KOVÁCS ENDRE, PARIPÁS BÉLA,

FIZIKA II.

2

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

II. AZ ELEKTROMOS ÁRAM

1. ALAPFOGALMAK

Tekintsünk két feltöltött vezetőt. Legyen $U_1 > U_2$. Ha a két feltöltött fémtestet vezetővel összekötjük, akkor a magasabb potenciálú test (pozitív) töltést veszít, a másik pedig töltést vesz fel. A töltésáramlás addig tart, ameddig az egyesített vezető test potenciálja ki nem egyenlítődik. A folyamatban a potenciál (intenzív mennyiség) kiegyenlítődése következik be töltés áramlás (extenzív mennyiség) révén. A potenciálkülönbség a töltések mozgását részben rendezetté teszi, s a rendezetlen mozgásra egy rendezett mozgás szuperponálódik. Az elektromos áramlás a töltéshordozók rendezett mozgását jelenti. Az elektromos áramlás létrejöttének feltétele az, hogy legyenek szabad töltéshordozók, és (ha a közeg ellenállása nem nulla), hogy legyen jelen elektromos mező.

Megállapodás szerint **az elektromos áramlás iránya a pozitív töltéshordozók (valóságos vagy elképzelt) áramlásának irányával egyezik meg**. Az áram irányának ez a hagyományos értelmezése a legtöbb vezetőben (pl. fémekben) ellentmond a valóságnak, mivel azokban a negatív töltéshordozók (az elektronok) áramlanak. Ezen tény ellenére áramirányon ma is a hagyományos áramirányt értjük, nem függetlenül attól, hogy az egyenáramra vonatkozó törvényeket hamarabb felfedezték, mint az elektronok létezését.

Elektromos áramerősség

A vizsgált felület teljes keresztmetszetén időegység (másodperc) alatt átáramló (nettó) töltésmennyiséget **áramerősségnek** nevezzük. Jele I, mértékegysége az amper (A) (= C/s).

Ennek megfelelően a töltés mértékegységének időnként az amperórát vagy ampermásodpercet használják. Az elektromos áram (hagyományos értelemben vett) iránya a negatív töltések áramlási sebességével ellentétes, a pozitív töltések elképzelt áramlásának irányával megegyező. A t_1, t_2 időközben az *A* felületen átáramló töltést úgy kaphatjuk meg, hogy az áramerősséget idő szerint integráljuk:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

Kérdés: hány elektron áramlik át a vezető keresztmetszetén másodpercenként, ha az áramerősség 1A? Az elektron töltése (az ún. elemi töltés) e=-1,6·10^{-19}C

Válasz: A töltés Q=IΔt=1C, az elektronok darabszáma N=Q/e=6,25·10^{18}

Egy szokványos háztartási gépben az áramerősség néhány tized vagy néhány amper.

Az emberi testen átfolyó fél amperes áram már valószínűleg halált okoz. A villámokban sok ezer, vagy akár több mint százezer amperes áram is folyhat.

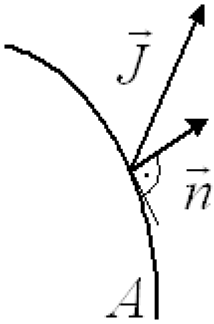
Elektromos áramsűrűség

Az elektromos **áramsűrűség**-vektor abszolút értéke az áramlási irányra merőleges egységnyi keresztmetszeten időegység alatt átáramló töltéssel egyezik meg.

Iránya megegyezik a pozitív töltéshordozók áramlási irányával, nagyságát határértékképzéssel számolhatjuk ki:

$$j = \lim_{A \to 0} \frac{I}{A},$$

ahol *I* az A felületen átfolyó áram. Mértékegysége az A/m^2 = C/(sm^2). Az elektromos áramsűrűség irányított felületre vonatkozó lokális vektormennyiség. Ha elektronok áramlanak a felületi normális irányában, akkor az áramsűrűség-vektor a normálissal ellentétes irányba mutat.



Az áramsűrűség vektor és a felület normálvektora

Az *A* felületen átfolyó áramerősség tehát:

$$I = \int_A \vec{j}\,d\vec{A},$$

de hogyha a $\vec{j}$ a felület minden pontjában ugyanakkora és merőleges a felületre, akkor egyszerűen I=jA.

Áramforrások

Ha a töltésekre egyedül az elektromos mező hat, akkor a kezdeti potenciálkülönbségek hamar kiegyenlítődnek és az áramlás véget ér. A töltésáramlás fenntartásához szükség van olyan idegen (nem elektromos) erőre, amely a pozitív töltéshordozókat visszakényszeríti az eredetileg magasabb potenciálú helyre, és ezzel megteremti a folyamatos töltésáramlás lehetőségét. Az olyan berendezéseket, amelyekben ilyen idegen erők működnek, *áramforrásoknak* nevezzük. A feszültségforrások, vagy áramforrások elektromos energiává alakítanak át valamilyen más energiát, pl.

- mechanikai energiát (elektromos generátorok, dinamók)
- kémiai energiát (galvánelemek, akkumulátorok)
- hőenergiát (termoelemek)
- fényenergiát (fotocella, fényelem)

Jelölje a q töltésre ható idegen erőt $\vec{F}^*$, akkor az idegen térerősség:

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q}$$

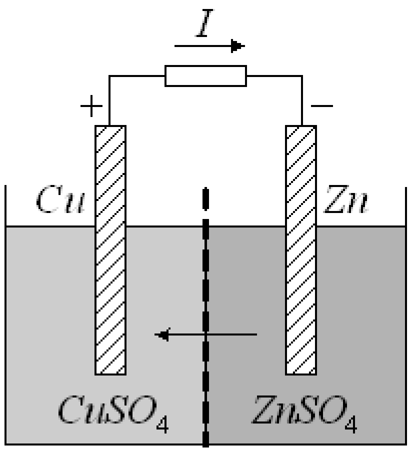
Az **elektromotoros erő** definíciója pedig:

$$\mathcal{E} = \int_-^+ \vec{E}^* d\vec{r}$$

Tehát az elektromotoros erő is egyfajta feszültség, csak nem az elektrosztatikus, hanem az idegen térerősségből származtatjuk.

Az integrálást az áramforrás belsejében a negatív pólustól a pozitív pólusig kell elvégezni.

Az olyan vezetőt, amelyben nincs idegen erő $\left(\vec{E}^* = 0\right)$, *fogyasztónak* nevezzük. A fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú ponttól az alacsonyabb potenciálú pont felé folyik (mint ahogy a testek is az alacsonyabb potenciális energiájú hely felé esnek a nehézségi erő hatására). Az áramforrásban pedig a – pólustól a $\oplus$ pólus felé folyik az áram.



