Kinematika

A mozgás matematikai leírása, a mozgást kiváltó ok feltárása nélkül.

Helyvektor és elmozdulás

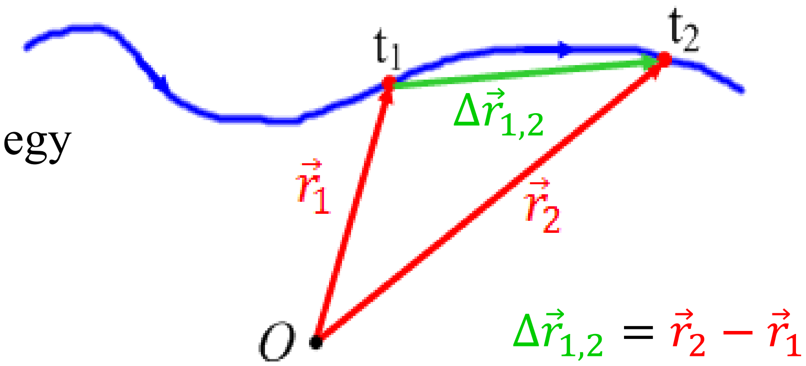
Egy test helyzetét és helyzetváltozását csak más testekhez viszonyítva írhatjuk le. Ezért először választani kell egy vonatkoztatási rendszert:

Egy test (pontszerű) helyzetét a t időpillanatban egy $\vec{r}(t)$ **helyvektorral** jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a testhez mutat.

A test mozgása során a térben kijelöli a **pályagörbét**.

Az **elmozdulás** a helyvektor megváltozása egy eltelt Δt idő alatt (itt $\Delta t = t_2 - t_1$).

$$\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



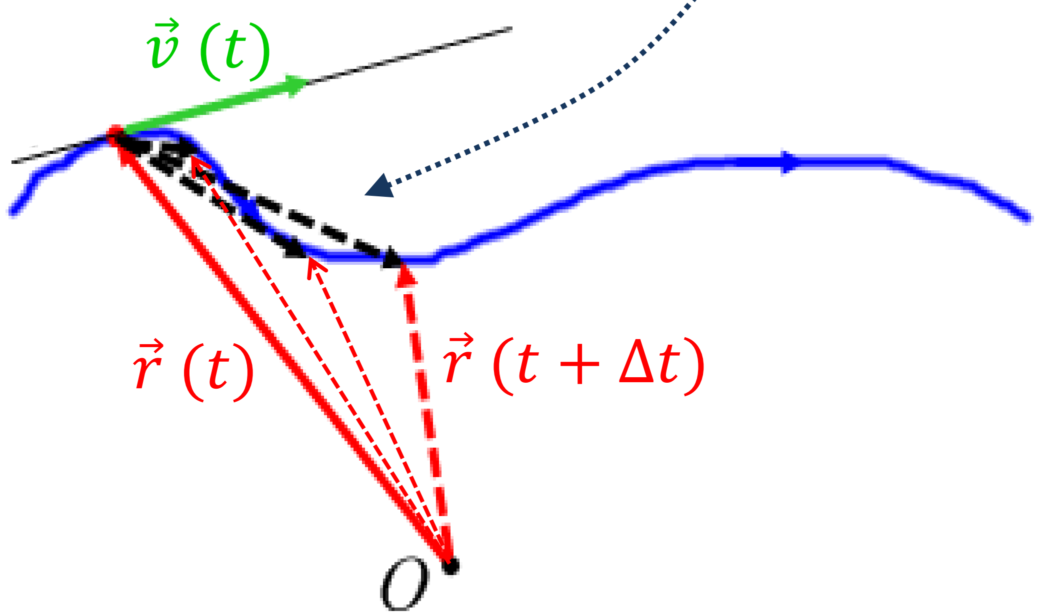
Sebesség

A **sebesség** azt jellemzi milyen gyorsan változik a helyvektor.
FONTOS: a sebesség vektormennyiség, iránya és nagysága is számít!

