Hullámokról általában: alapösszefüggések a harmonikus hullámra. A Doppler-effektus

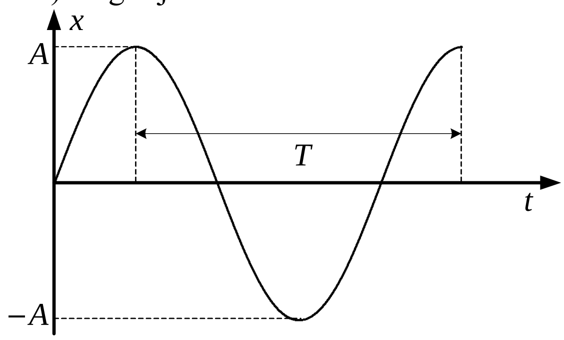
A harmonikus rezgés

Rezgések és hullámok a fizikának és a műszaki tudományoknak nagyos sok ágában előfordulnak, pl. a hangtanban. Ha egy gitár egyik húrját festékpöttyel megjelöljük, a festett pont is rezgést végez. A legegyszerűbb rezgés a (szinuszos) harmonikus rezgés. Ilyet végeznek pl. szilárd test atomjai egyensúlyi helyzetük körül.

Akkor végez egy tömegpont **harmonikus rezgést**, ha rá egy erő hat, a rugalmas erő erőtörvénye: $F_x=-Dx$, ahol x az egyensúlyi helyzettől való kitérés (ill. ha az erők eredője a fenti rugalmas erő). Tehát ez egy visszahúzó erő, ami arányos a kitéréssel, csak ellentétes irányú. (Ebből kapjuk a mozgásegyenletet: $m\ddot{x}=-Dx$. Ez egy másodrendű közönséges differenciál-egyenlet, az általános megoldása, a **mozgástörvény**:

$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\delta)},$$

ahol $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$, továbbá *A* az amplitúdó (a kitérés maximális értéke), δ pedig a kezdőfázis. Tehát szinuszos (harmonikus) rezgés jön létre.



A periódusidő a legkisebb olyan T idő, amelyre x(t)=x(t+T) bármely t-re. A körmozgáshoz hasonlóan

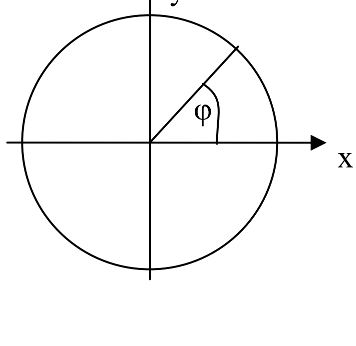
$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgés kapcsolata

Induljunk ki abból, hogy egyenletes körmozgásnál a szögsebesség állandó: φ=ωt. Ekkor az x koordinátát az rcosφ, az y-t pedig az rsinφ formula adja meg. Beírva φ helyére ωt –t, kapjuk, hogy $x(t)= r\cdot\cos(\omega t)$ és $y(t)= r\cdot\sin(\omega t)$, tehát mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.

Más szavakkal, az egyenletes körmozgás felbontható két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgásra, amelyek fáziskülönbsége π/2 (hisz $\cos(\omega t)= \sin(\omega t+ \pi/2)$).

Emiatt a hasonlóan jelölt mennyiségek nemcsak formailag hasonlóak, hanem tartalmilag is megfelelnek egymásnak: T a keringési vagy periódusidő, ω a szög-sebesség vagy a körfrekvencia.