Az elektromos áram iránya az áramforráson belül és kívül

Az Ohm törvény integrális alakja

A tapasztalat szerint egy homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) arányos a vezető két sarka közötti feszültséggel. Hányadosukat a vezető két vége közötti **ellenállásnak** nevezzük, és R-rel jelöljük:

$$\boxed{R = \frac{U}{I}}$$

Az Ohm-törvény annak ellenére igen fontos, hogy érvényességi köre korlátozott (lásd lentebb).

2. Egyenáramú áramkörök

Stacionárius elektromos áramlási térről beszélünk akkor, ha az összes fizikai mennyiség időben állandó (csak a helytől függenek), és a töltések időben állandósult módon áramlanak (tehát a sztatikus esettel ellentétben itt már mozoghatnak). Ebben az esetben az áramsűrűség minden pontban állandó, vagyis az áramerősség bármelyik keresztmetszeten független az időtől. Ekkor az áramot **stacionárius áramnak vagy egyenáramnak** nevezzük. Hangsúlyozzuk, hogy ez nem jelenti azt, hogy az egyes töltéshordozók (elektronok) sebessége állandó!

Kirchhoff I. törvénye

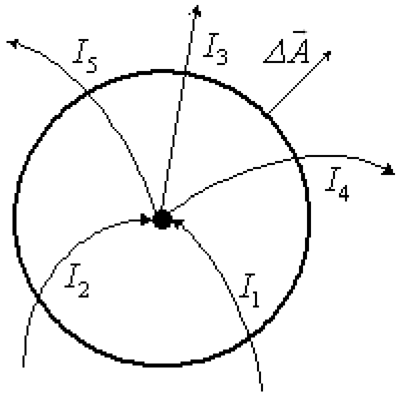
Mint mindenhol, itt is igaz a töltésmegmaradás törvénye. Mivel az elektromos töltés éppúgy megmaradó mennyiség, mint a tömeg, ezért a töltésmegmaradás törvényét formailag ugyanolyan (kontinuitási) egyenlet írja le, mint a tömegmegmaradásét:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_t dV = -\oint_F \vec{j} d\vec{A}$$

Itt F a rögzített V térfogat zárt burkolófelülete, ρ_t a töltéssűrűség, $\vec{j}$ az **áramsűrűség**. A konvenció szerint a felület normálvektora és így $\Delta\vec{A}$ is kifelé mutat. Az előjeleket úgy választjuk meg, hogy $I > 0$ ha $\vec{j}\cdot\Delta\vec{A} > 0$ (kifelé megy az áram) és $I < 0$ ha $\vec{j}\cdot\Delta\vec{A} < 0$ (befelé megy az áram). A jobboldali felületi integrál tehát akkor pozitív, ha kiáramlás van, ekkor viszont a térfogatban található töltés csökken, a baloldali derivált tehát negatív. Ezért kell a mínusz előjel a jobb oldalra. Stacionárius áramlás esetén a bal oldali kifejezés zérust ad, hiszen a V térfogatban a töltés nem változhat (ugyanis ekkor a töltések által keltett térerősség is változna). Időben állandósult állapotban a változási gyorsaság nyilvánvalóan zérus. Ebből az következik, hogy bármilyen zárt felületen ugyanannyi töltés áramlik ki, mint be: "Ami befolyik, az rögtön kifolyik" (Beatrice :) Alkalmazzuk ezt a törvényt vékony vonalas hálózat esetén egy csomópontba befutó vezetékekre. Ezzel:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} I_i = 0}$$

Egy csomópontba befolyó és onnan kifolyó áramok algebrai (előjeles) összege zérus. Ez Kirchhoff I. törvénye, a csomóponti törvény.



A felületi normális és az áramirány közötti szög határozza meg az áram előjelét

Az ábrán bemutatott példa esetén $I_3 + I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0$.

Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a csomóponti törvény a töltésmegmaradás általános törvényét fejezi ki.

Kirchhoff II. törvénye

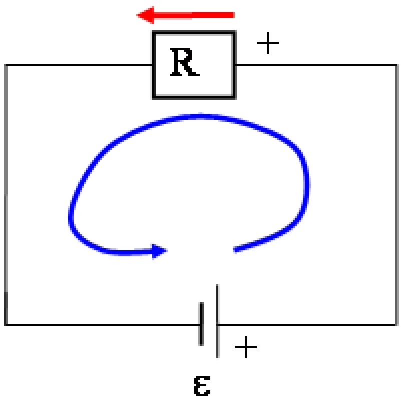
A stacionárius elektromos mező konzervatív mező. A stacionárius mezőben fennáll ugyanaz az alapvető törvény, ami az elektrosztatikus mező esetén:

$$\oint_g \vec{E} d\vec{r} = 0 \, ,$$

vagy másképpen megfogalmazva, a feszültségesések zárt görbére vett előjeles összege nulla. Ebből a feszültség definíciójának felhasználásával adódik **Kirchhoff II. törvénye**, a **huroktörvény**: bármely hurok mentén a feszültségesések algebrai összege zérus:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} U_i = 0}$$

A huroktörvény alkalmazása során szigorú előjelezési szabályokat kell alkalmazni. Ennek bevezetésére tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor csak egy (ideális, azaz belső ellenállással nem rendelkező) áramforrás és egy ellenállás van.



Először felveszünk egy körüljárási irányt, pl. az óramutató járásával ellentétesen (kék nyíl az ábrán). Ezután felveszünk az ellenálláson egy tetszőleges áramirányt, ezt most a felső (piros) nyíl jelzi. A körüljárás során az áramforrás negatív sarkától a pozitív sarkáig megyünk, tehát annyival növekszik a potenciál, amennyi az **elektromotoros erő**. Az ellenállásban a pozitív pólustól a negatív felé folyik az áram, vagyis a körüljárás során ott a potenciál csökken. Tehát az RI feszültséget negatív előjellel kell figyelembe venni a huroktörvény felírásakor, ezért ezt kapjuk:

$$\mathcal{E} - RI = 0$$

A gyakorlati számolások során inkább az átrendezett alakot fogjuk használni:

$$\boxed{\mathcal{E} = RI}.$$

Összetett áramkörök

Tekintsünk a továbbiakban vonalas vezetőkből és áramforrásokból összeállított hálózatokat. Csomópont a hálózat azon pontja ahol kettőnél több vezeték fut be. Ág a hálózat olyan szakasza, amelynek két vége csomópont, a belsejében azonban nincs több csomópont. Egy ágon belül az áramerősség mindenütt megegyezik. Az egy ágon belüli elemeket *sorosan* kapcsoltak nevezzük. A hurok a hálózat olyan zárt irányított vonala, amely a hálózat ágaiból épül fel. *Párhuzamosnak* nevezzük a fogyasztók kapcsolását akkor, ha a megfelelő sarkaik azonos potenciálon vannak.

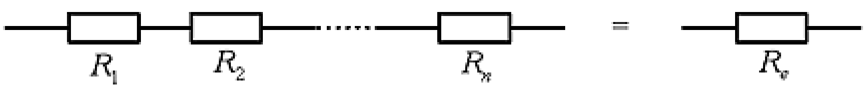
A hálózatszámítás menete tehát a következőképpen történik. Az egyes ágakban tetszés szerinti áramirányokat veszünk fel. Felírjuk az egymástól független csomóponti törvényeket, és meghatározzuk az ismeretlen áramok számát. Ennek megfelelő számú hurokban tetszőleges körüljárási irányokat veszünk fel, és felírjuk a huroktörvényeket. Az ellenálláson áthaladva, ha az áramirány és a körüljárási irány megegyezik, akkor az *IR* szorzat pozitív, egyébként negatív. Ezeket összegezve kapjuk, hogy mennyit csökkent a potenciál az ellenállásokon. Az ideális áramforráson áthaladva, ha előbb a negatív pólusát érintjük, akkor az **elektromotoros erő** pozitív, egyébként negatív. Ezeket összegezve kapjuk, hogy mennyit nőtt a potenciál az áramforrásokon áthaladva. A két összeg egyenlő, azaz

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_j R_j I_j$$

teljesül bármelyik hurokra (ezt az összefüggést lehetne a huroktörvénynek az adott konkrét áramkörre vonatkozó alakjának is nevezni). A csomóponti és hurok törvények alkotta egyenletrendszert (amely az áramokban lineáris) megoldjuk az ismeretlenekre. Ha valahol negatív áramerősséget kapunk, az azt jelenti, hogy az áram ellentétes irányba folyik ahhoz képest, amilyen áramirányt felvettünk.

Ellenállások soros kapcsolása

A Kirchhoff törvények alkalmazásával könnyen belátható, hogy a soros kapcsolás helyettesítő vagy eredő ellenállása az egyes ellenállások összege. Tekintsük az alábbi kapcsolást:



Ellenállások soros kapcsolása és az eredő ellenállás

Az eredő ellenállás:

$$\boxed{R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

A bizonyítást olyan esetre végezzük el, ahol két (R_1 és R_2) ellenállás van egy ideális áramforrásra sorosan kötve. Ekkor, mivel nincs elágazás, az áram mindegyik ellenálláson ugyanaz az I érték. Ebből az Ohm törvény felhasználásával azt a következményt is levonhatjuk, hogy $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$ vagyis $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$, magyarul a feszültség az ellenállások arányában oszlik meg.

A huroktörvényt alkalmazva látható, hogy soros kapcsolásnál a feszültségek összeadódnak,

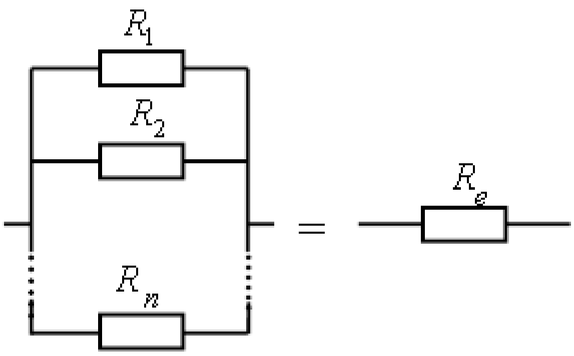
$$\varepsilon = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I = R_e I = U,$$

vagyis $R_e = R_1 + R_2$.

Ellenállások párhuzamos kapcsolása

Ha az ellenállásokat párhuzamosan kapcsoljuk, akkor az eredő ellenállás reciproka egyenlő az egyes ellenállások reciprokainak összegével:

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$



Ellenállások párhuzamos kapcsolása és az eredő ellenállás

A bizonyításhoz vizsgáljunk megint egy olyan esetet, ahol csak két (R_1 és R_2) ellenállás van egy ideális áramforrásra kötve, ezúttal párhuzamosan. A huroktörvényből kapjuk, hogy az ellenállásokon a feszültségesés azonos, és egyenlő az áramforrás feszültségével: $\varepsilon = U_1 = U_2$.

Ebből rögtön láthatjuk, hogy $R_1 I_1 = R_2 I_2$, átrendezve $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$, vagyis az áramerősség fordítva arányos az ellenállással.

A csomóponti törvényből adódik, hogy a két ellenálláson együtt ugyanakkora áram folyik, mint a főágban (azaz az áramforráson): $I = I_1 + I_2$. Ebből és az Ohm törvényből

$$\frac{U}{R_e} = I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2},$$

azaz

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}\ .$$

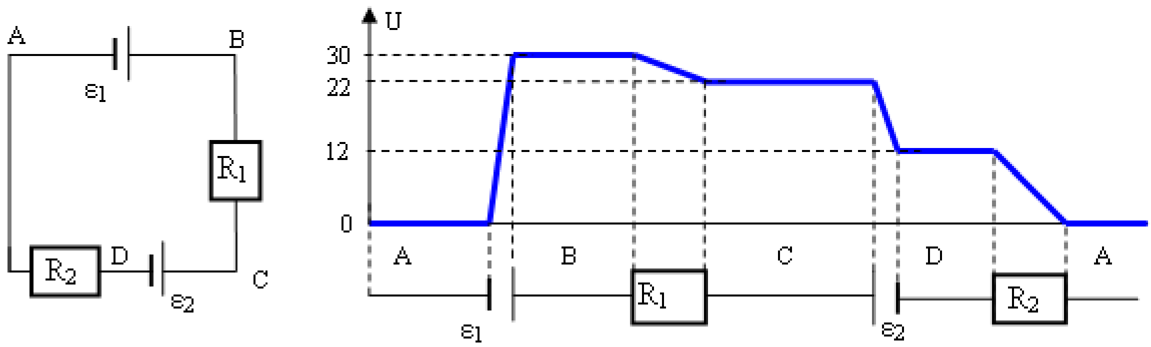
Utóbbi alakot "replussz" képletnek is nevezik, ezt azonban csak két ellenállásra lehet használni.

A potenciálviszonyok szemléltetése zárt áramkörben

Vegyünk egy olyan konkrét példát, ahol két (az egyszerűség kedvéért ideális) áramforrás és két ellenállás van sorosan kapcsolva.

Legyen ε_1=30V, ε_2= 10V, R_1=4Ω, R_2=6Ω. Ekkor az áram az óramutatóval megegyező irányban folyik és erőssége I=2A. Az ellenállásokon rendre 8 és 12V feszültség esik. (Ellenőrizzük ezeket az értékeket! Aki ilyeneket nem tud kiszámolni, ne is olvasson tovább!)