Ha a sebesség iránya és/vagy nagysága változik (általában igen), akkor pontos értéket csak kis Δt időre kaphatunk. Teljesen pontos, ha $\Delta t \to 0$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Elmozdulás-vektorok egyre kisebb Δt esetében



Gyorsulás

A **gyorsulás** a sebességvektor változási gyorsasága:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

FONTOS: gyorsulás akkor is van ha csak a sebesség iránya változik. Pl. kanyarodás

Ha a gyorsulás, mint az idő függvénye, valamint a kezdeti hely $\vec{r}_0$ és a kezdeti sebesség $\vec{v}_0$ ismert, akkor a mozgás pályája meghatározható:

Első lépés a sebesség idő függvény meghatározása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{a}dt = d\vec{v}$$

Bármely t_1 időpontban a sebesség: $\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt + \vec{v}(t_0)$

A végén a t_1 paraméter helyett simán t-t írunk, és megvan a $\vec{v}(t)$

A sebességfüggvény ismeretében a helyvektor bármely t_1 időpontban hasonlóképpen meghatározható:

$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt + \vec{r}(t_0)$$

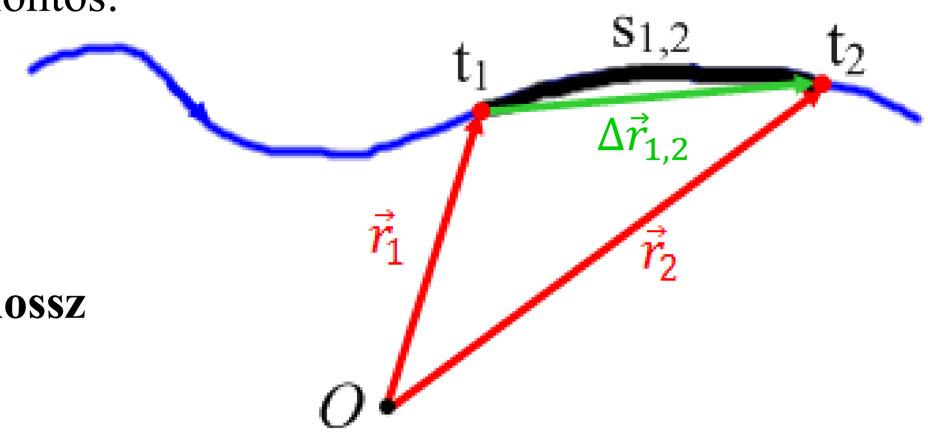
A végén a t_1 paraméter helyett simán t-t írunk, és megvan az $\vec{r}(t)$ függvényünk.

Úthossz és átlagsebesség

Egy adott idő alatt megtett **úthossz** a közben befutott pályagörbe hosszát jelenti.
Ez már csak egy skalár mennyiség.

Számításánál csak a sebesség nagysága fontos:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\, dt$$



Az ábra szemlélteti a különbséget az **úthossz**
és az **elmozdulás(vektor)** között!

Az **átlagsebesség** (skalár) az a sebességnagyság
amivel egyenletesen haladva ugyanazt a hosszúságú
utat tenné meg a test ugyanakkora idő alatt:

Nem vektor jel,
csak egy vonás!

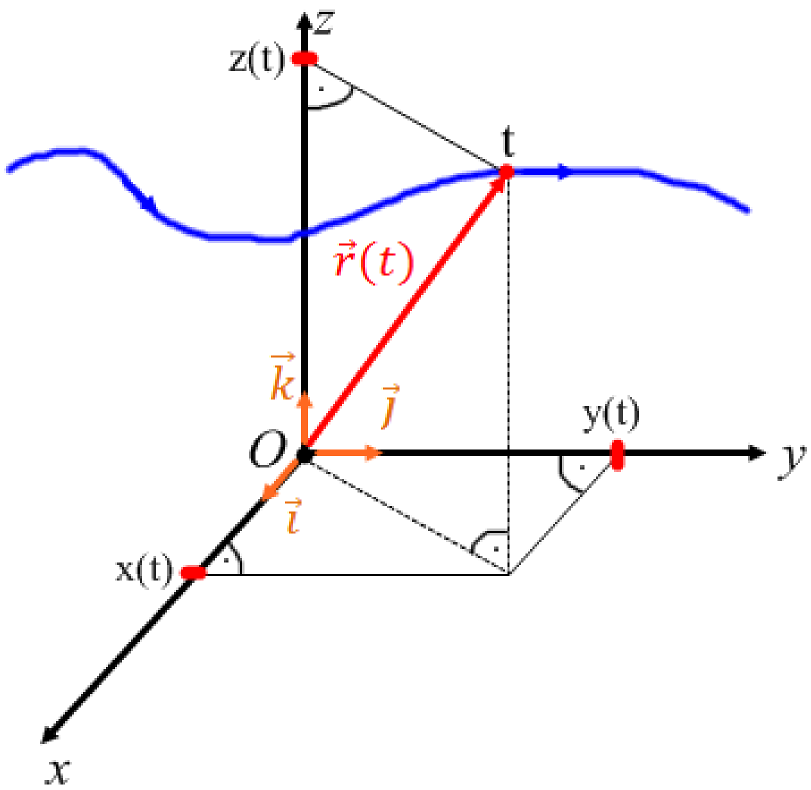
$$\bar{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}$$

