

Soros RLC kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Ez szerkezetét tekintve ugyanolyan mint a gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cos \omega t$$

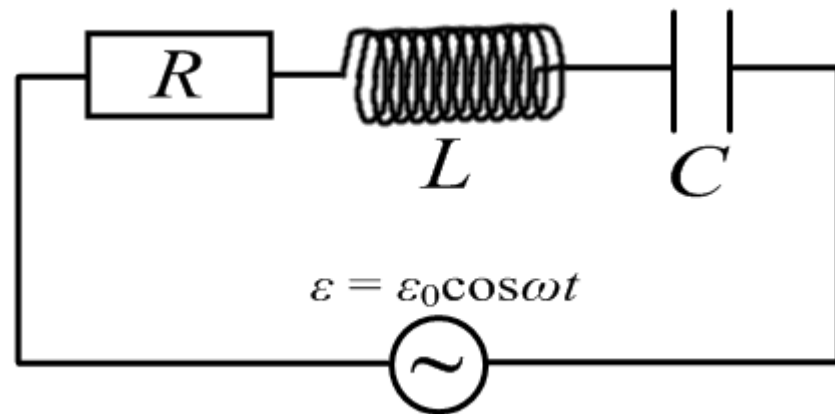
A megfelelő mennyiségek: $x \rightarrow Q$; $m \rightarrow L$ (tehetetlenség) ; $b \rightarrow R$ (csillapítás);
 $D \rightarrow 1/C$ (rúgóállandó)

rezonancia körfrekvencia: $\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}}$

[LÁSD VIDEÓ IDEKATTINVA!](#)

Lederiváljuk az eredeti egyenletet, hogy az áramerősségre kapjunk egy inhomogén másodrendű differenciálegyenletet:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$$



Soros RLC kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Soros RLC körben az áramerősségre kaptuk: $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$

Ennek megoldása az áramforrással megegyező frekvenciájú, de egy kezdőfázissal eltolt váltóáram:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

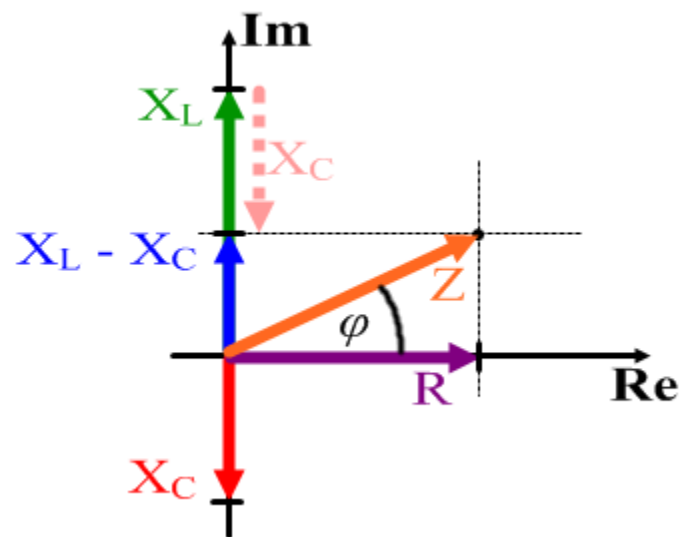
A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosa az **impedancia** (Z).
Ezzel felírva az Ohm-törvény általános alakja váltóáramú körökre:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}$$

Az impedancia az áramkör váltóáramú „ellenállása”, amely tartalmazza a kapacitív és induktív reaktanciák járulékát is. Az impedancia és a fáziskésés kiszámítását segíti a különféle ellenállásokat a komplex síkban ábrázoló fázisábra. Ennek alapján:

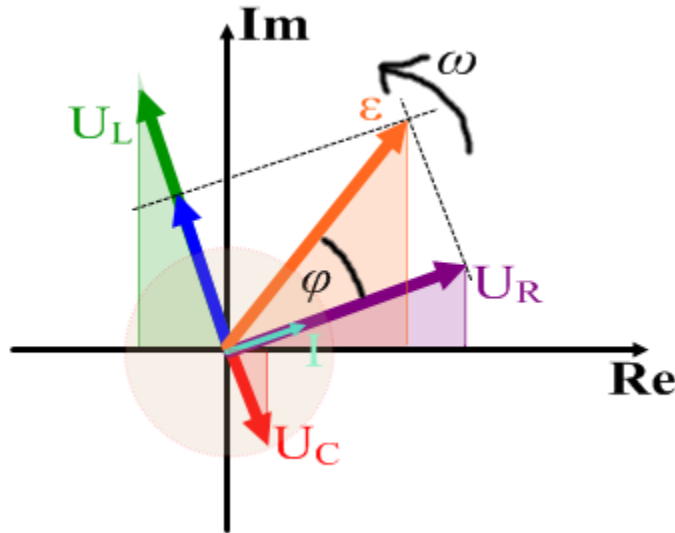
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\text{és } \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{vagy} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

