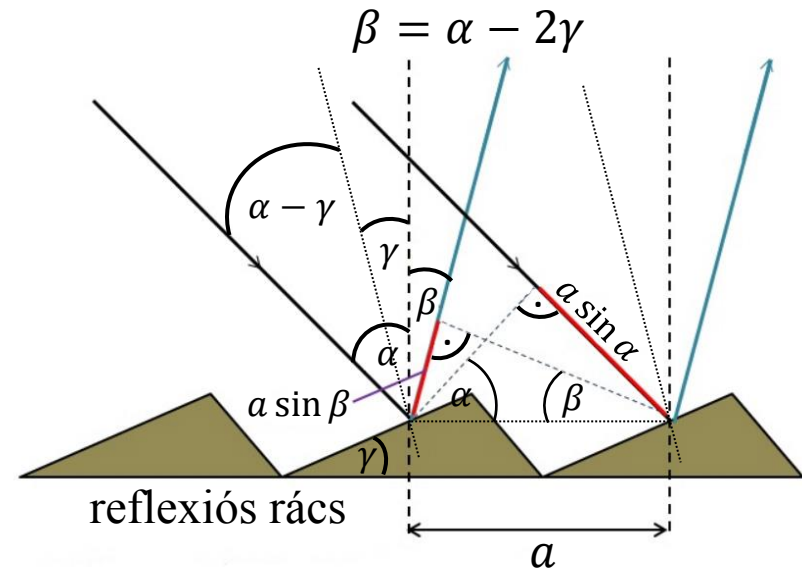


transzmissziós rács

ernyő

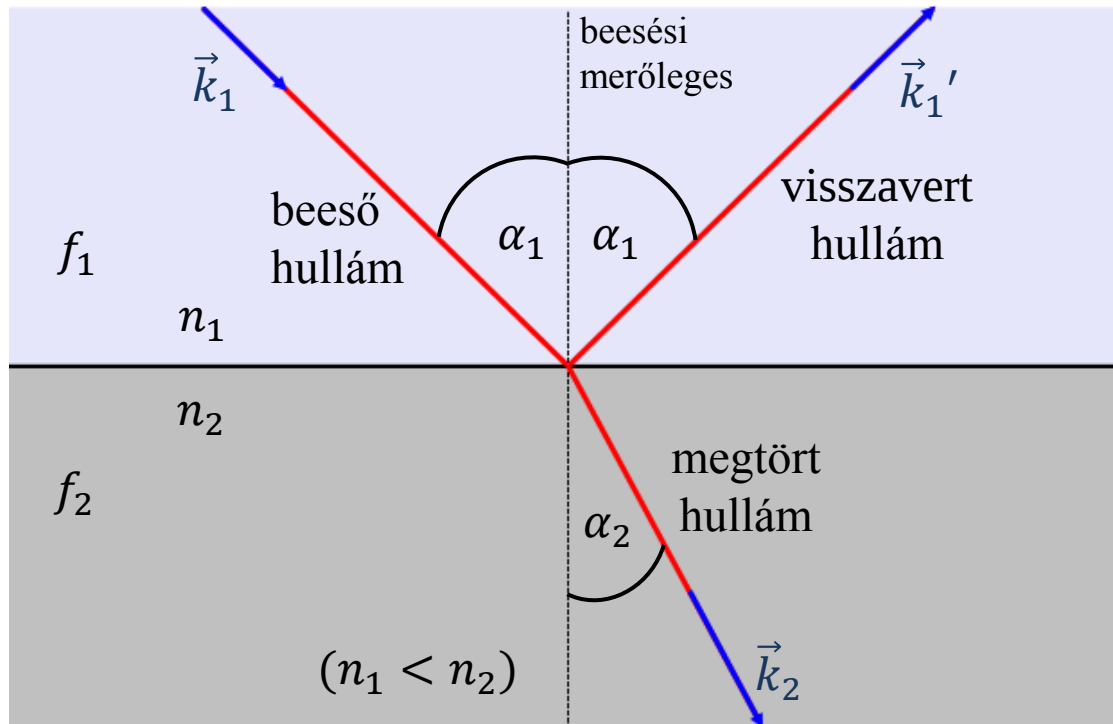
Reflexiós rácsnál:

$$\begin{aligned} \Delta s_0 &= a \sin \alpha - a \sin \beta = m\lambda \\ a(\sin \alpha - \sin \beta) &= m\lambda \end{aligned}$$