Derékszögű Descartes koordináta rendszer

Segítségével a pálya egyenlete:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Az *x(t), y(t), z(t)* függvények a **koordináták**.



Az $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ egységvektorok a **bázisvektorok**.

Pitagorasz tételével: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

A sebesség:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

A sebesség nagysága: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

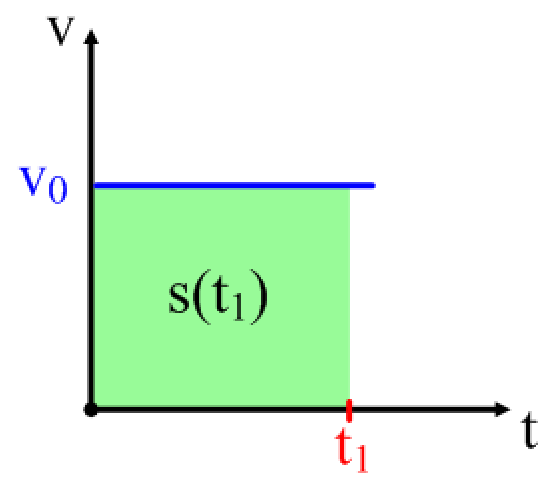
A gyorsulás és nagysága:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

A mozgás 1 dimenziós, ezért elég egy koordináta ha a mozgás irányába vesszük fel azt az egy tengelyt (pl. *x*).
Ebben az egyszerű esetben:

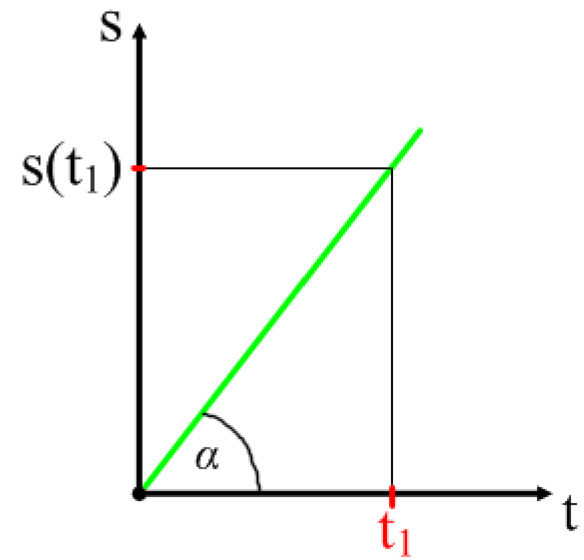


$$v_x = v \qquad \Delta x = s$$

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t_1} v\, dt = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v\Delta t$$

Tehát ha $t_0 = 0$, akkor visszakapjuk az $s = vt$ képletet.

A megtett út a sebesség-idő grafikon alatti terület.



Tehát az úthossz lineáris függvénye az időnek, a meredekség pedig a sebesség:

$$\tan\alpha = v = \frac{s}{t}$$

Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Ha a kezdősebesség vektor és a gyorsulás vektor egy egyenesbe esik, akkor a test annak az egyenesnek a mentén fog mozogni (ismét elég egy koordináta, pl. *z*):

tehát a test a *z* tengely irányában halad állandó a_z gyorsulással, és időtől függő v_z sebességgel (ezek a komponensek lehetnek negatívok is!). A többi komponens (*x*, *y*) nulla. A sebesség egy t_1 időpontban:

$$v_z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a_z(t)\,dt + v_z(t_0) = a_z(t_1 - t_0) + v_z(t_0)$$