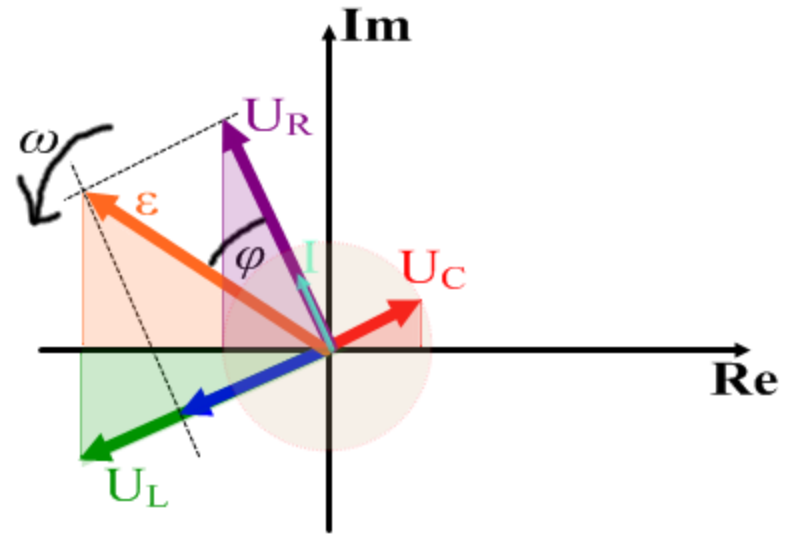


Feszültség az áramkörü elemeken

Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel.



Látható, hogy az Ohmos ellenálláson a feszültség az áramerősséggel fázisban van, de a kondenzátoron $\pi/2$ -ővel késik, míg a tekercsen $\pi/2$ fázissal siet. Az ábra ω szögsebességgel forog az origó körül. Egy időpontban a ténylegesen mérhető feszültség a valós tengelyre vett vetület. Az áramerősségre ugyanez vonatkozik.



$$U_R(t) = U_{R0} \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow U_{R0} = I_0 R$$

$$U_C(t) = U_{C0} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{C0} = \frac{I_0}{C\omega}$$

$$U_L(t) = U_{L0} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow U_{L0} = I_0 L \omega$$

Áramrezonancia soros RLC körben

A kapacitív és az induktív reaktanciák függnek a frekvenciától, ezért az impedancia is frekvenciafüggő:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Amikor az impedancia minimális értéket vesz fel az áramerősség a lehető legnagyobb. Rezonancia frekvencia az a frekvencia amelynél az impedancia minimális és (áram)rezonancia lép fel. Látható, hogy ez akkor igaz amikor:

$$L\omega_r = \frac{1}{\omega_r C} \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Látható, hogy ekkor a kondenzátor és a tekercs éppen kiejtik egymás hatását, tehát az áram fáziskésése nulla lesz, az impedancia pedig egyszerűen az ohmos ellenállással lesz egyenlő:

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{L\omega_r - \frac{1}{\omega_r C}}{R} = 0 \rightarrow \varphi_r = 0$$

$$Z_r = \sqrt{R^2 + (0)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Teljesítmény soros RLC körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye: $P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

Ezt átalakítjuk trigonometrikus összefüggések felhasználásával:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} +$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta$$

Legyenek: $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$ $\frac{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi}{2} = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)$

Tehát a pillanatnyi teljesítmény: $P(t) = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$

Az átlagteljesítmény ennek az időátlaga, de az első tag egész periódusokra vett integrálja nulla. A második (konstans) tag időátlaga önmaga:

$$\bar{P} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{R}{Z} = I_{\text{eff}}^2 R \quad \begin{array}{l} \text{ez rezonancia esetén} \\ \text{a legnagyobb} \end{array}$$

Ezt hívják P_h hatásos teljesítménynek. A $\cos \varphi = R/Z$ szorzó pedig a teljesítménytényező.