Az áramkört képzeletben kiterítjük síkba és elindulunk az *A* pontból a *B* irányába. A potenciált kezdetben nullának választjuk, ez addig nem is változik, amíg a drótban haladunk, mivel annak ellenállását nullának vesszük, így feszültség sem eshet rajta. Az 1. áramforrás negatív pólusáról a pozitívra átérve a potenciál 30V-ra emelkedik. A *B* pont után az R_1 ellenálláson áthaladva a potenciál 8V-ot esik, tehát értéke 22V lesz. A 2. áramforrás a nála erősebb (azaz nagyobb elektromotoros erejű) 1. áramforráshoz képest ellentétes polaritással van bekötve, az áramerősséget csökkenti. A pozitív pólusától haladunk a negatív felé, tehát a potenciál 10V-ot csökken. Az R_2 ellenálláson 12V esik, tehát (amint azt a huroktörvény alapján vártuk) visszajutunk a nullába. (A grafikon jobb és baloldalán lévő *A* pont valójában ugyanaz.)

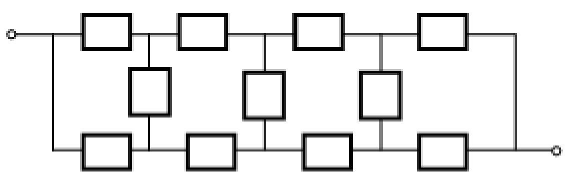


Ennek a grafikonnak a felrajzolása után már igen könnyű válaszolni az olyan jellegű kérdésekre, hogy pl. mennyi a potenciálkülönbség a *B* és a *D* pontok között:

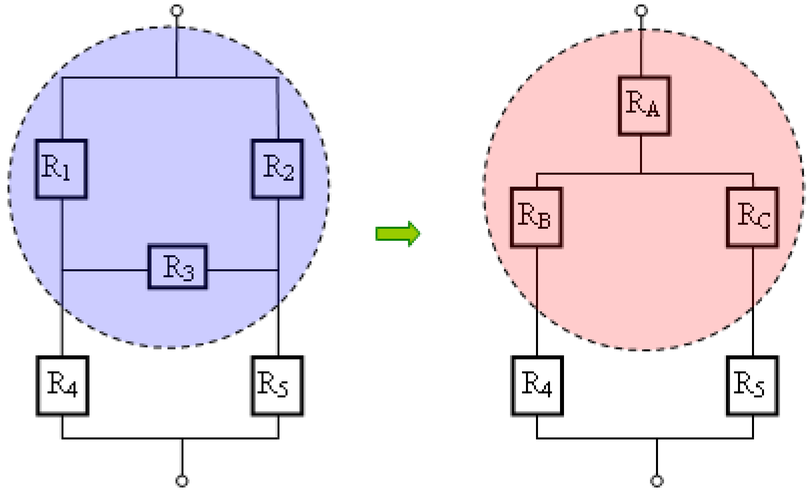
$$U_{BD} = U_B - U_D = 18V$$

Delta-csillag átalakítás

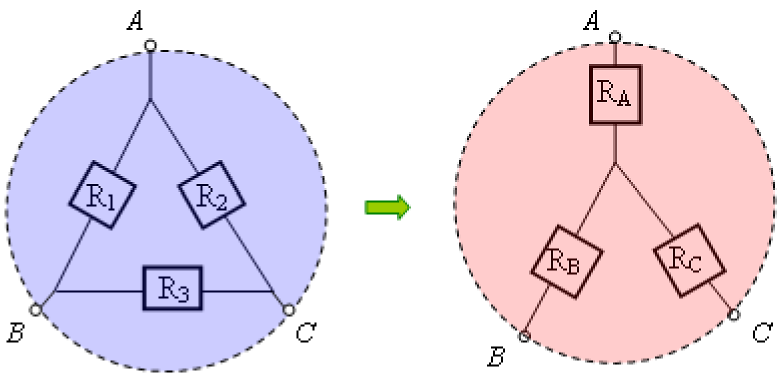
Több ellenállás esetén előfordulhat, hogy a hálózat felépítése nem tekinthető soros és párhuzamos kapcsolások kombinációjának. Ilyen pl. ha elképzelünk egy létrát, amelynek minden foka egy-egy ellenállás és a fokokat összekötő szárnak is van ellenállása.



A Kirchhoff törvények alkalmazásával természetesen az ilyen áramkörökben is minden adatot kiszámíthatunk, csakhogy ez egy sok ismeretlenes egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. Most egy másik módszert ismertetünk.



Ha a bal oldali ábrán a kék körben elhelyezkedő ellenállásokat ki tudnánk cserélni a jobb oldali piros körben lévő ellenállásokkal, akkor az eredő ellenállás és az áramerősségek kiszámítása igencsak leegyszerűsödne. A cserét azonban úgy kell végrehajtanunk, hogy a körökön kívül semmi se változzon, más szóval az új áramkör ekvivalens legyen a régivel. Nem változhat meg a körön kívüli ellenállásokon átfolyó és így az egész elrendezésen átfolyó áram erőssége. Ez akkor teljesül, ha a körből kijövő bármely két vezeték között az eredő ellenállás ugyanannyi marad, ha a harmadik ág szabadon marad. Lényegében a baloldalon található delta (más néven háromszög) kapcsolást cseréljük ki a jobb oldalon látható csillagkapcsolásra.



Az ekvivalenciának a következő három feltétele van: az eredő ellenállásnak ugyanannyinak kell lennie mindkét oldalon egyrészt az A és a B, másrészt az A és a C, harmadrészt a B és a C pontok között. A delta esetben az R_{AB} -t úgy számoljuk ki, hogy először az R_2 -t és az R_3 -at összeadjuk, mert sorosan vannak kötve, utána mivel ez az ág az R_1 -el párhuzamosan van, a "replussz" képletet használhatjuk. A csillag esetben, ha két kivezetésre feszültséget kötünk, a harmadik ágban nem folyik áram, tehát egyszerű soros kapcsolásról van szó. Az egyenletek:

$$\frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$\frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

Az első két egyenletet összeadva, kivonva belőle a harmadikat, majd a zárójeleket felbontva kapjuk:

$$\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_1 + R_2R_3 - R_3R_1 - R_3R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 2R_A + R_B + R_C - R_B - R_C \ .$$

Ezután a jobb és baloldalon is az ellentétes előjellel szereplő tagok kiesnek, végül kettővel egyszerűsítve kapjuk:

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Hasonlóan kapható a másik két ismeretlen ellenállás is:

$$R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Ha ezen szabályok szerint hajtjuk végre a helyettesítést, egyszerű soros-párhuzamos kapcsolások kombinációjára visszavezethetjük az eredő ellenállás számítását.

Előfordulhat, hogy egy csillagkapcsolást cserélünk ki deltakapcsolássá. A fenti áramkör is leegyszerűsíthető úgy is, hogy az $R_1 - R_3 - R_4$ csillagot cseréljük ki egy megfelelő deltára. Ehhez az átalakításhoz is levezethetők a szükséges képletek, ezzel azonban nem foglalkozunk.