legyen $t_0 = 0$

$v_z(t_0) = v_{z0}$

Ezekkel: $\boxed{v_z(t) = a_z t + v_{z0}}$

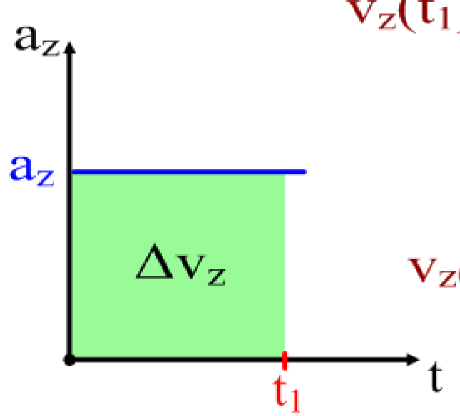
$(\Delta v_z = a_z \Delta t\,)$

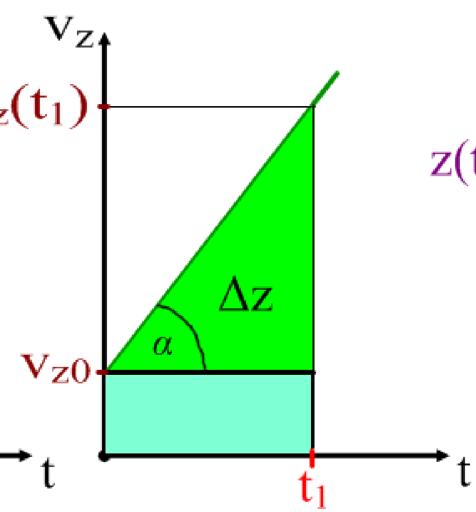
A test helye: $z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_z(t)\,dt + z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (a_z t + v_{z0})\,dt + z(t_0)$

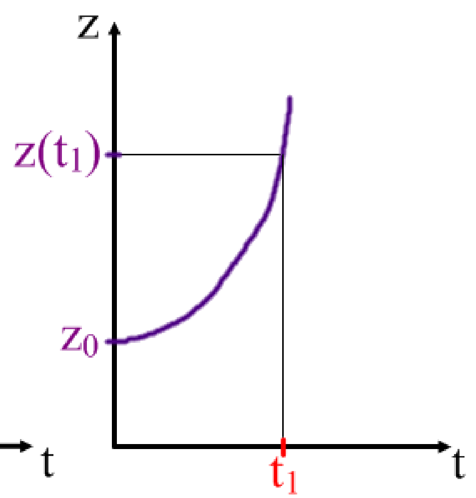
legyen $z(t_0) = z_0$

Tehát ha $t_0 = 0$ továbbra is:

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{z0} t + z_0}$$



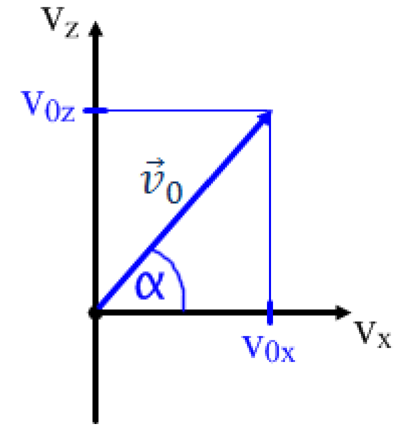




Ferde hajítás

A gyorsulás állandó (g), de nem esik egybe a kezdősebesség vektor irányával:
A kezdeti sebesség felbontása (2D – x és z):

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$



A gyorsulás: $\vec{a} = -g\vec{k}$

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + 0\vec{j} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor: $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{i} + 0\vec{j} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t\right)\vec{k}$

A test földet ér amikor $z = 0$:

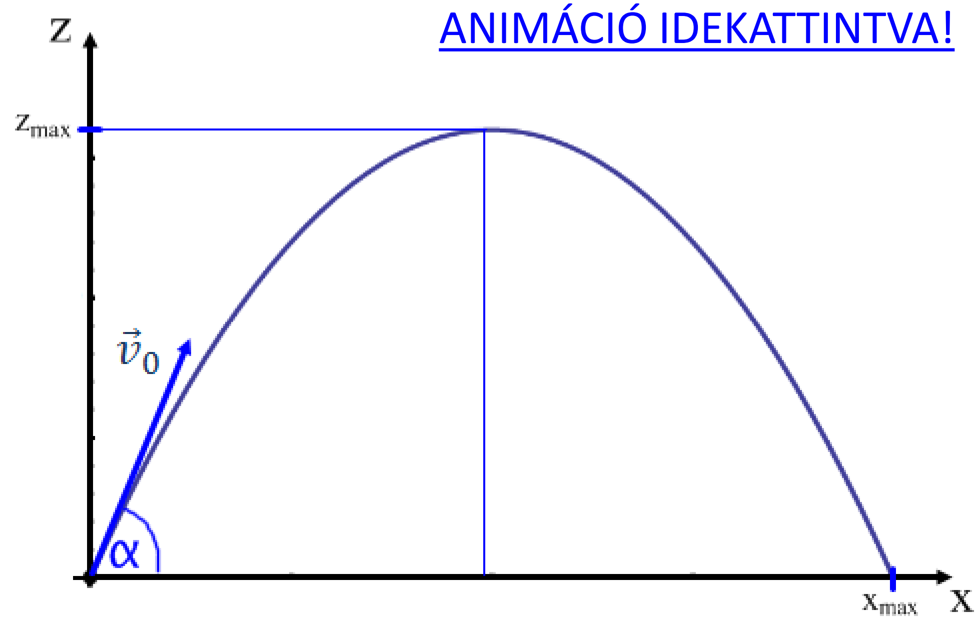
$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t = 0$$

Megoldva az időre: $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

Behelyettesítve az x koordinátára megkapjuk a hajítás távolságát:

$$x_{max} = \frac{2v^2{}_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!]



Síkbeli polár koordináta rendszer

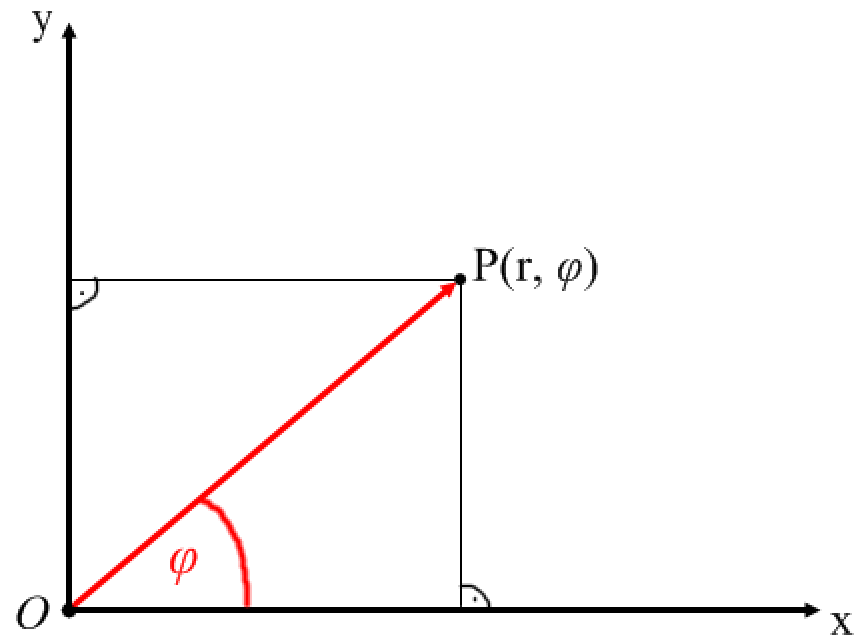
A két koordináta: egy ponttól mért távolság és egy iránytól mért szög.
Körmozgás leírására jól használható, ha az origó a kör középpontjában van.

Pitagorasz tételével és a tangens definíciójából:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

A koordinátákat a másik irányba kifejezve:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$



A φ szög változási gyorsasága adja a **szögsebességet** (mértékegysége: 1/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

A szögsebesség változási gyorsasága pedig a **szöggyorsulás** (mértékegysége: $1/s^2$):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

SEBESSÉG ÉS GYORSULÁS SÍKBELI POLÁR KOORDINÁTÁKKAL:
VIDEÓ IDEKATTINTVA!