Látszólagos teljesítmény: $P_l = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ Meddő teljesítmény: $P_m = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi$

SOROS és PÁRHUZAMOS
RLC körös példák:
[VIDEÓ IDEKATTITVA!](#)

Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény

Maxwell elméleti meggondolások alapján feltételezte, hogy a változó elektromos tér örvényes mágneses teret kelt (hasonlóan ahhoz ahogyan a változó mágneses tér kelt elektromos teret).

Az Ampère-féle gerjesztési törvényt kiegészítette még egy taggal, amit **eltolási áram**nak nevezett el:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Felhasználva az elektromos indukciófluxus definícióját: $\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d\Psi}{dt}$

Az eltolási áram nem jár töltések áramlásával.

Az első tagban I_i a vezetési áram.

Példa: Kondenzátor feltöltésénél (ill. kisülésénél) a lemezek közötti változó elektromos tér is ugyanúgy mágneses teret hoz létre mint a lemezekhez futó zsinórokban folyó vezetési áram a vezetékek körül.

A Stokes-tétel és az áramsűrűség felhasználásával egy időben állandó kicsiny F felületre:

$$\int_F \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{lokális vagy differenciális alak})$$

A Maxwell-egyenletek rendszere

A XIX. század legnagyobb hatású eredménye, az elektromágneses hullámok elméleti alapja.

1. Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{A} \rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

integrális alak

differenciális alak

A mozgó töltések és az időben változó elektromos tér örvényes mágneses teret keltenek.

2. Faraday-Lenz féle indukciós törvény:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

integrális alak

differenciális alak

Az időben változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt.

A Maxwell-egyenletek rendszere

3. Az elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

integrális alak differenciális alak

Az elektromos tér forrásai a töltések.

4. A mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

integrális alak differenciális alak

A mágneses térnek nincsenek forrásai (nincsenek monopólusok).

Szükség van még az alábbi egyenletekre:

Lineáris anyagegyenletek: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ és $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ (csak közelítő jellegűek)

Differenciális Ohm-törvény: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$

Elektromágneses hullámeqyenlet

Valódi töltésektől és vezetési áramoktól mentes szigetelőkre ($\mu_r \approx 1$) az egyenletek:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Az anyagegyenletek továbbá: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

Felhasználva az összefüggést: $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}$
 Ezekből levezethetők a homogén hullámeqyenletek a térerősségekre:
 Bármely komponensre (i lehet x, y , vagy z):

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = 0$$

Összehasonlítva az általános homogén hullámeqyenlettel egy tetszőleges u mennyiségre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \right) \quad \Delta: \text{Laplace operátor}$$

Az általános alakban v a hullám terjedési sebessége, tehát az elektromágneses hullámra:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad \text{amely vákuum esetén: } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{a fény sebessége vákuumban})$$

Az elméletileg így megjósolt EM hullámokat Hertz kimutatta kísérletileg 1888-ban.

Monokromatikus síkhullám megoldás

Az előbbi homogén hullámegyenleteknek egyik lehetséges megoldásai a síkhullámok. Ha a **hullám forrásától elegendően messze** vagyunk akkor mindig tekinthetjük a hullámokat síkhullámoknak. Egy z irányba terjedő síkhullámra:

$$E_x = E_{x0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = E_{x0} \sin(\omega t - kz)$$

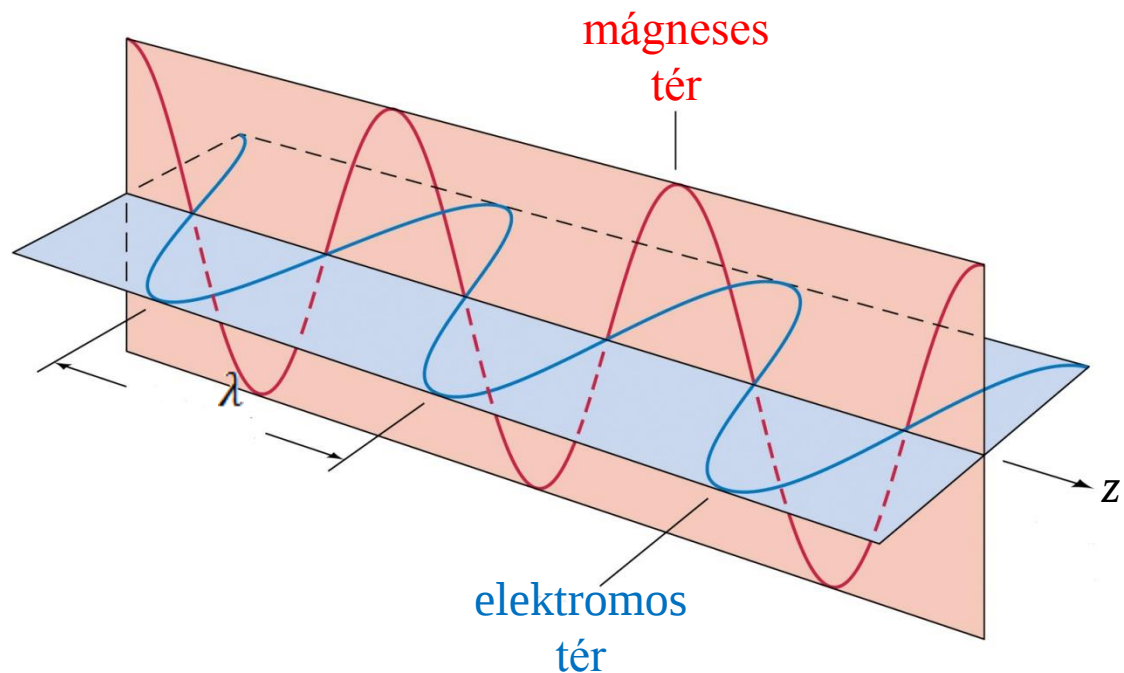
T : periódusidő λ : hullámhossz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{körfrekvencia}$$

$$H_y = H_{y0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = H_{y0} \sin(\omega t - kz)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{körhullámszám}$$

Ez a megoldás monokromatikus mivel csak egyféle frekvenciát tartalmaz.

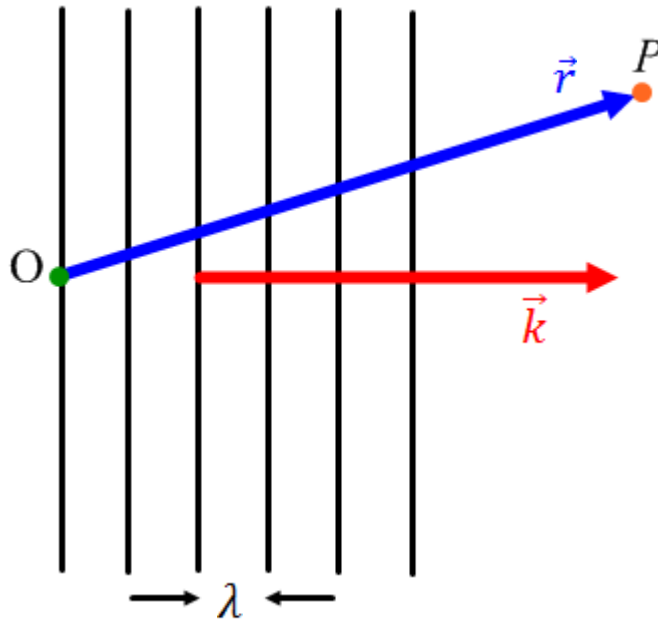


Az elektromágneses hullámban $\vec{E}$ és $\vec{H}$ merőleges, továbbá $\vec{E}$, $\vec{H}$, és $\vec{v}$ jobbsodrású rendszert alkot (itt x, y, z). Az elektromágneses hullám **transzverzális**. Az elektromos és mágneses tér egymással azonos fázisban van.

Tetszőleges irányba terjedő síkhullám

Általánosan a hullám terjedési irányát a körhullámszám vektor iránya jelöli ki (a sebesség iránya is ugyanaz). Az elektromos és mágneses térerősség a hely és idő függvényében:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$



Térben az azonos fázisban lévő pontok halmaza egymást hullámhossznyi távolságonként követő síkok.

Általában az elektromágneses hullám sok különböző frekvenciájú hullámból tevődik össze. A különböző frekvenciák arányát mutatja az elektromágneses hullám spektruma (színképe).

Ha a hullámhossz nagyjából 400 és 800 nm között van, akkor a hullám a látható tartományba esik.

A teljes elektromágneses színekép

Az elektromágneses hullám hullámhossza (frekvenciája, vagy energiája) több nagyságrenden keresztül változhat. A látható tartomány (fény) ennek csak nagyon kis része:

