Erőtörvények

Olyan függvények, amelyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:

-a test helye

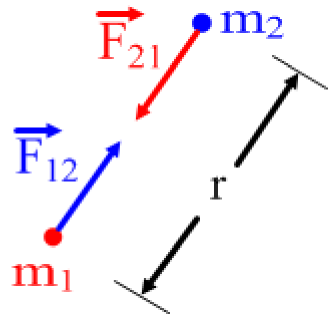
- a test sebessége

- az idő

Newton-féle gravitációs erő

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

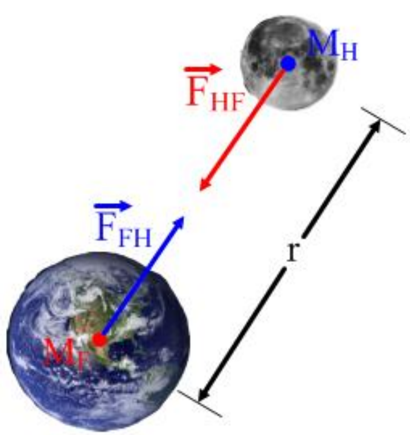
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

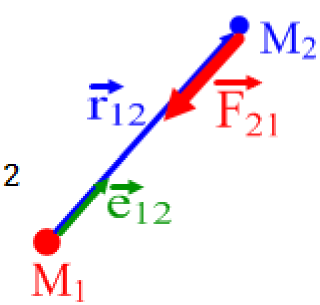
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Az erőtörvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok.
A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2{}_{12}} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



Súlyerő

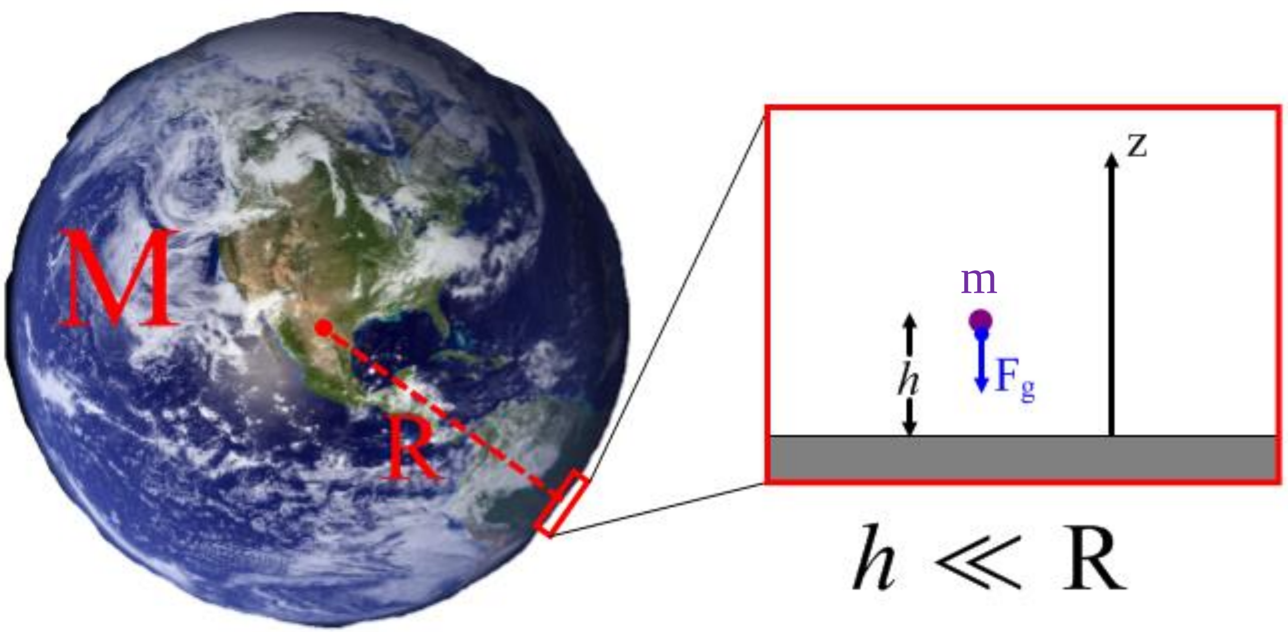
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtörvényből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2}\vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2}\vec{e}_r = -mg\vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

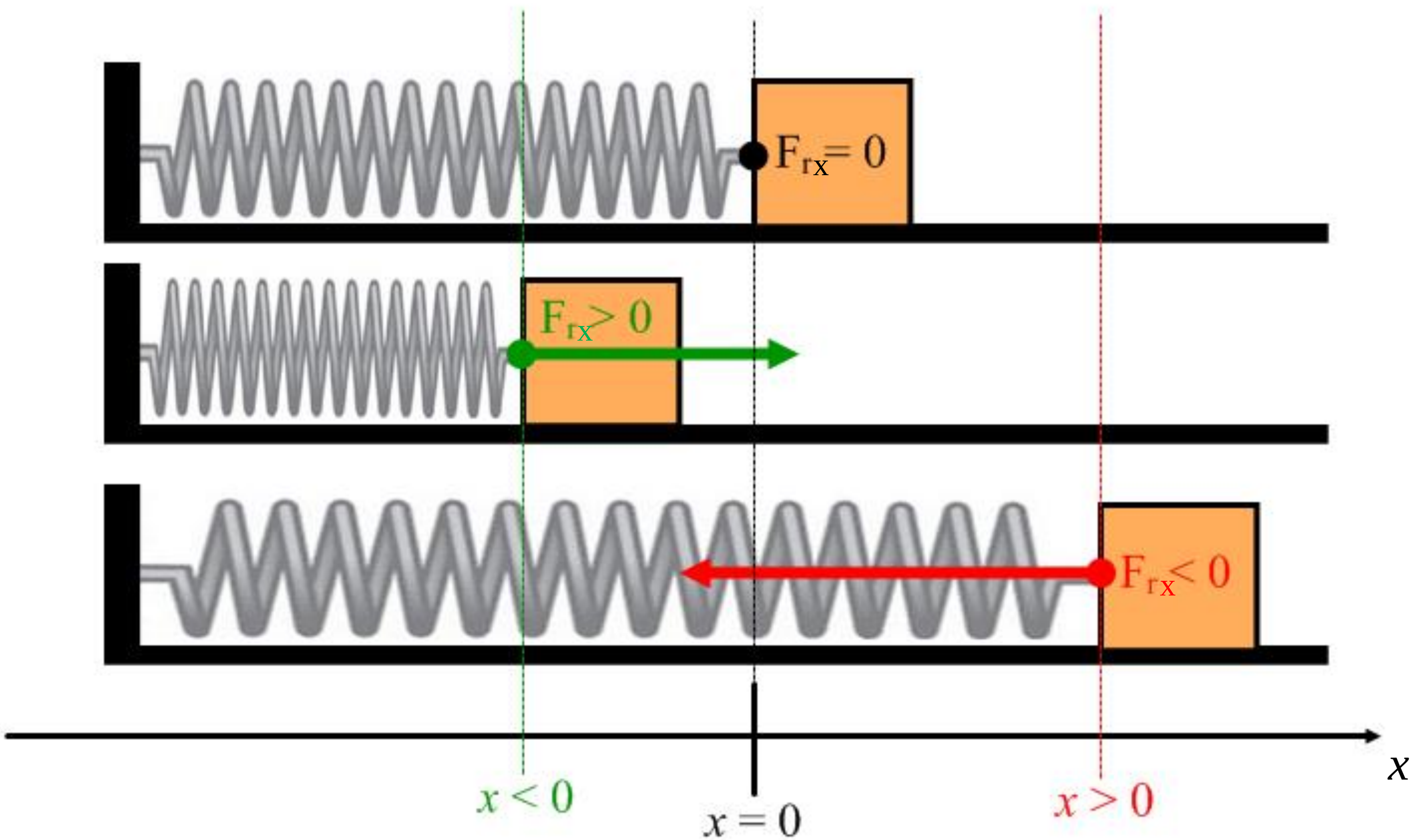
gravitációs gyorsulás a Föld felszínén



Rugóerő

Hooke-törvény: Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.
Az arányossági tényező a rugóállandó *D*.

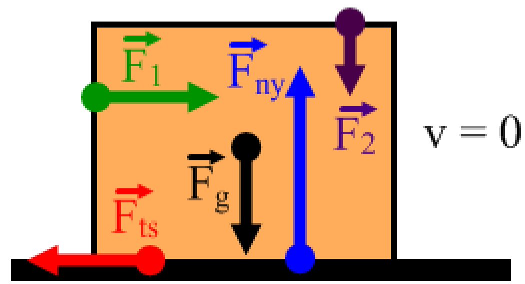
$$F_{rx} = -Dx$$



Súrlódási erő

<u>Három fajta lehet</u>:

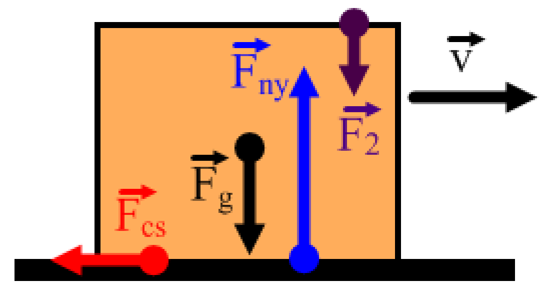
1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekszik megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).



$$F_{ts} = F_1$$
amíg
$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

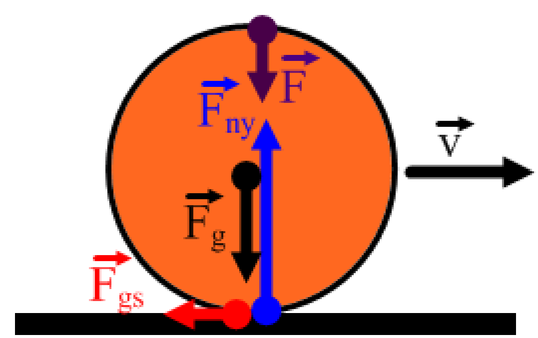
$\mu_t > \mu_{cs}$ mindig

2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekszik gátolni. Csak az anyagi minőségtől (μ) és a felületeket összenyomó erőtől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

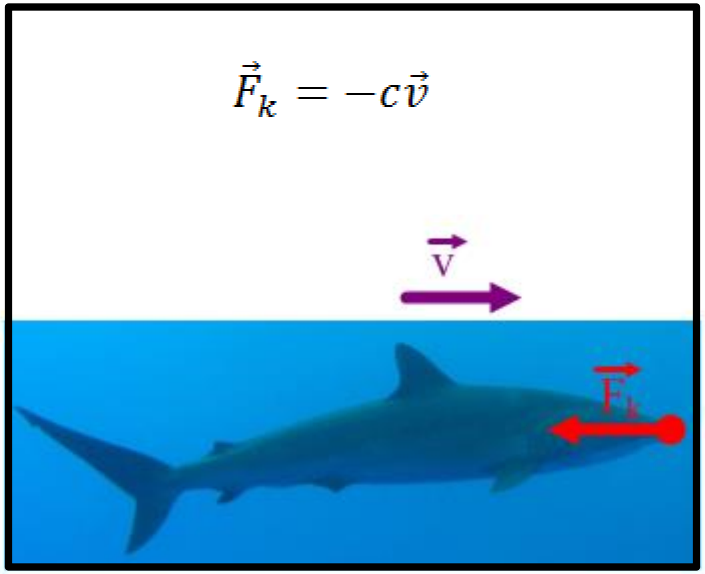
3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban.
(pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)

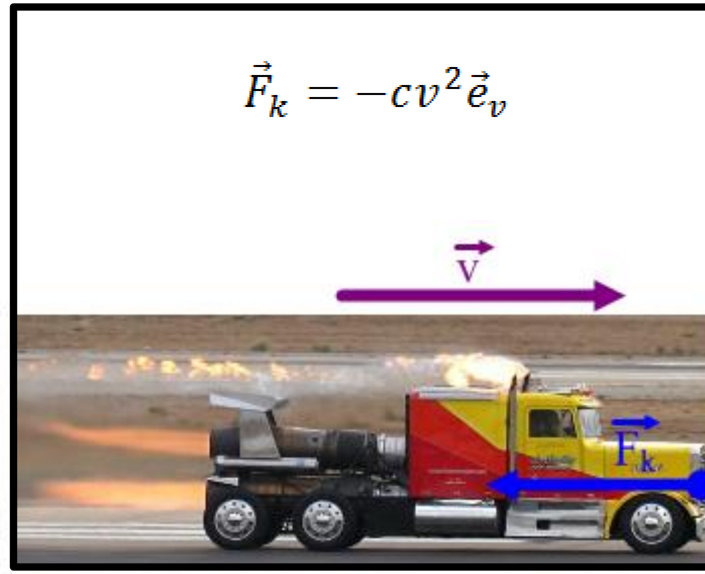


$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

Közegellenállás vagy légellenállás

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, és azzal ellentétes irányú.



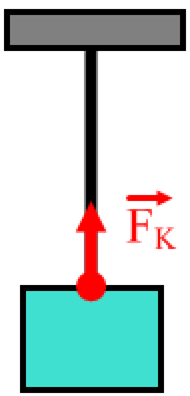


Az arányossági tényező *c* függ:

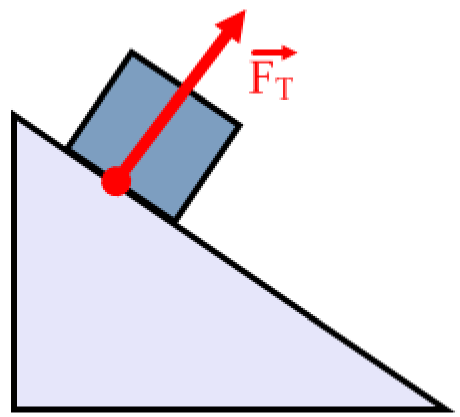
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

Kényszererők

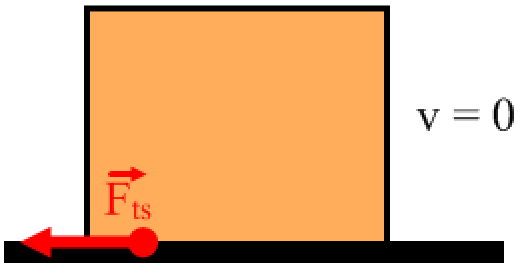
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. törvényét, akkor megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtörvényeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

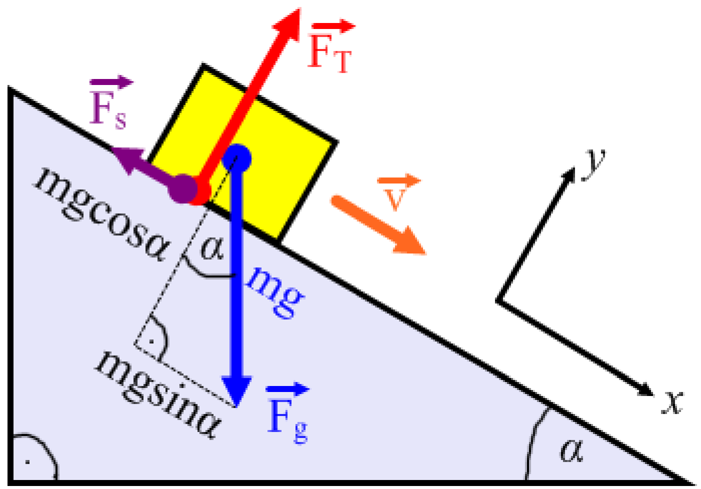
$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ex}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \\ m\ddot{y} &= F_{ey}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \\ m\ddot{z} &= F_{ez}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \end{aligned}\right\} \quad \text{másodrendű, csatolt differenciálegyenletek}$$

Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.
A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája: $\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$
Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete):

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Példa: Lejtőn mozgó test

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét: $$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$$



ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az *y* irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$(x) \quad m\ddot{x} = ma_x = mgsin\alpha - F_s$$
$$(y) \quad m\ddot{y} = ma_y = 0 = F_T - mgcos\alpha$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mgcos\alpha$$

Beírva az *(x)* egyenletbe a súrlódást:

$$ma_x = mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha$$
$$a_x = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$$

Ha $a_x < 0$ jön ki megoldásnak:
- a lefelé csúszó test lassul

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:
- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ($\mu_t F_T$)