Egyenletes körmozgás

A szögsebesség állandó: $\omega = \text{áll.} = \dfrac{2\pi}{T}$ $\beta = 0$
(ahol T a periódusidő)

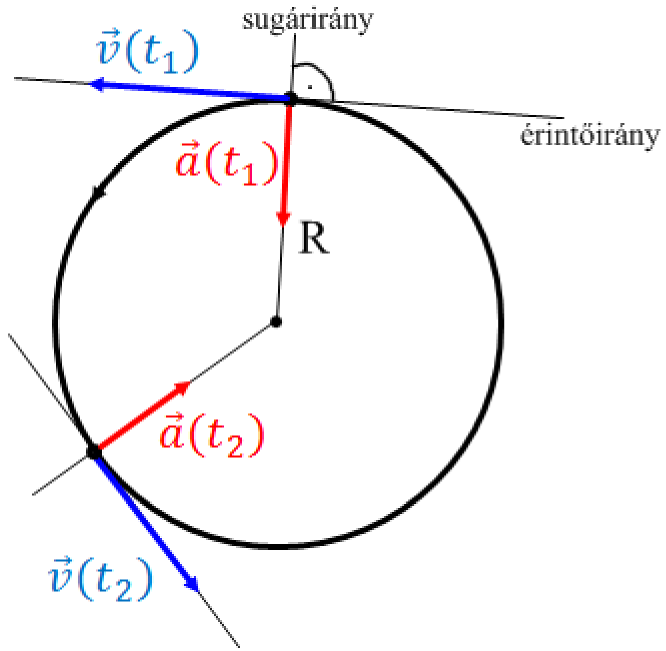
A T idő alatt megtett út tehát a kör kerülete: $s(T) = 2R\pi$

A mozgás sebességének nagysága (kerületi sebesség) is állandó (az iránya viszont nem!):

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

Mivel a sebesség iránya folyamatosan változik, a gyorsulás nem nulla. Nagysága állandó, iránya pedig mindig a középpont felé mutat (centripetális):

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$



ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás β = állandó, és emiatt a szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t) = \beta t + \omega_0$$

Az állandó szöggyorsulás miatt a gyorsulásnak lesz egy állandó nagyságú érintőirányú (tangenciális) komponense. Emiatt a sebesség nagysága egyenletesen változik:

$$a_t = \beta R = \frac{dv}{dt}$$

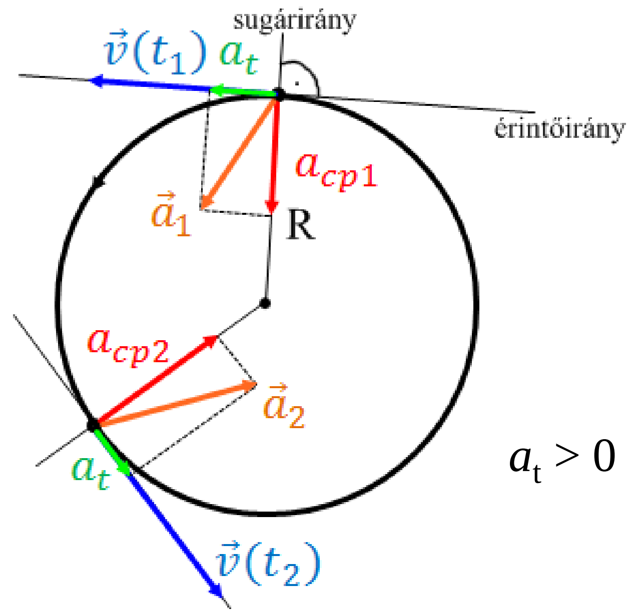
A gyorsulás nagysága Pitagorasz tételéből:

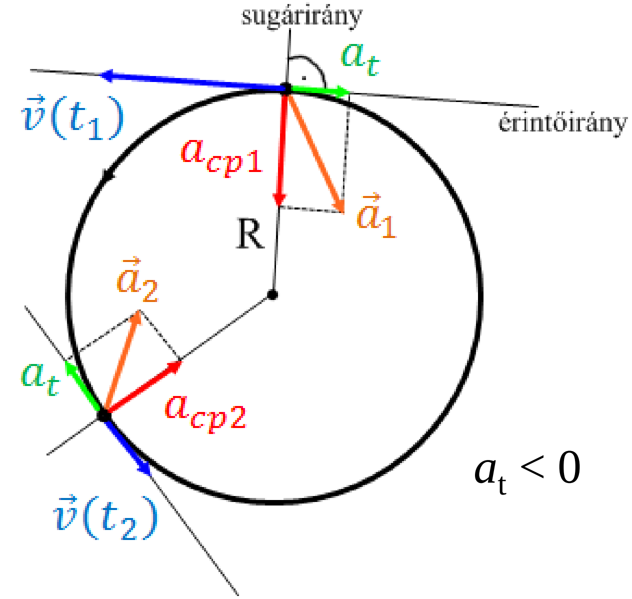
$$a = \sqrt{{a_{cp}}^2 + {a_t}^2}$$

A megtett út csak a tangenciális gyorsulás komponenstől függ (a másik komponens csak az irányt változtatja):

$$s(t) = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t$$

ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!





Dinamika

A dinamika feladata a test(ek) gyorsulását okozó erők matematikai leírása.

Az erők kölcsönhatások során lépnek fel.
Ezek a kölcsönhatások lehetnek:
- test és test között
- mező(erőtér) és test között

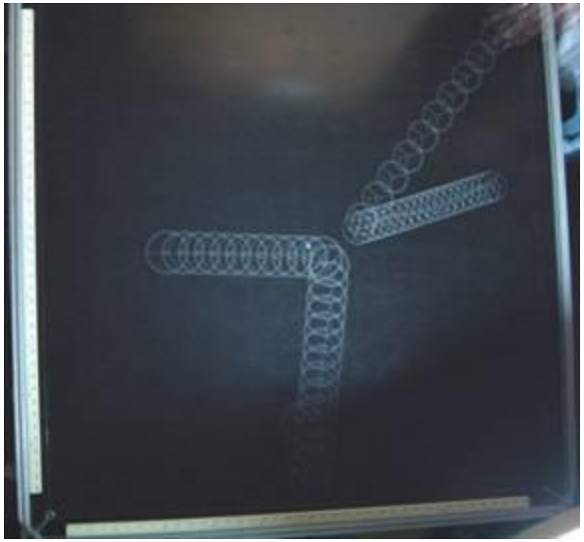
A magára hagyott test egy olyan test, amely nem áll kölcsönhatásban sem más testtel, sem pedig mezővel.

Newton törvényei: I.

<u>Newton I. törvénye</u>: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

ugyanez kicsit pontosabban megfogalmazva:

<u>Kiválasztási axióma</u>: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



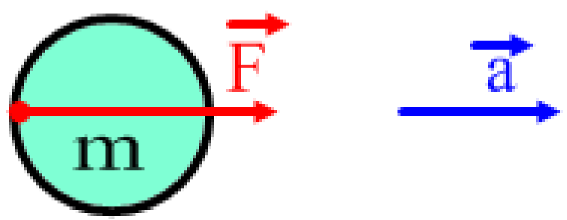
A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít.
Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

Newton törvényei: II.

Ha egy pontszerű testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

<u>Newton II. törvénye</u>: Egy állandó tömegű pontszerű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

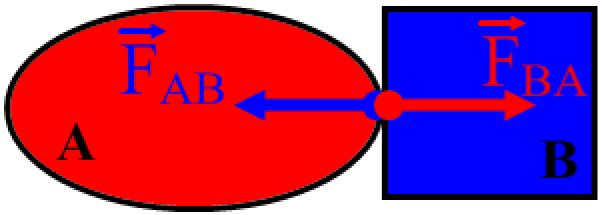


Newton törvényei: III.

Newton III. törvénye: (Hatás-ellenhatás törvénye)
Ha az *A* test a *B* testre $\vec{F}_{BA}$ erőt fejt ki, akkor a *B* test is erőt fejt ki az *A* testre.

Ez az $\vec{F}_{AB}$ erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az $\vec{F}_{BA}$ erővel.

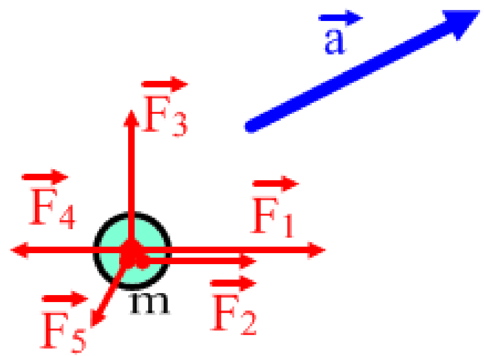
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

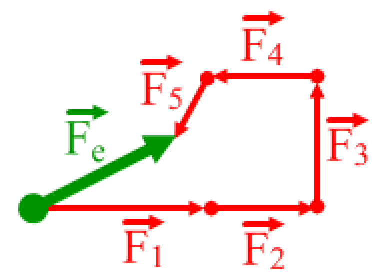


Newton törvényei: IV.

<u>Newton IV. törvénye</u>: (A szuperpozíció elve)
Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$





$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i$$