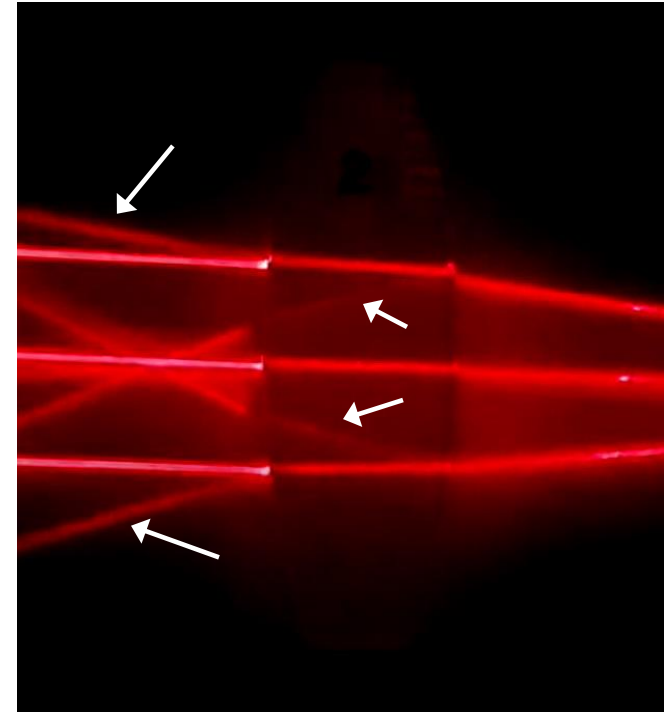


Hullámok viselkedése két közeg határán

Két különböző közeg határához érve a hullám egy része mindig visszaverődik, a másik része pedig megtörve behatol a másik közegbe. Bizonyos esetekben a hullám teljes mértékben visszaverődik.



[VIDEÓ IDEKATTINTVA!](#)



A visszaverődési szög megegyezik a beesési szöggel.

A törési szög és beesési szög kapcsolatát a **Snellius-Descartes törvény** adja meg.

A hullám **frekvenciája ugyanaz** a két közegben: $f_1 = f_2 = f$

Felhasználva, hogy minden hullám esetén: $v = \lambda f$

A hullámhosszakra: $\lambda_1 = v_1/f$ és $\lambda_2 = v_2/f$

Tehát a hullámhossz optikailag sűrűbb közegben kisebb.

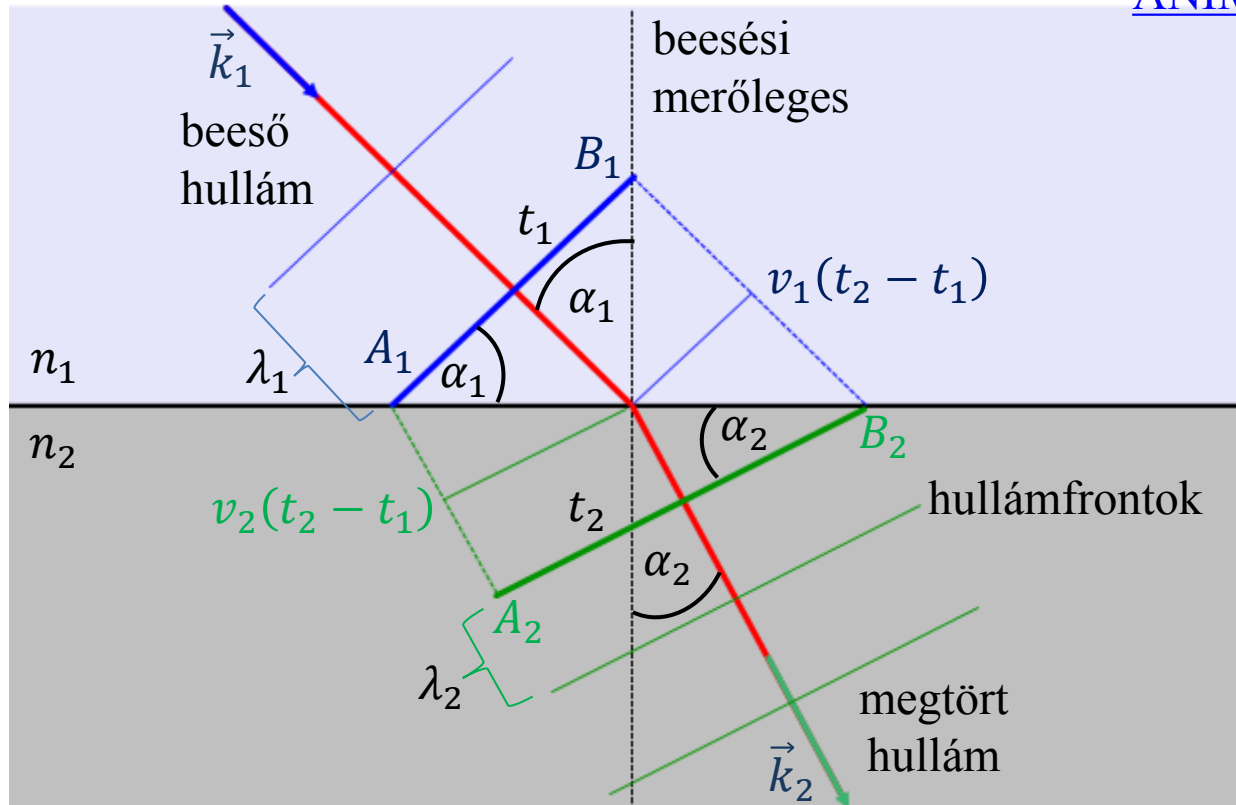
$$\rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1/f}{v_2/f} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Snellius-Descartes törvény

Az A_1B_1 vonal jelzi a hullám fázisfelületét a t_1 időpontban.

Az A_2B_2 vonal jelzi a hullám fázisfelületét a t_2 időpontban.

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)



$$\sin \alpha_1 = \frac{v_1(t_2 - t_1)}{A_1B_2}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2(t_2 - t_1)}{A_1B_2}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

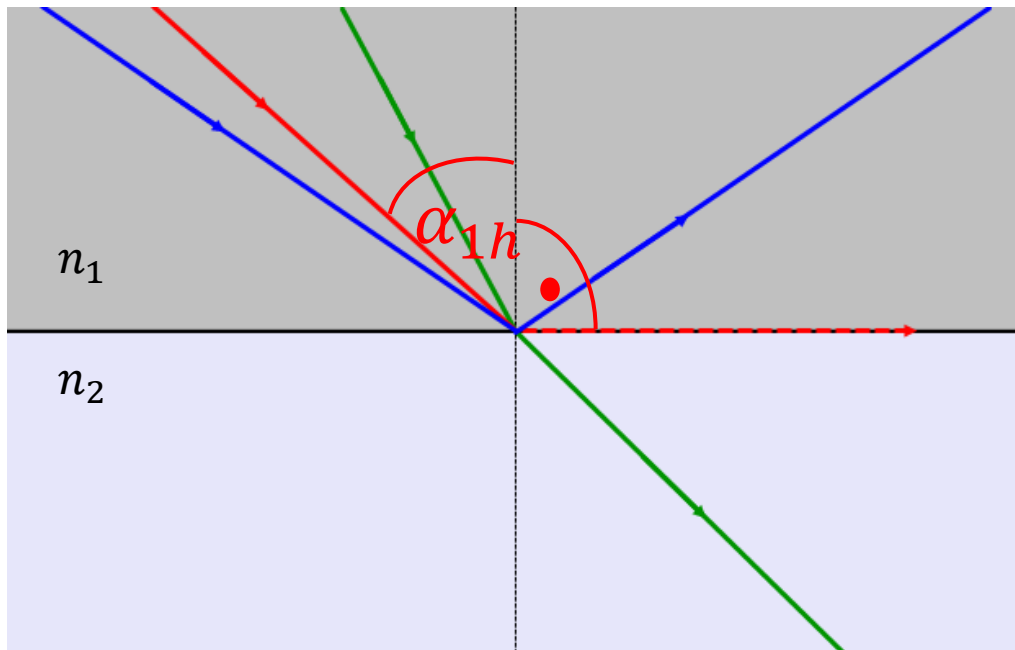
Ha a hullám optikailag sűrűbb közegbe érkezik, akkor a törési szög kisebb, mint a beesési szög.