Lendület

Lendület (impulzus): A test tömegének és sebességének szorzata.
vektormennyiség: iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Lendülettétel: Az lendület erő hatására változik meg.
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

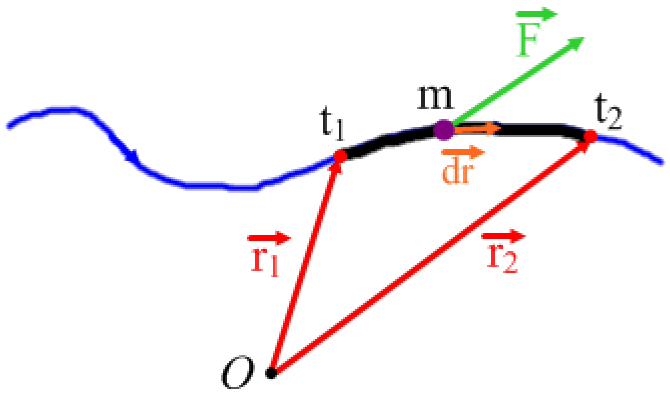
Az okozott lendületváltozás t_1 és t_2 között az eredő erő által:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \, dt$$

tömegtől független

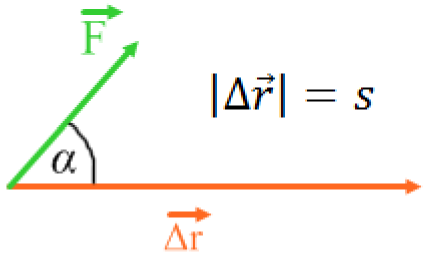
Munka

<u>Munka:</u> Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1 \atop (g)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

<u>Speciális eset:</u> A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$|\Delta\vec{r}| = s$$

$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos\alpha \, dr = F \cos\alpha \int_g dr = Fs \cos\alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat ($\alpha = 0$): $W = Fs$

Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (a mozgás pályája egyenes vonalú) $\rightarrow a_x \rightarrow a$

- t idő múlva sebessége: $v = at$, a megtett út pedig: $s = x = \frac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka: $W = Fs = ma\frac{a}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

Munkatétel: A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett munkával.

$$W = \Delta E_K$$

Teljesítmény

Teljesítmény: Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

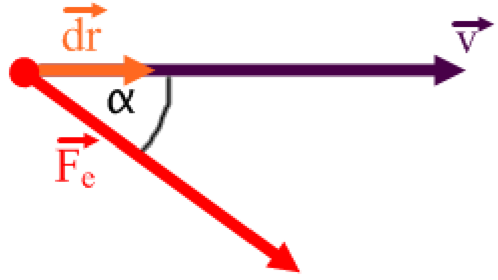
$$P = \frac{dE}{dt}$$

(lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia)

A mechanikai **teljesítménytétel**: A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával: $P = \frac{dE_K}{dt}$

Az elemi munka: $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_k$

A munkatétel felhasználásával: $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

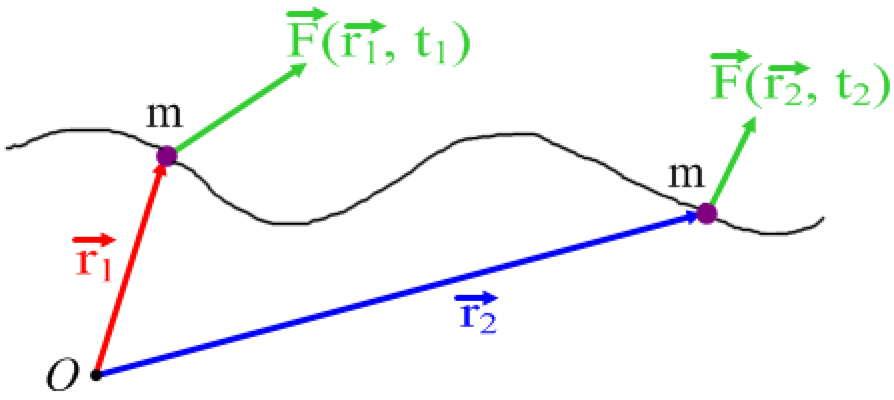


Végrehajtva egy változótranszformációt:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_{1,g}}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt$$

Fizikai mező (erőtér)

Fizikai mező: Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.
Tehát az $\vec{r}$ és t az erő vektorfüggvény változói: $\vec{F}(\vec{r},t)$

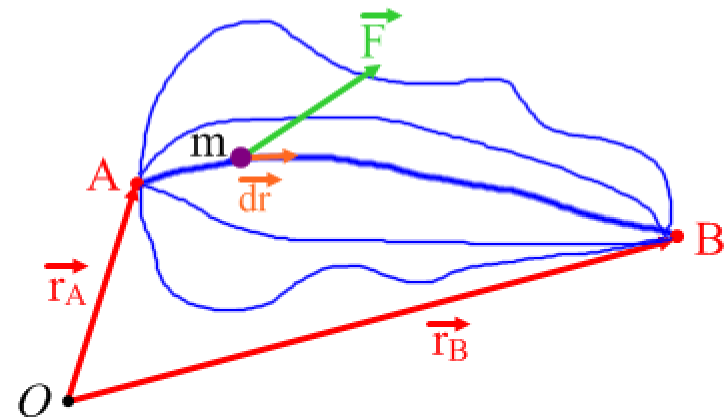


- Az erőtér lehet időtől független (**stacionárius**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0.$
  Ekkor az erő csak a helytől függ: $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőtér lehet helytől független (**homogén**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$
  Ekkor az erő csak az időtől függ: $\vec{F}(t)$

Konzervatív erőterek

Konzervatív erőtér: Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

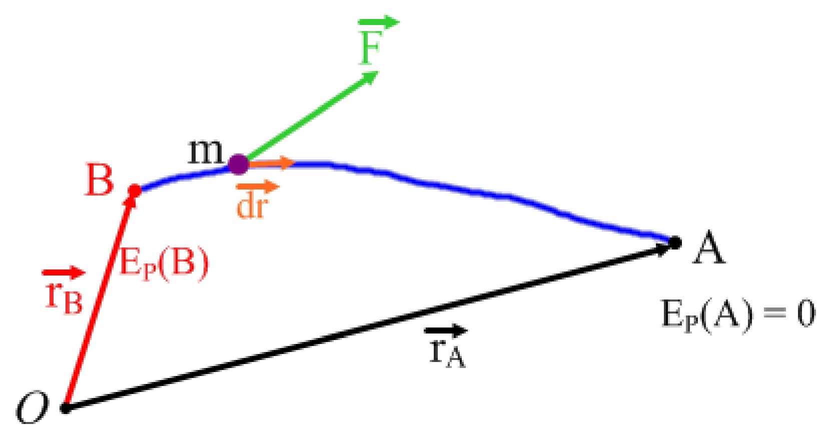


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

Potenciális (helyzeti) energia:

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a tér végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_P(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



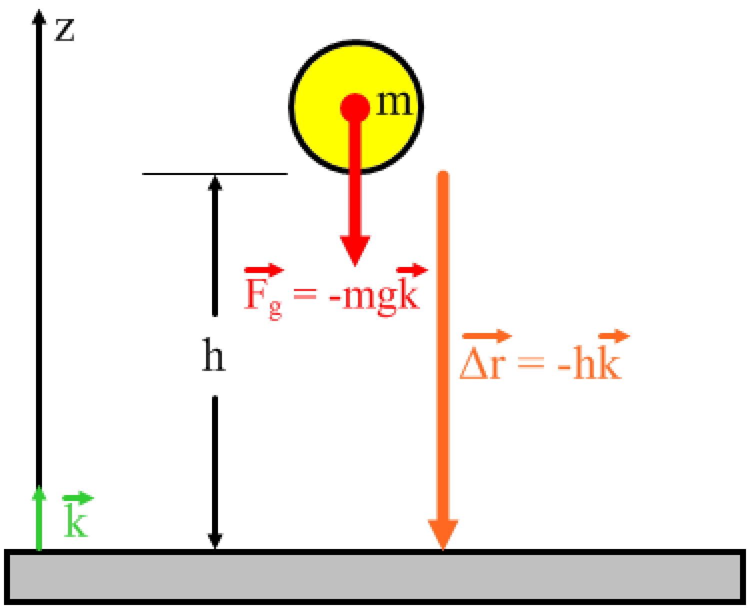
Példa: súlyerő munkája

Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy F_g = 20N súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$E_P(h) = W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^{0} (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) =$$

$$= \int_{h}^{0} -mg\, dz = -mg[z]_h^0 = mgh$$



Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a $W = Fs$ képlet is, tehát a $W = (mg)h = mgh$ egyből látható.