3. A DIFFERENCIÁLIS OHM-TÖRVÉNY

Az ellenállás függése a geometriai méretektől

Tekintsünk egy vékony, állandó A keresztmetszetű ℓ hosszúságú vezetőt. Ha a vezető hosszát kétszeresére növeljük, akkor az ekvivalens azzal, mintha az eredeti vezetőből két ugyanolyat sorosan kapcsolnánk, tehát az ellenállás kétszeresére növekszik. Ez azt jelenti, hogy a vezető ellenállása egyenesen arányos a hosszával. Ha a keresztmetszetet növeljük kétszeresére, az ekvivalens azzal, mintha két ugyanolyan vezetőt párhuzamosan kapcsolnánk, vagyis az ellenállás felére csökken. Tehát az ellenállás fordítottan arányos a keresztmetszettel:

$$\boxed{R = \rho \frac{\ell}{A}}$$

Az arányossági tényezőt **fajlagos ellenállás**nak nevezzük, jele ρ (azaz 'ró'), mértékegysége Ωm vagy $\frac{\Omega mm^2}{m}$.

Megjegyezzük, hogy a fajlagos ellenállás a különböző anyagokra rendkívül nagymértékben különböző. A jó vezető szobahőmérsékletű rézre pl. $1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ωm=0,0172 Ωmm^2/m. Ez az előzőek szerint azt jelenti, hogy egy 1m hosszú, 1mm^2 keresztmetszetű rézdrót ellenállása mintegy 0,017Ω), ezért hanyagolhattuk el a feladatokban a vezetékek ellenállását. A szigetelők (pl. műanyagok) fajlagos ellenállása ugyanakkor akár 10^{15}-10^{20} Ωm is lehet.

Az Ohm törvény differenciális alakja

Vékony vonalas vezető esetén a vezető keresztmetszetét jellemző méret elhanyagolható a vezető hosszához képest, vagyis úgy tekintjük, hogy az áramsűrűség egy adott keresztmetszet minden pontjában ugyanakkora és a vezető hossztengelyének irányába mutat. A vezető két sarka között a feszültség: $U = E\ell$, a rajta átfolyó áramerősséget az **áramsűrűség**-vektorból kapjuk:

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{A} = j A$$

Így a vezető ellenállása $R = \frac{U}{I} = \frac{E\ell}{jA}$, másfelől tudjuk, hogy $R = \rho \frac{\ell}{A}$, a két egyenletet összehasonlítva kapjuk, hogy $\rho = \frac{E}{j}$, azaz $E = \rho j$. Ez általánosan is igaz $\rho \vec{j} = \vec{E}$ és differenciális Ohm-törvénynek nevezik.

Vezessük be a **fajlagos vezetőképességet**, amelynek jele a σ ('szigma'), de gyakran a γ-t használják. Ezt a fajlagos ellenállás reciprokaként értelmezzük: . Ezzel a jelöléssel a **differenciális Ohm-törvény** vagy Ohm féle anyagi

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

egyenlet:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

Az Ohm-törvény állítása, hogy $\vec{j}$ *és* $\vec{E}$ egyenesen arányos, csak egy közelítés, érvényességi köre korlátozott és függ a körülményektől. Például fémekben, ha nő a $\vec{j}$ áramsűrűség, akkor a hőmérséklet is növekszik és σ lecsökken, vagyis σ csak akkor lehet független $\vec{j}$-től, ha T=állandó. Néhány anyagra azonban még állandó hőmérsékleten sem teljesül az arányosság, pl. félvezető diódák. Emellett bizonyos anyagok vezetőképessége hűtéskor egy meghatározott hőmérsékleten végtelenné válik, a jelenséget szupravezetésnek nevezzük. Ólom esetén ez a hőmérséklet $\sim 7K$. Szupravezető állapotban a fajlagos ellenállás eltűnik, $\rho = \frac{1}{\sigma} = 0$. Ilyenkor térerősség nélkül is folyhat áram. Mindezek ellenére az Ohm-törvény az elektromosságtan egyik legfontosabb összefüggése.

PÉLDA

PÉLDA: POTENCIÁL ÉS TÉRERŐSSÉG-VISZONYOK.

Két különböző anyagból készült rudat a végeiknél összenyomunk és elhanyagolható belső ellenállású $\varepsilon = 3V$-os feszültségforrásra kapcsolunk. Tegyük fel, hogy az első rúd egy vas-ötvözetből van, amelynek fajlagos ellenállása $\rho_1 = 10^{-7}\,\Omega m$, a második egy olyan aranyalapú ötvözetből, amelynek fajlagos ellenállása $\rho_2 = 5 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$, tehát fele akkora. A két rúd egyébként teljesen azonos, hosszuk egyenként d=1m, keresztmetszetük $A = 1cm^2$. Azt vizsgáljuk, hogy mekkora a rajtuk áthaladó áramerősség, mekkora az áramsűrűség, az elektromos térerősség és hogyan változik a potenciál a rudak mentén.

Számoljuk ki először a rudak ellenállását:

$$R_1 = \rho_1 \frac{d}{A} = 10^{-7}\,\Omega m \cdot \frac{1m}{10^{-4}\,m^2} = 0,001\Omega,$$

hasonlóan, $R_2 = 0,0005\Omega$. Az eredő ellenállás, mivel sorosan vannak kapcsolva,

$$R = R_1 + R_2 = 0,0015\Omega.$$

Ebből az áramerősség:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{3V}{0,0015\Omega} = 2000A,$$

ami egy igen nagy szám. Megjegyezzük, hogy ez az eset gyakorlatilag annak felel meg, hogy rövidre zárjuk az áramkört, ekkor igen rossz közelítés, hogy az áramforrás belső ellenállását elhanyagolhatónak vesszük, de most maradjunk mégis ennél.

Az áramsűrűség mindkét rúdban

$$j = \frac{I}{A} = \frac{2000A}{10^{-4}m^2} = 2 \cdot 10^7 \frac{A}{m^2}$$

A térerősséget kiszámolhatjuk ebből a differenciális Ohm-törvényt felhasználva. Az első rúdban:

$$E_1 = \rho_1 j = 10^{-7}\,\Omega m \cdot 2 \cdot 10^7 \frac{A}{m^2} = 2\frac{V}{m}$$

A másodikban hasonlóan $E_2 = \rho_2 j = 1\frac{V}{m}$. A kétszer jobb vezetőben tehát feleakkora térerősség szükséges ugyanakkora áramsűrűség létrehozásához.

Az első rúdra eső feszültség $U_1 = E_1 d = 2V$, a másodikra $U_2 = E_2 d = 1V$, azzal a korábban levezetett ténnyel összhangban, hogy soros kapcsolásnál nagyobb ellenállásra arányosan nagyobb feszültség jut. Ábrázoljuk a potenciál-viszonyokat a rudakban.

Látható, hogy az első rúdban nagyobb a térerősség, tehát egységnyi hosszra nagyobb potenciálesés jut, meredekebb ott az egyenes.

ELEKTROMÁGNESES MÓDSZEREK A FÖLDTANI KUTATÁSBAN

A földtani kutatásban fontos alkalmazásokat nyert az ellenállásmérés. A természetben megtalálható kőzetek fajlagos ellenállása jellemző az adott kőzetre, ezáltal lehetőség nyílik kőzettani tagolásra. A kőzetek fizikai jellemzői közül az elektromos vezetőképesség a legváltozékonyabb, mintegy 20 nagyságrendet fog át. Így az elektromágneses módszerek alkalmazása széleskörű. A különböző módosulatok kutatási mélysége a felszínhez közeli szintektől kezdve többször tíz kilométerig terjed.

Áramtér alatt azt a vektormezőt értjük, ami úgy áll elő, hogy a háromdimenziós tér minden pontjába felvesszük az ottani áramsűrűség-vektort. A geofizikai elektromos - vagy teljesebben elektromágneses - kutatómódszereken belül megkülönböztetünk természetes és mesterséges áramterű méréseket aszerint, hogy mi generálta az áramot. Előbbi esetben az áramot az egyes képződményekben lejátszódó elektrokémiai folyamatok, földi mágneses tér változása és légköri elektromos kisülések okozzák. A mesterséges elektromágneses tereket árambevezetés vagy indukció útján gerjesztjük.

A normál elektromágneses teret homogén, izotróp féltérre számítjuk, mivel a talaj fölött a légkör van, ami ilyen szempontból nem lényeges. Az előbb felsorolt "források" tere a normál térhez képest az eltérő vezetőképességű, dielektromos állandójú földtani inhomogenitások vagy az anizotrópia miatt eltorzul. A geofizikai elektromágneses módszerek ezen inhomogenitásokat (anomáliákat) hivatottak feltérképezni.

SZÁMOLÁSI FELADAT

Feladat: Két tökéletesen vezető, koaxiális hengeres elektróda között ρ fajlagos ellenállású homogén anyag van. Az elektródák sugara a, illetve b > a, hosszúságuk h >> b. Számítsuk ki az elrendezés ellenállását. Hogyan változik a térerősség és az áramsűrűség kifelé haladva?

Az áramlás sugárirányban történik, így a keresztmetszet az áramlás mentén nem állandó, hanem minden *r*-re az *r* sugarú hengerpalást felülete, vagyis az $A = 2r\pi h$ függvény szerint változik. Úgy tekinthetjük, hogy egy dr vastagságú hengerpalást keresztmetszete már állandó, ellenállása pedig

$$dR = \frac{\rho}{A} dr = \frac{\rho}{2r\pi h} dr$$

Sok ilyen van sorosan kapcsolva, ezeket összeadva kapjuk az integrálközelítő összeget, határértékben az integrált. Tehát a-tól b-ig integrálva:

$$R = \rho \int_a^b \frac{1}{A} dr = \frac{\rho}{2\pi h} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{b}{a}$$

Mivel a keresztmetszet kifelé haladva lineárisan nő, a kontinuitási egyenletből az következik, hogy az áramsűrűség $\frac{1}{r}$ szerint csökken kifelé haladva. A differenciális Ohm-törvényből pedig rögtön látszik, hogy a térerősség is ugyanígy csökken.

4. Gyakorlati eszközök, műszerek

Integrális Ohm-törvény teljes áramkörre, valóságos áramforrással

Tekintsünk egy fogyasztókból és áramforrásból álló zárt áramkört! Azt a közelítést alkalmazzuk, hogy az összes fogyasztót egy koncentrált paraméterrel, az ohmos ellenállásukkal szemléltetjük, ezt most *R*-rel jelöljük. Tegyük fel, hogy most az áramforrás *nem ideális*, azaz neki, mint vezetőtestnek van ellenállása! Jelölje ezt a *belső ellenállásnak* nevezett mennyiséget most R_b, az elektromotoros erőt pedig $\mathcal{E}$! Kérdés, hogy hogyan függ az áramerősség az áramforrás, és az áramkör adataitól.

A Kirchhoff törvényekből kapjuk, hogy $\mathcal{E}=I(R+R_b)$, vagy az áramerősségre megoldva:

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+R_b}$$

Ez nevezzük a teljes áramkörre vonatkozó Ohm-törvénynek. A kör áramának I erőssége arányos az áramforrás $\mathcal{E}$ elektromotoros erejével és fordítva arányos a fogyasztó, valamint az áramforrás belső ellenállásának összegével. Ha a külső fogyasztók ellenállása elhanyagolható, akkor *rövidzárról* beszélhetünk. Az úgynevezett rövidzárási áram értéke: $I_{\text{röv.}}=\frac{\mathcal{E}}{R_b}$

Az áramforrásra jutó feszültséget **kapocsfeszültség**nek nevezzük, most ez egyben az *R* ellenállású fogyasztóra eső feszültség:

$$U_K=\mathcal{E}-I\,R_b=I\,R$$

Terheletlen telep esetén $I=0$, és a kapocsfeszültség megegyezik az elektromotoros erővel

$$U_K=\mathcal{E}$$

Ekkor viszont $U_K=I\,R$ nem teljesül. A (nem ideális) áramforrás kapocsfeszültsége $I\neq 0$ esetén mindig kisebb, mint az elektromotoros erő $\mathcal{E}$.

$$U_K=IR=\mathcal{E}\frac{R}{R+R_b}$$

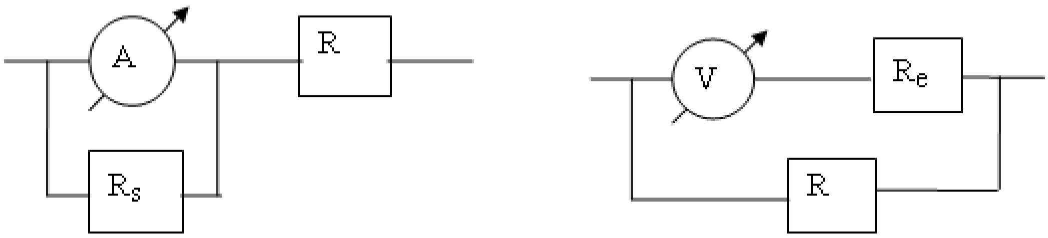
Áram- és feszültségmérés

Tegyük fel, hogy meg akarjuk mérni, mekkora áram folyik át egy R ellenálláson. Ekkor azt szeretnénk, hogy az ampermérőn és R-en ugyanakkora áram folyjék át. Ez akkor teljesül, ha az ampermérő sorosan van kapcsolva R-rel. Ha a feszültséget kell megmérni, azt akarjuk, hogy ugyanakkora legyen a műszer sarkai között a feszültség, mint R sarkai között. Ekkor a feszültségmérőt párhuzamosan kell kapcsolni R-rel.