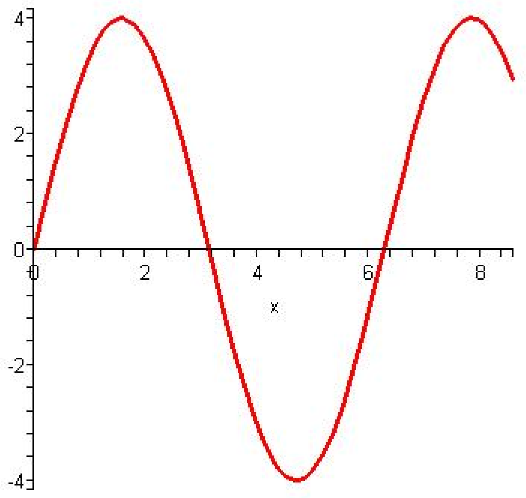


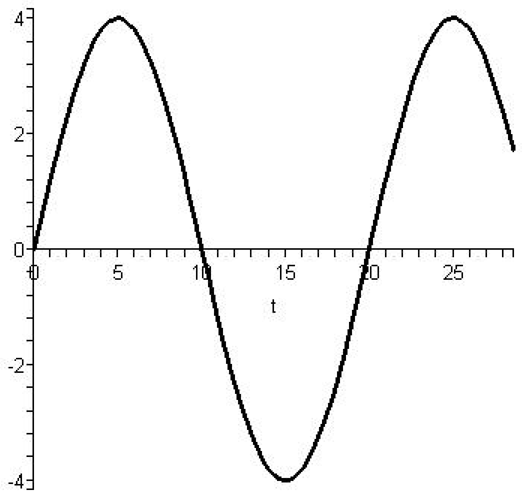
Hullámok

Tekintsünk egy haladó hullámot, pl. vízhullámot, a hullám forrásától elég távol. Ha egy konkrét időpillanatban lefényképeznénk, azt látnánk, hogy térben (megközelítőleg) periodikus, a terjedés irányában. Ha viszont egy adott pontban vizsgáljuk az időbeli viselkedést, akkor láthatjuk, hogy hullámvölgyek és hullámhegyek haladnak át az adott ponton, időben periodikusan. Legyen *A* az a mennyiség, amelyik hullámszerűen változik, vízhullámoknál pl. a vízfelszín nyugalmi helyzethez képesti magassága. Tegyük fel, hogy a hullám *x* irányban terjed, a többi iránnyal nem foglalkozunk. A legegyszerűbb **hullámfüggvény** pl. az y tengely irányába terjedő egy dimenziós hullámra:

$$x = A\sin\left(\omega t - ky\right), \qquad (1)$$

ahol *k* a hullámszám, ω a körfrekvencia. Rögzített *y*-re *x* idő szerint periodikus, pontosabban harmonikus rezgőmozgást végez $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periódusidővel. Hasonlóan, rögzített t-re pedig a térben periodikus a függvényalak.





Vizsgáljuk meg a térbeli periodicitást. Tegyük fel, hogy egy adott y_1-hez van olyan y_2, hogy $x_1 = x_2$ bármely időpillanatban, azaz

$$A\sin\left(\omega t - ky_1\right) = A\sin\left(\omega t - ky_2\right)$$

Ebből következik, hogy az argumentumok egymástól 2π többszörösével térnek el. Ebből minket az érdekel, hol van az y_1-hez legközelebbi y_2, ahol $x_1 = x_2$, tehát az argumentumok legkisebb különbségét vesszük: $ky_1 + 2\pi = ky_2$, amiből $y_2 = y_1 + \frac{2\pi}{k}$.

Tehát az *x* változása $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ szerint periodikus, a λ mennyiség neve: <u>hullámhossz</u>, mértékegysége a méter. Ezeket beírva kapjuk:

$$x = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right)\right] \qquad (2)$$

Az ábrán látható példán λ=2π, ebből kapjuk, hogy k=1. A második ábráról T=20, vagyis f=1/20 és ω=π/10. A függőleges tengelyen a kitérés van, ennek maximális értéke, az amplitúdó A=4, ez mindkét ábrából leolvasható.

Ez a hullám az *y* tengely pozitív irányába terjed, kérdés, milyen sebességgel. Ha *dy* távolságot megteszünk a haladás irányában (jobbra), ott *dt*-vel később zajlik le minden (pl. ugyanaz a hullámvölgy *dt* idővel később ér oda), vagyis ha y-hez hozzáadunk *dy*-et és *t*-hez hozzáadunk *dt*-t, az argumentum nem változik:

$$ft-\frac{y}{\lambda}=f\left(t+dt\right)-\frac{y+dy}{\lambda},$$

ebből $\frac{dy}{\lambda}=fdt$, azaz $\frac{dy}{dt}=f\lambda$, vagyis kaptunk egy fontos összefüggést a hullám terjedési sebességének nagyságára (**a hullámmozgás alapösszefüggése**):

$$\boxed{c=f\lambda}$$

Ezzel $x=A\,\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(y-ct\right)\right]$ (3)

A hullámfüggvény (1) , (2) és (3) alakja ekvivalens, de míg az első két alak az általa leírt fizikai mennyiség idő- és hely szerinti periodicitását hangsúlyozza, a (3) alak inkább a fázis c sebességű mozgását. (A (3) alakban a zárójeles rész előjelét megfordítottuk.) Hanghullám esetén *c* a hangsebesség, fényhullám esetén a fénysebesség. Ismeretes, hogy az emberi fül számára (közelítően, kortól is függően) a 20Hz és 20kHz közötti frekvenciájú hangok hallhatóak. Az alacsonyabb frekvenciájú hangokat infrahangnak, a magasabbat ultrahangnak nevezzük.