Ha a hullám optikailag ritkább közegbe érkezik, akkor a törési szög nagyobb, mint a beesési szög.

Teljes visszaverődés

Amikor a hullám optikailag sűrűbb közegből lép át optikailag ritkább közegbe ($n_1 > n_2$), akkor az α_1 beesési szöget növelve a törési szög egyre jobban megközelíti a derékszöget, a megtört hullám intenzitása pedig egyre csökken.

Amikor a beesési szög meghaladja az α_1 határszöget, teljes visszaverődés áll fent.

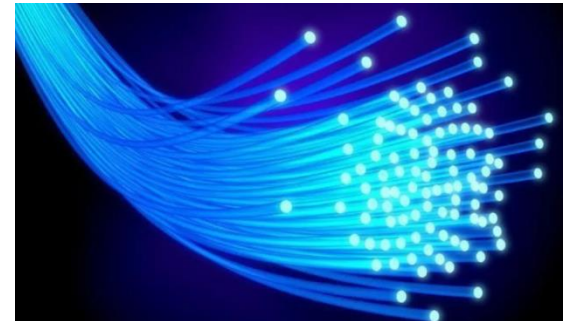


A határszögre:

$$n_1 \sin \alpha_{1h} = n_2 \sin 90^\circ$$

$$\sin \alpha_{1h} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

Ezt a jelenséget optikai szálakban hasznosítják.



[VIDEÓ IDEKATTINTVA!](#)

Geometriai optika

Egy átlátszatlan test nyílásából indulva a fény egyenesekkel határolt **fénynyaláb** formájában terjed. A minden határon túl elvékonyodott fénnyalábot **fénysugár**nak nevezzük, és egy irányított egyenesnek fogjuk fel.

A **geometriai optika** keretében erre a fénysugárra használunk egyszerű matematikai és geometriai módszereket.

Homogén közegben a fény **egyenes vonalban** terjed.

Két közeg határfelületén a beeső fény egy része **visszaverődik**, másik része **megtör**ik és behatol a másik közegbe.

A fényvisszaverődés törvényei:

- a beeső fénysugár, a beesési merőleges, a visszavert fénysugár egy síkban vannak
- a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel

A fénytörés törvényei:

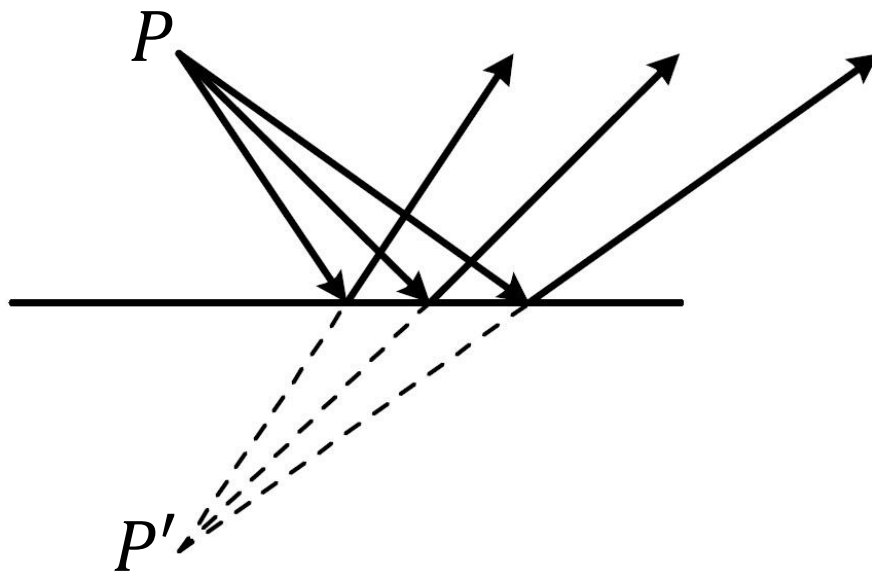
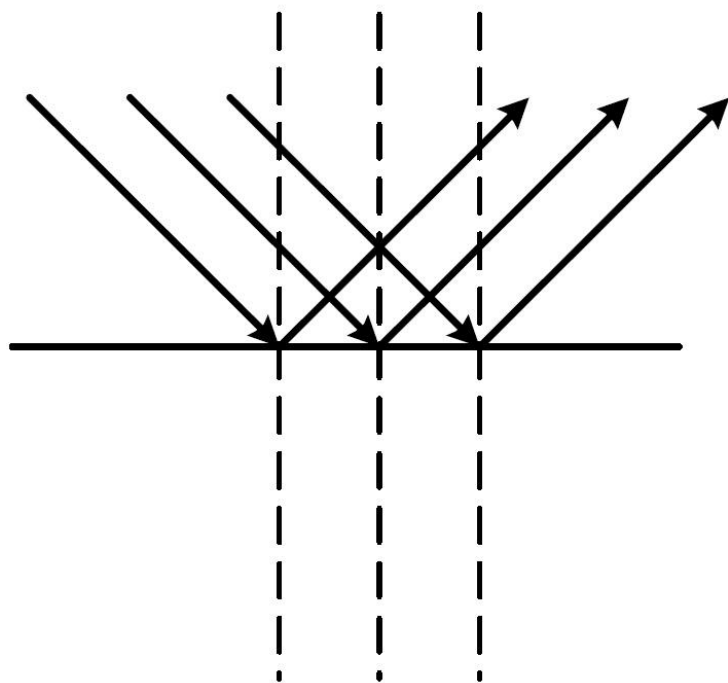
- a beeső fénysugár, a beesési merőleges, a megtört fénysugár egy síkban vannak
- a beesési szög és a törési szög kapcsolatát a Snellius-Descartes törvény adja meg:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Visszaverődés sík határfelületen (síktükör)