Bármely mérési eljárásnál alapvető követelmény, hogy a mérés folyamata, a mérőműszer rákapcsolása ne (vagy ne észrevehetően) változtassa meg a mérendő mennyiséget. Ha az ampermérő R_b belső ellenállása nagy lenne, akkor az ág eredő ellenállása ($R+R_b$) számottevően nőne a műszer beiktatásakor, vagyis az áram lecsökkenne. Tehát az ampermérő ellenállásának igen kicsinek kell lennie. Ha az R-rel párhuzamosan kapcsolt feszültségmérő ellenállása kicsi lenne, az eredő ellenállás nagyon lecsökkenne, emiatt megnőne a körben folyó áram, ami szintén meghamisítaná a mérési eredményt. Ezért a voltmérők ellenállása igen nagy szokott lenni.

Műszerek méréshatárának kiterjesztése, sönt- és előtét-ellenállás

Minden áram- és/vagy feszültségmérő műszernek van egy működési tartománya, azaz a műszer egy meghatározott I_m áramerősségnél, ill. U_m feszültségnél nagyobb értéket nem tud mérni. Ezt a maximális áramerősséget, ill. feszültséget a műszer méréshatárának nevezzük. Ha ennél nagyobb értékek mérésével próbálkozunk, akkor a műszer mutatója "kiakad", a digitális műszer hibát jelez, esetleg tönkre is mehet. Tegyük fel, hogy egy érzékeny műszernél I_m=1A, de mi kb. 100A-t szeretnénk vele mérni. Ekkor, ha ismert a műszer R_b belső ellenállása, veszünk egy ennél kb. százszor kisebb R_s *söntellenállást*, és párhuzamosan kötjük a műszerrel, hogy az áram nagy része rajta, és ne a műszeren folyjon. Ekkor a Kirchhoff törvények alkalmazásával a mérendő áramra azt kapjuk, hogy $I=I_m+I_s$, továbbá $I_m/I_s=R_s/R_m$.



Sönt- és előtét-ellenállás kapcsolása

Ezekből $I_s = I_m \frac{R_m}{R_s}$, azaz $I = I_m(1+\frac{R_m}{R_s})$. Vagyis, ha R_s századrésze R_m-nek, akkor I_m százegyszerese is mérhető. Ekkor persze a műszer által mutatott áramerősség-értéket 101-gyel kell szorozni, hogy megkapjuk az R-en átfolyó értéket.

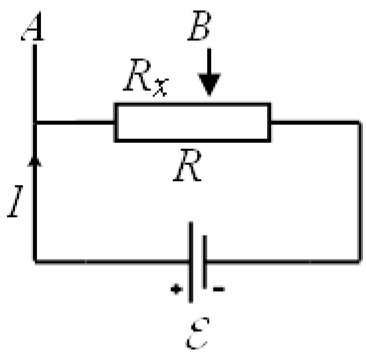
Egy feszültségmérő méréshatárát is megnövelhetjük, ha *előtét-ellenállást* kapcsolunk, a műszerrel sorosan. Ekkor az R ellenálláson $U=U_m+U_e$ feszültség esik, emellett $\frac{U_m}{U_e} = \frac{R_m}{R_e}$, amiből $U = U_m(1+\frac{R_e}{R_m})$, vagyis az előtét-ellenállásnak jóval nagyobbnak kell lennie a műszer (eredetileg is nagy) belső ellenállásától, hogy számottevően növelje a méréshatárt.

PÉLDA

Példa: Legyen a műszer méréshatára 2V, belső ellenállása 500Ω. Ekkor a méréshatár 300V-ra való növeléséhez az kell, hogy 298V feszültség az előtétre essen, vagyis 298/2=149-szer nagyobb előtétet kell beiktatnunk, vagyis R_e=149·500Ω=74500Ω.

Feszültségosztó (potenciométeres) kapcsolás

Gyakran előfordul az, hogy egy fix feszültségű áramforrás segítségével változtatható feszültséget kell előállítanunk. Ezt a feladatot valósíthatjuk meg terheletlen feszültségosztó kapcsolás segítségével:



Terheletlen feszültségosztó kapcsolás

A főkörben folyó áramerősség természetesen $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, így az R_x ellenálláson eső feszültség:

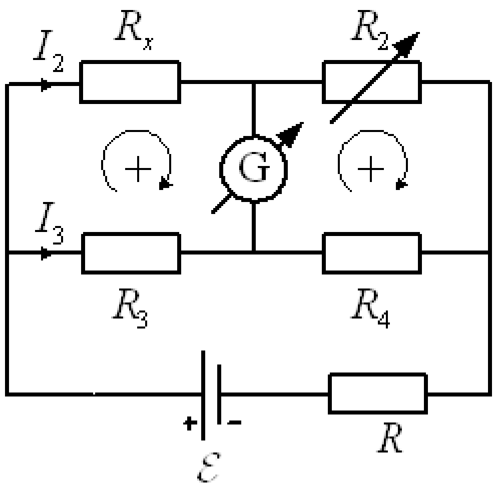
$$U_{AB} = R_x I = \mathcal{E} \frac{R_x}{R}$$

A terheletlen potenciométer két kapcsán megjelenő feszültség lineáris függvénye az R_x ellenállásnak, és $0 \leq U_{AB} \leq \mathcal{E}$. A terhelt potenciométer karakterisztikája viszont nem lineáris.

ANIMÁCIÓ

Ellenállásmérés Wheatstone-híddal

Tekintsük az alábbi kapcsolást, legyen R_x az ismeretlen ellenállás, R_2 pedig egy szabályozható ellenállás, G egy érzékeny árammérő, úgynevezett galvanométer. Az elrendezést összeállítva a G galvanométeren áram fog folyni.



Ellenállás mérése Wheatstone-híd kapcsolással

Az R_2 ellenállást addig szabályozzuk, amíg a híd árammentes nem lesz, $I_G \approx 0$. Ekkor a Wheatstone-híd kiegyenlített állapotban van. Az ilyen mérési módszert nullmódszernek nevezzük. A kiegyenlített állapotra felírhatóak az alábbi hurokegyenletek:

$$I_2R_x - I_3R_3 = 0 \text{ és } I_2R_2 - I_3R_4 = 0$$

Ha pl. a másodikból kifejezzük I_2-t és beírjuk az elsőbe, kapjuk az ismeretlen ellenállást:

$$\boxed{R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}}$$

A galvanométernek nem szükséges pontosnak lennie, a fontos az, hogy érzékeny legyen, vagyis nullát mutasson, ha nem folyik áram és nem nullát, ha folyik. Ekkor (és csak ekkor!), ha a műszer nullát mutat, használhatjuk a fenti bekeretezett képletet anélkül, hogy ismernénk az áramforrás elektromotoros erejét vagy az ellenállásokon eső feszültséget vagy a rajtuk átfolyó áramot.

5. A STACIONÁRIUS ÁRAM MUNKÁJA ÉS TELJESÍTMÉNYE

Ha a fogyasztó be és kivezetése közötti feszültség *U* és rajta *t* idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor a mező munkája:

$$W = QU = UIt$$

Ez annak a munkának az értéke, amit a mező végez az *U* feszültségű szakaszon *t* idő alatt, miközben ott *I* erősségű áramot hajt. Az elektromos energia különböző gépek, berendezések, stb., az ún. fogyasztók segítségével más energiává alakítható át, pl.:

- mechanikai energiává (motorok)
- kémiai energiává (akkumulátorok)
- hőenergiává (vasaló, hősugárzó)
- fényenergiává (izzólámpa, LED)

Ha a fogyasztó ohmos ellenállása nem nulla, Joule hő mindig keletkezik. Egy vezeték esetén az elektromos mező munkája megegyezik a vezeték belső energiájának növekedésével (az elektronok energiája csökken, a vezető hőmérséklete növekszik). Az Ohm törvény segítségével ezt két további alakban is kifejezhetjük. Amennyiben az ellenállás *R*, az elektromos áram munkáját a Joule-törvény adja meg:

$$W = UI \cdot t = I^2 R \cdot t = \frac{U^2}{R} t$$

Homogén fémes fogyasztó esetén termikus egyensúlyban a fogyasztó éppen annyi úgynevezett Joule hőt ad le a környezetének, mint amennyi munkát az elektromos mező végez. A stacionárius áram által végzett munka mértékegysége a joule, de a gyakorlatban használják a kWh (kilowattóra) egységet is: $1kWh = 3{,}6 \cdot 10^6\,J$

A stacionárius áram teljesítménye pedig:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

A Joule törvény differenciális alakját úgy kaphatjuk meg, hogy egy homogén drótban leadott teljesítményt osztjuk a drót térfogatával, amelyet a $V = A\ell$ ad meg:

$$\frac{P}{V} = \frac{UI}{V} = \frac{E\ell \cdot jA}{A\ell} = jE\,,$$

azaz a differenciális Joule-törvényt a következő formákba lehet írni:

$$p_J = \vec{E}\vec{j} = \rho j^2 = \sigma E^2 = \dots\,,$$

ahol p_J-vel az egységnyi térfogatban egységnyi idő alatt keletkezett hőt, azaz a Joule-hő teljesítménysűrűségét jelöltük.

Ha a keletkezett hőenergia elég magas hőmérsékletre melegíti az ellenállást, az látható fényt sugároz ki, ezen alapszik az izzólámpa. Azonban, mint az később látni fogjuk, a kisugárzott fénynek csak egy kisebb része esik a látható tartományba, ezért az izzólámpák hatásfoka nem túl jó. Velük ellentétben a LED-ek (*Light-emitting Diode*) fénysugárzása nem a magas hőmérsékleten alapul, egy sokkal szűkebb frekvenciatartományban sugároznak, mint az izzólámpák, így képesek azok hatásfokának többszörösét is elérni.

6. Ellenőrző kérdések

FELADATOK (1) - AZ ELEKTROMOS ÁRAM

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Oldja meg az alábbi feladatokat!

Jelölje meg a helyes megoldást!

1. **Sorosan kapcsolt acél- és rézdrót közül melyiken halad át nagyobb erősségű áram, ha áramforrásra kapcsoljuk őket? Tegyük fel, hogy az acél fajlagos ellenállása 6-szor nagyobb a rézénél, az acéldrót átmérője pedig kétszer akkora, mint a rézdróté.**

- ○ A drótok hosszúságától függ.
- ○ A rézdróton, mert kisebb a fajlagos ellenállása.
- ○ Mindkettőn azonos áram halad keresztül.
- ○ A hőmérséklettől függ.
- ○ Az acéldróton, mert nagyobb feszültség jut rá.

2. **Az előző feladatban melyik drótdarabra esik nagyobb feszültség?**

- Mindkettőre azonos feszültség esik.
- A drótok hosszúságától függ.
- A rézdróton, mert kisebb a fajlagos ellenállása.
- A hőmérséklettől függ.
- Az acéldróton, mert nagyobb a fajlagos ellenállása.

3. **Az első feladatban melyik drótban nagyobb az áramsűrűség?**

- A rézdrótban, mert kisebb a keresztmetszete.
- A rézdrótban, mert kisebb a fajlagos ellenállása.
- Az acéldrótban, mert nagyobb a fajlagos ellenállása.
- A drótok hosszúságától függ.
- Mindkettőben azonos.

4. **Az első feladatban hányszor nagyobb az acéldrótban a térerősség?**

- 2-szer
- egyenlőek
- 1,5-szor
- 4-szer
- a rézdrótban nagyobb
- 6-szor

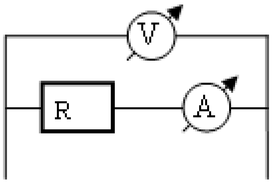
FELADATOK (2) - AZ ELEKTROMOS ÁRAM

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Oldja meg a következő feladatokat!

Válassza ki a helyes megoldást!

1. **Az ábrán látható ampermérő belső ellenállású ampermérője 0,2A áramot jelez, a belső ellenállású feszültségmérő pedig 16V feszültséget mutat. Mekkora az R ellenállás?**



- 2370 Ω
- 50 Ω
- ennyi adatból nem lehet megmondani
- 20 Ω
- 80 Ω

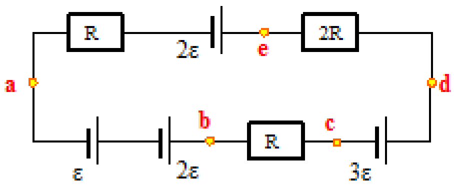
2. Az ábrán egy különböző rudakból összeforrasztott rendszert látunk, a rudak vastagsága arányos az ábrán őket reprezentáló vonalak vastagságával. A kékre festett rudak fajlagos vezetőképessége fele a barna rudakénak. Rakjuk nagyság szerint növekvő sorrendbe a megjelölt pontokban a térerősségeket!

- $E_2 < E_3 < E_1$
- $E_1 < E_3 < E_2$
- $E_3 < E_1 < E_2$
- $E_2 < E_1 < E_3$
- $E_1 < E_2 < E_3$
- $E_3 < E_2 < E_1$

3. Egy ε elektromos erejű, R_b belső ellenállású áramforrásra olyan külső ellenállást kapcsolunk, amely értéke kezdetben nulla, majd fokozatosan növekszik $10R_b$ -ig. Hogyan változik eközben a külső ellenállásra jutó teljesítmény?

- végig növekszik
- nem változik
- eleinte nő, majd utána csökken
- eleinte csökken, majd utána nő
- végig csökken

4. Az alábbi ábrán melyik két pont között a legnagyobb a feszültség?



- a és b
- b és e
- c és d
- c és e
- a és e
- a és d

ÁRAMKÖRÖS TESZTKÉRDÉS