Ha a hullámfüggvény vektormennyiséget ír le (a képletekben *A* helyett $\vec{A}$ áll), a hullámokat két csoportba oszthatjuk: transzverzális hullámnál $\vec{A}$ merőleges a terjedés irányára (ilyenek pl. a vízhullámok), longitudinális hullámnál egy egyenesbe esnek. Utóbbira példa, ha egy vékony rúd végére ráütünk a rúd hossztengelye irányába mutató sebességgel, ekkor az $\vec{A}$ mennyiségnek a részecskék egyensúlyi helyzetétől való kitérése felel meg, ez pedig a rúd hossztengelyének irányába mutat, emellett a hullám is a rúd megütött végétől a másikig terjed, a két irány megegyezik.

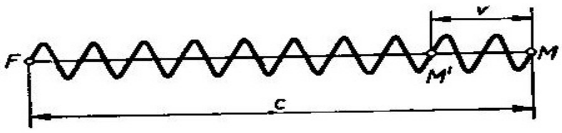
Megjegyezzük, hogy léteznek *állóhullámok* is, amelyekre c=0. Azonban őket nem a fenti síkhullám függvény, hanem pl. a $\sin(kx)\sin(\omega t)$ függvény írja le, és tipikusan visszaverődéskor keletkeznek. Állóhullámokkal a továbbiakban nem foglalkozunk.

A **Doppler-effektus**

Christian Doppler (1803-1853) osztrák fizikus 1847 és 1849 között a Miskolci Egyetem jogelőd intézményében, a selmecbányai Bányászati és Erdészeti Akadémián a matematika, fizika és mechanika professzora volt.

Ha a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, akkor a megfigyelő a hullám frekvenciáját és hullámhosszát a kibocsájtott hullámétól eltérőnek érzékeli. Ez az effektus, amely a felfedezőjéről a Doppler-effektus nevet kapta igen sok műszaki alkalmazásnak (pl. lézeres, radaros vagy ultrahangos sebességmérés) képezi alapját.
Mi itt most az akusztikai Doppler-effektussal foglalkozunk, erre mindenkinek lehet hétköznapi tapasztalata is. Például a közeledő vonat füttyét magasabbnak halljuk, mint amikor már távolodik tőlünk. Tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor a hangforrás, illetve megfigyelő sebessége az őket összekötő egyenesen van.

a) a közegben nyugvó hullámforráshoz (F) képest v sebességgel mozgó megfigyelő (M) időegység alatt nemcsak az f számú rezgést fogja fel, hanem azokat is, amelyek a v hosszúságú szakaszra esnek (v/λ).

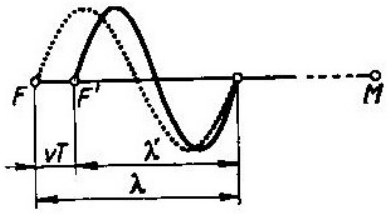


Ennek megfelelően a megfigyelő által észlelt frekvencia

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \tag{4}$$

ahol a + jel a közeledő, a – jel a távolodó megfigyelőre vonatkozik.

b) Ha a hullámforrás mozog a közegben nyugalomban lévő megfigyelőhöz képest, akkor (közeledő forrás esetén) a rezgés első fázisát még távolabb bocsájtja ki, mint (T idő múlva) az utolsó fázisát.



Ez az ábrán is mutatott módon a hullámhossz lerövidülését okozza

$$\lambda' = \lambda - vT ,$$

amely a

$$f' = f\frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}} \tag{5}$$

módosult frekvenciára vezet. Itt a – előjel a fenti esetre, a + pedig a távolodó forrásra vonatkozik.

c) Ha mozgó tárgyról visszaverődő hullámot detektálunk az álló hullámforrás mellett, akkor mindkét fenti képletet kell egyszerre alkalmazni. U. i. a mozgó tárgy az a) pont szerint detektálja az *f'*-t, majd az általa kibocsájtott *f'*-t a b) pont szerinti képlettel kell átszámítani a detektált *f'* frekvenciát. A végeredmény közeledő visszaverő tárgy esetén:

$$f^{"} = f \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \tag{6}$$

Megjegyzendő, hogy elektromágneses hullámok esetén nincs hullámzó közeg, csak relatív mozgás van, tehát az a) és b) eset nem különbözik. Ekkor mindkét esetre a

$$f^{'} = f \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \tag{7}$$

képlet alkalmazandó. A (7) képlet kétszeri alkalmazása a (6) képletre vezet, tehát a v sebességgel mozgó tárgyról visszaverődő elektromágneses hullámok frekvenciáját a (6) képlet jól adja meg.