A párhuzamos fénysugarak párhuzamosan verődnek vissza.

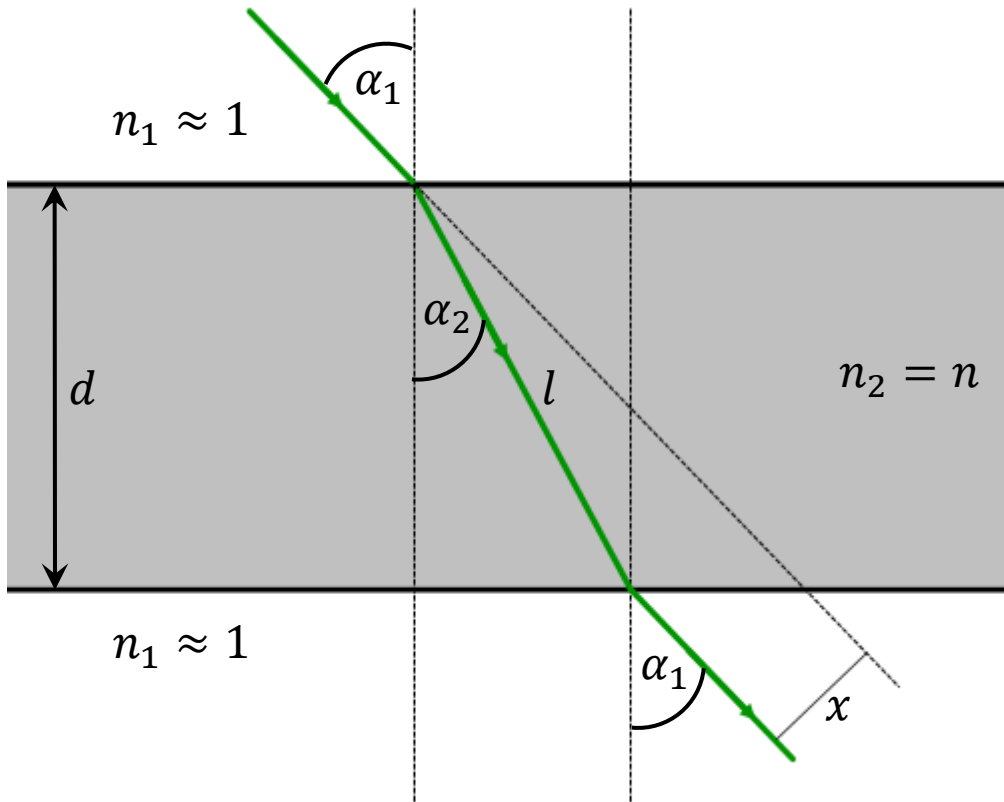
A széttartó vagy összetartó fénysugarak visszaverődés után is széttartóak, összetartóak.



A P pontszerű forrásból induló széttartó fénysugarakat visszafelé meghosszabbítva az egyenesek a P' pontban találkoznak. Ez a P fényforrás **látszólagos** képe.

Áthaladás plán-parallel lemezen

A d vastagságú plánparallel lemezen való áthaladás és két törés után a fénysugár az eredeti irányban halad tovább egy x távolsággal eltolva.



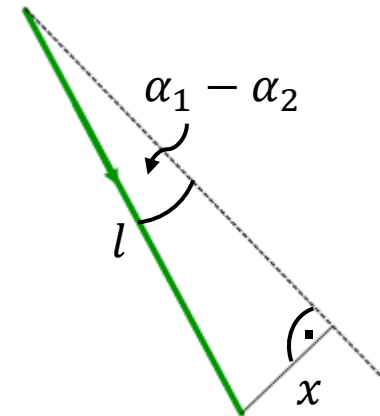
Snellius-Descartes törvény:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2$$

A lemezben megtett l távolság:

$$l = \frac{d}{\cos \alpha_2}$$

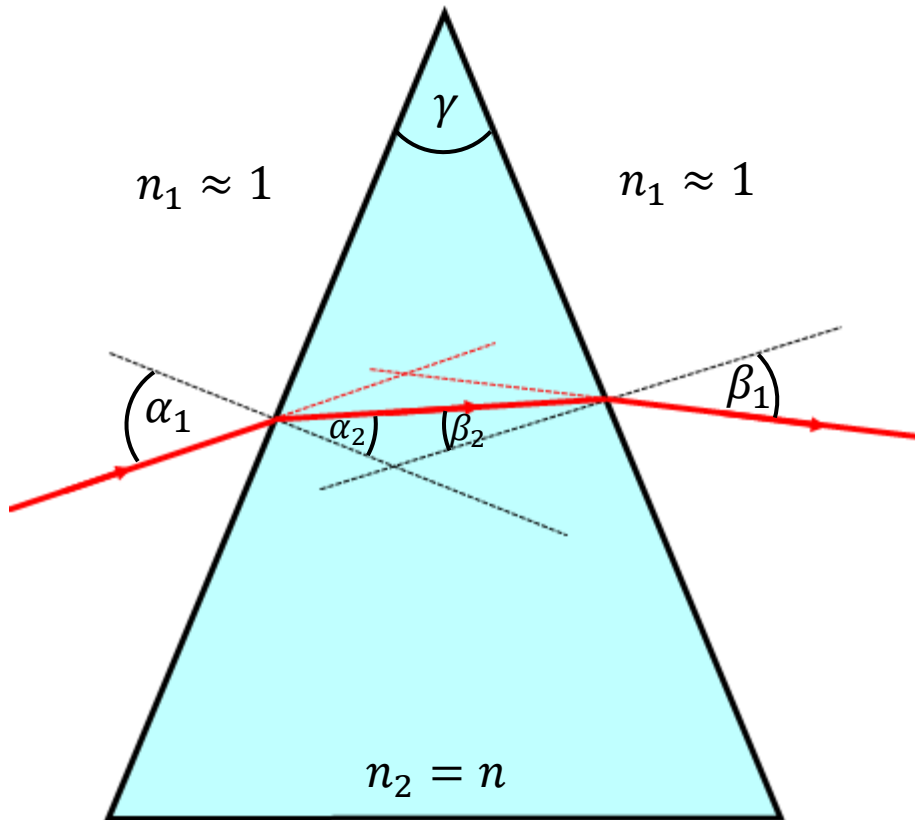


$$x = l \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Fénytörés prizmában

A prizmán a fénysugár ugyancsak kétszer megtörve halad át.

A γ szöget a prizma törőszögének nevezik.