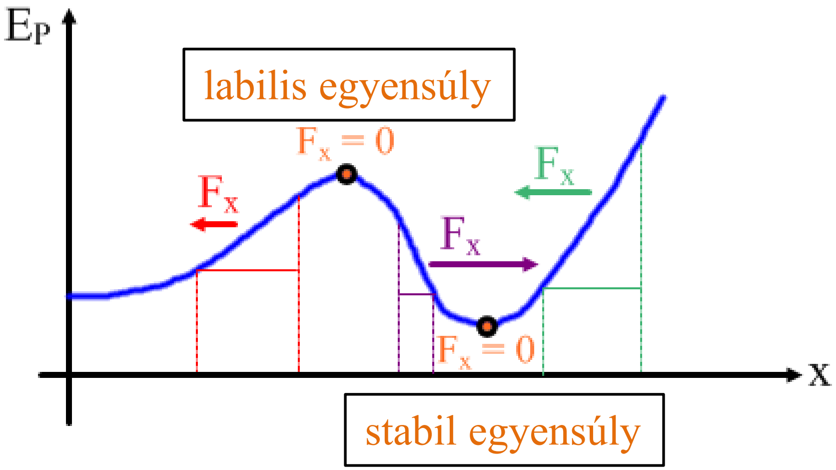
vagyis esetünkben: W = (20N)(80m) = 1600J

Az energiaminimum elve

Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.
<u>Megfordítva:</u> Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

<u>Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban:</u> $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

<u>**Energiaminimum elve:**</u> Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).



<u>Három dimenzióban:</u>

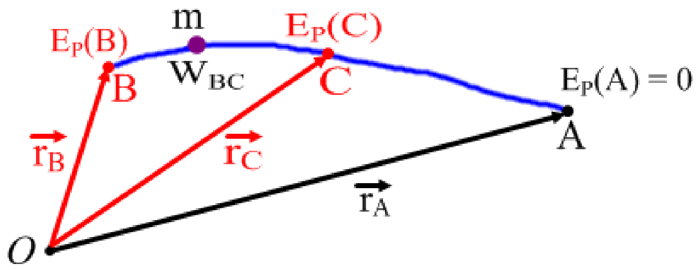
$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} =$$

$$= -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\nabla E_P = -\mathrm{grad} E_P$$

Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test *B*-ből *C*-be mozdul.



Ekkor bármely *B* és *C* pontokra: $E_P(B) - E_P(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_P = W_{BC} = \Delta E_K$$

Ennek az egyenletnek a differenciális alakja: $-dE_P = \delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dE_K$

Tehát az **elemi munka a potenciális energia teljes differenciálja**.

Az eredeti egyenletet átrendezve: $E_P(B) + E_K(B) = E_P(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_P + E_K$$

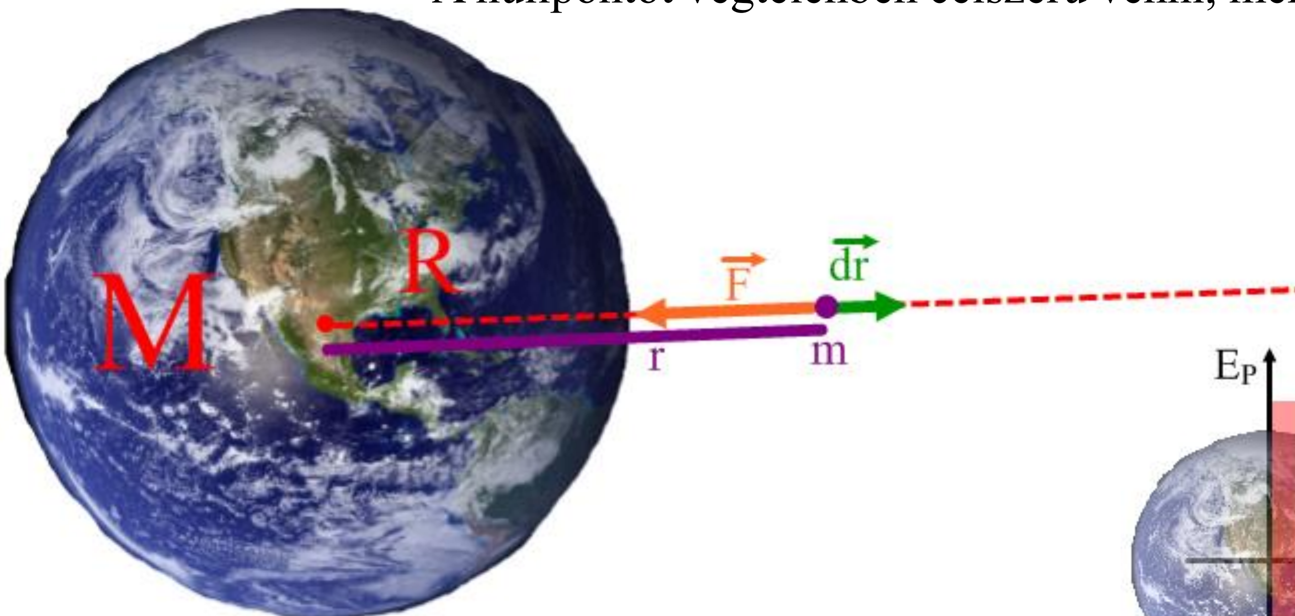
Ez a mechanikai energia konzervatív erőtérben megmarad: $E_M(B) = E_M(C)$

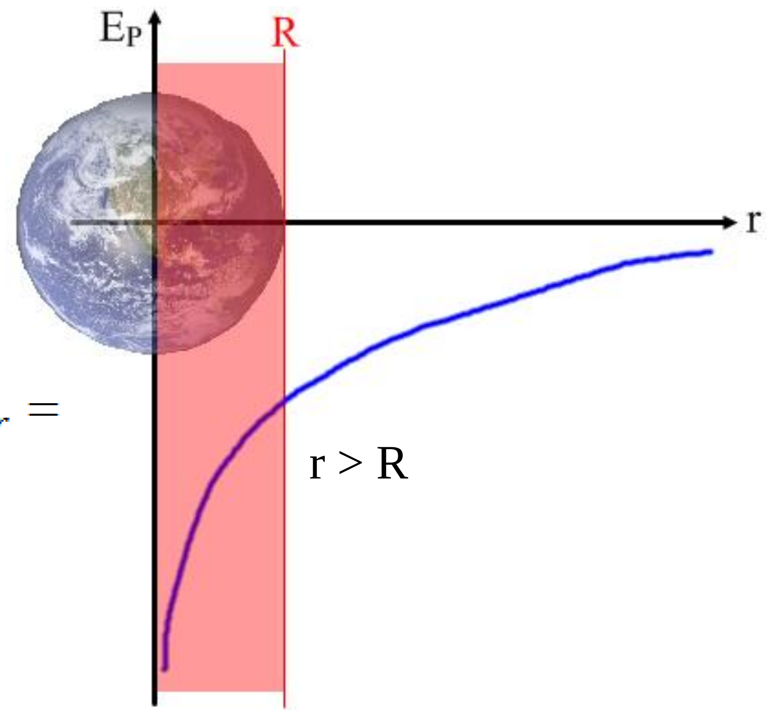
Példák konzervatív erőterekre

Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben

Legyen a M tömegű test rögzítve, és tőle r távolságban kiszámoljuk a m tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert r = 0 problematikus.





$$E_P(\vec{r}) = W_{\vec{r},\infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\frac{\gamma M m}{r^2}\vec{e}_r\right) dr\vec{e}_r =$$

$$= \int_{r}^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r}$$

Rugóerő potenciális energiája

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.
Ez konzervatív erőteret eredményez.
Az *x* hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$E_P(x) = W_{\vec{r},O} = \int_{\vec{r}}^{O} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{O} (-Dx\vec{\imath})\, dx\vec{\imath} =$$

$$= \int_{x}^{0} -Dx\, dx = -D\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^0 = \frac{1}{2}Dx^2$$