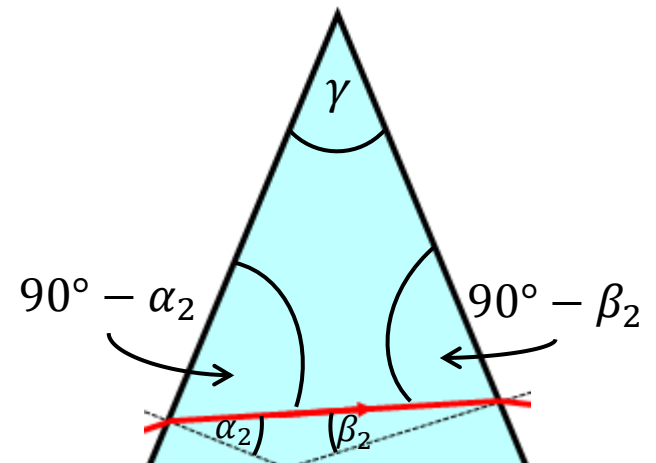
Snellius-Descartes törvény:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2$$

$$n_2 \sin \beta_2 = n_1 \sin \beta_1$$

$$n \sin \beta_2 = \sin \beta_1$$



A háromszög szögeire:

$$90^\circ - \alpha_2 + 90^\circ - \beta_2 + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = \alpha_2 + \beta_2$$

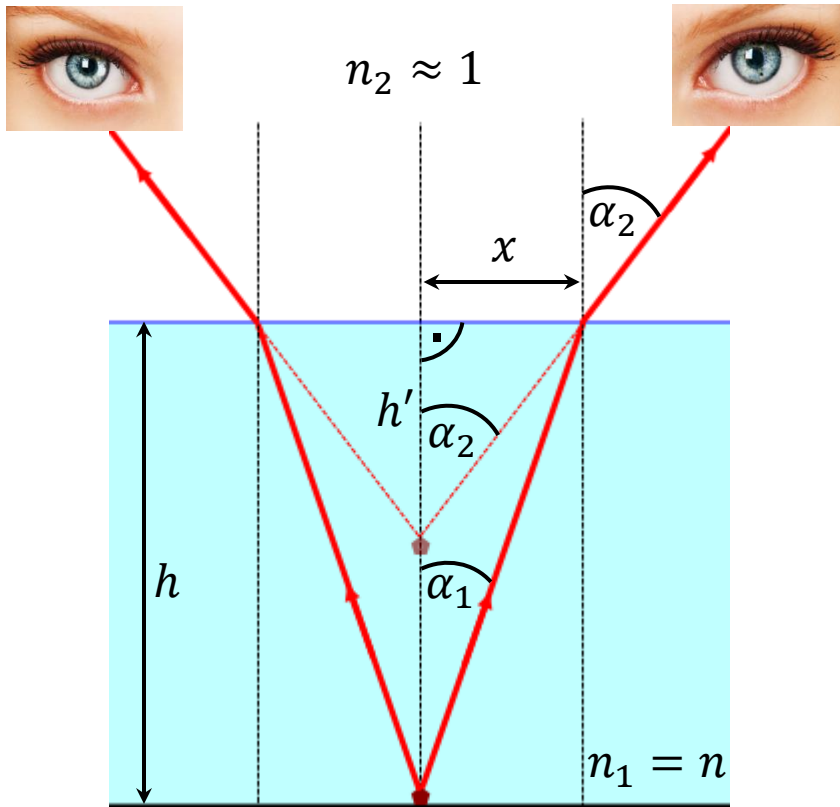
Látszólagos mélység

Ha egy tó fenekén függőlegesen lefelé tekintve megfigyelünk egy követ, hogy az alapján megbecsüljük a tó mélységét, akkor az a valódi mélységnél **kiseb**bnek tűnik.

A **nagyon kicsi** szögben kiinduló fénysugarakat felhasználva:

$$\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$$

$$\sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 \approx \alpha_2$$



Snellius-Descartes törvény:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n}$$

A két derékszögű háromszög alapján:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{h} &= \operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1 \\ \frac{x}{h'} &= \operatorname{tg} \alpha_2 \approx \alpha_2 \end{aligned} \right\} \frac{1/h}{1/h'} = \frac{h'}{h} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

A két eredményt összevetve:

$$\frac{h'}{h} = \frac{1}{n} \rightarrow h' = \frac{h}{n}$$

víz esetén:
 $n = 1,333$

Diszperzió

Egy közeg törésmutatója általában függ a rajta áthaladó fény hullámhosszától. Emiatt a különböző színű fénysugarak különböző mértékben törnek meg.

Az ilyen eszközökkel a fehér fény színeire bontható:

