KOVÁCS ENDRE, PARIPÁS BÉLA,

FIZIKA I.

3

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

III. PONTRENDSZEREK ÉS MEREV TESTEK DINAMIKÁJA

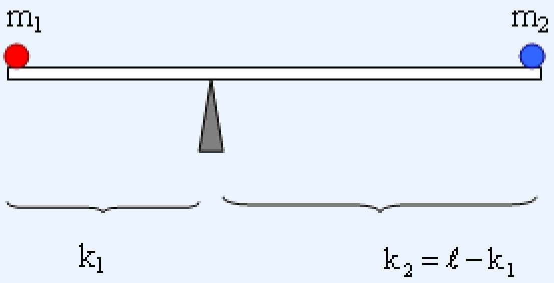
1. TÖMEGKÖZÉPPONT

A valóságos testek nem csak egy pontból állnak, általában nem lehet elhanyagolni a kiterjedésüket. Pl. egy fogaskerék általában egy helyben áll, de forgó mozgást végez, amit, ha meg akarjuk érteni a gép működését, nem hanyagolhatunk el.

PÉLDA

PÉLDA

Tekintsünk egy súlytalan rudat, melynek mindkét végére egy-egy tömegpontot helyezünk (m_1 és m_2 tömeggel). Vizsgáljuk meg, hol kell alátámasztani a rudat, hogy egyensúlyban legyen.



Írjuk fel az alátámasztás helyére, mint tengelyre a **nyomatékegyenletet**:

$$m_1 k_1 = m_2(\ell - k_1)$$

Látható, hogy ahányszor nagyobb az egyik tömeg a másiknál, annyiszor közelebb van hozzá az alátámasztás helye, mint a másikhoz. Ezt a pontot tömegközéppontnak vagy súlypontnak nevezzük.

Tegyük most fel, hogy az x tengelyen van két pont, az egyik, m_1=4kg tömegű x_1=1m-nél, a másik, m_2=2kg tömegű az x_2=7m-nél. Kérdés, hogy hol van a tömegközéppontjuk. Nyilván, a kétszer akkora tömegű ponttól fele akkora távolságra lesz,

$$m_1(x_t - x_1) = m_2(x_2 - x_t)$$

tehát x_t=3m.

Ezt úgy is megkaphatjuk (az előző egyenlet átrendezésével), hogy a két pont *x* koordinátájának a tömegekkel súlyozott átlagát vesszük:

$$x_t = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Általánosan, a ***tömegközéppont*** (súlypont) helyvektora (diszkrét) tömegpontrendszerre:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

Folytonos tömegeloszlású testre úgy kaphatunk pontos eredményt, ha a szummázás helyett integrálunk. Ehhez először be kell vezetni a sűrűség fogalmát a kisiskolás sűrűségdefiníció általánosításaként. Mivel a testek pl. többféle anyagból állhatnak, sűrűségük nem mindenhol ugyanaz, vagyis a sűrűség nem az egész testet, csak annak egy pontját jellemzi.

A **sűrűség** általános (lokális) definíciója:

$$\rho = \lim_{V \to 0} \frac{m(V)}{V}$$

ahol *m(V)* a *V* térfogatban található anyag tömege. Ezzel egy folytonos tömegeloszlású test tömege $m = \int_V \rho dV$.

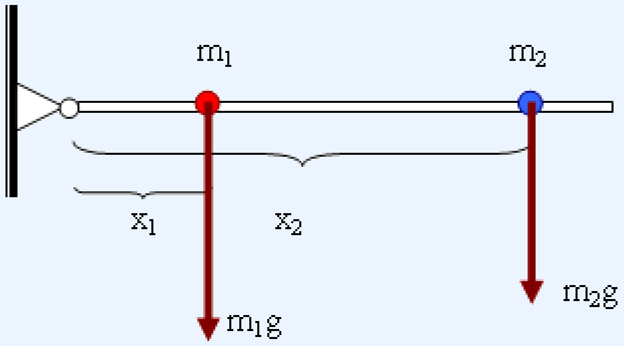
Egy ilyen test tömegközéppontja: $\vec{r}_s = \dfrac{\int_V \rho \vec{r} dV}{\int_V \rho dV} = \dfrac{\int_V \rho \vec{r} dV}{m}$

ANIMÁCIÓ

PÉLDA

PÉLDA

Tekintsünk egy tömegpontrendszert és vizsgáljuk meg, hogy rögzített tengelyre nézve mekkora **forgatónyomatékot** fejt ki összesen a tömegpontokra ható súlyerő. (Az ábrán csak két tömegpontot tüntettünk fel). Állításunk az, hogy az összesített forgatónyomatékot úgy is kiszámíthatjuk, hogy az összes tömeget a tömegközéppontba egyesítjük és az ehhez tartozó **erőkarral** szorozzuk.



Bizonyítás: Válasszunk olyan koordináta rendszert, hogy a forgástengelynél legyen az origó és tegyük fel, hogy az egyes tömegpontok vízszintes irányba vett távolsága a forgástengelytől x_i .

A forgatónyomatékok összege:

$$\sum m_i g x_i = mg \cdot \frac{\sum m_i x_i}{m} = mgx_s$$

Az első egyenlőségnél *m*-mel bővítettünk, a másodiknál felhasználtuk a tömegközéppont definícióját.

A módszer nem csak véges számú tömegpontra, hanem tetszőleges testre működik: a súlyerő forgatónyomatékának számításánál minden esetben elég a tömegközéppontba felvett össztömegre ható súlyerő forgatónyomatékát kiszámítani.

2. Tömegpontrendszerekre vonatkozó tételek

Impulzustétel

Vizsgáljuk most egy tömegpontrendszer *mozgását*. Legyen $\vec{F}_i$ az *i*-edik tömegpontra ható külső erők eredője, $\vec{F}_{ji}$ a *j*-edik pont által az *i*-edikre kifejtett erő. Írjuk fel a **dinamika alapegyenletét** az *i*-edik tömegpontra:

$$\frac{d}{dt}\vec{I}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}$$

összegezve *i*-re:

$$\sum \frac{d}{dt}\vec{I}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji}$$

Newton III. axiómája miatt ($\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ji}$) az utolsó tag nulla, így a belső erők kiesnek. A bal oldalon a deriválás felcserélhető az összeadással, emellett $\sum \vec{I}_i = \vec{I}$ a rendszer össz-impulzusa. Ezzel egy fontos tételt kapunk:

Impulzustétel tömegpontrendszerre

$$\frac{d}{dt}\vec{I} = \sum \vec{F}_i$$

azaz tömegpontrendszer impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő az összes külső erő vektori összegével. Speciálisan, zárt rendszer impulzusa állandó (ez az impulzusmegmaradás tömegpontrendszerre).

Tömegközépponti tétel

Az előző egyenlet bal oldalát tovább alakítva és felhasználva a súlypont definícióját

$$\frac{d}{dt}\vec{I}=\frac{d}{dt}\sum m_i\vec{v}_i=\frac{d}{dt}\sum m_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i=\frac{d^2}{dt^2}\sum m_i\vec{r}_i=\frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_s)=m\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}=m\vec{a}_s$$

ebből az impulzustételt használva kapjuk a tömegközépponti tételt:

$$\boxed{m\vec{a}_s=\sum\vec{F}_i}$$

Tömegközépponti tétel: Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege a tömegközéppontban lenne egyesítve és az összes külső erő erre a pontra hatna.

Impulzusmomentum-tétel

Hasonlóan levezethető az impulzusmometum-tétel tömegpontrendszerre:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$

tömegpontrendszer impulzusmomentumának idő szerinti deriváltja egyenlő az összes külső erő forgatónyomatékának eredőjével.

Munkatétel tömegpontrendszerre

Munkatétel tömegpontrendszerre: tömegpontrendszer kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az összes külső és belső erők munkájával: $W=\Delta E_k$.

Figyelemre méltó, hogy az impulzus- és az impulzusmomentum-tétellel ellentétben a munkatételben a belső erők is szerepelnek. Ez azért van, mert nem a mozgási energia, hanem az összenergia a megmaradó mennyiség, pl. két tömegpont kölcsönhatásához tartozó potenciális energia átalakulhat a tömegpontok mozgási energiájává.

3. Ütközések

Csak két pontszerűnek tekintett test ütközését tárgyaljuk a legegyszerűbb esetben (egy dimenzió). Legyen a két tömegpont *A* és *B*, tömegük m_A és m_B, sebességük kezdetben $v_A(1)$ és $v_B(1)$, az ütközés után $v_A(2)$ és $v_B(2)$. A sebességek itt előjeles mennyiségek.

Mindig teljesül az impulzusmegmaradás:

$$m_A v_A(1)+m_B v_B(1)=m_A v_A(2)+m_B v_B(2)$$

Rugalmas és rugalmatlan ütközés

Az energiamegmaradás szempontjából a két határesetet tárgyaljuk. Az egyik a teljesen rugalmas ütközés, amikor az összes mozgási energia megmarad, ekkor:

$$m_A v_A(1)^2+m_B v_B(1)^2=m_A v_A(2)^2+m_B v_B(2)^2$$

A másik határeset a teljesen rugalmatlan ütközés, ekkor a lehető legnagyobb mozgási energia-csökkenés következik be, a két test összetapad és közös (esetleg nulla) sebességgel haladnak tovább: $v_A(2)=v_B(2)$. Mindkét esetben két egyenletünk van, így a tömegek és a kezdeti sebességek ismeretében meg tudjuk határozni az ütközés utáni sebességeket.
A következő animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

4. Tehetetlenségi nyomaték

Tömegpontrendszer tehetetlenségi nyomatéka az egyes **tömegpontok** **tehetetlenségi nyomatékának** az összege:

$$\Theta = \sum m_i r_i^2$$

ahol r_i az i-edik tömegpont távolsága a forgástengelytől. Tehát a tehetetlenségi nyomaték a tömeghez hasonlóan additív.

Folytonos tömegeloszlású test tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \int_V \rho r^2 dV$$

ahol r a tengelytől mért távolság. Látható, hogy a tömegpontok tengelytől való távolságának négyzete számít, az, hogy milyen irányban vannak, nem. Matematikailag: egy skalárt kell integrálni és az eredmény is skalár.

Descartes koordinátákban, ha a forgástengely a z tengely:

$$\Theta = \int_V \rho (x^2 + y^2) dxdydz$$

Ha ismerjük a tehetetlenségi nyomatékot egy, a súlyponton átmenő tengelyre (legyen ez Θ_s), a **Steiner-tétellel** könnyen kiszámíthatjuk azt bármilyen, az előzővel párhuzamos tengelyre, csak Θ_s -hez hozzá kell adni a test tömegének és a két tengely távolsága négyzetének szorzatát:

$$\Theta_d = \Theta_s + md^2$$

ahol Θ_d a súlyponttól *d* távolsága lévő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték.

Bizonyítás: legyen az (x,y) koordináta-rendszer origója a tömegközéppontban, a *z* tengely a forgástengely, a másik tengely az előzőtől *d* távolságra a -*x* irányban. Ezzel

$$\Theta_s = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

A másik rendszerben az *y* koordináták ugyanazok, így

$$\Theta_d = \sum m_i \left(x_{i,d}^2 + y_i^2\right) =$$

$$= \sum m_i \left((x_i + d)^2 + y_i^2\right) = \sum m_i \left[x_i^2 + y_i^2 + 2x_i d + d^2\right] = \Theta_s + 2d \sum m_i x_i + md^2$$

De a súlypont *x* koordinátája az (x,y) rendszerben $\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = 0$, vagyis a második tag kiesik. Ami marad, $\Theta_d = \Theta_s + md^2$, ez pedig a tétel állítása.

Példa

Példa

Számoljuk ki egy homogén rúd tehetetlenségi nyomatékát, ha a tengely a rúdra merőleges és a rúd végén megy át. A rúd tömege $m = \rho V = \rho A l$, tehát

$$\Theta = \int_0^l \rho A r^2 dr = \rho A \frac{l^3}{3} = m \frac{l^2}{3}$$

Ha a tengely a rúd közepén megy át, akkor könnyen levezethető (pl. a **Steiner-tétellel**), hogy

$$\Theta = \frac{1}{12} ml^2$$

A henger tehetetlenségi nyomatéka az alaplapjára merőleges szimmetriatengelyre vonatkozólag

$$\Theta = \frac{1}{2} mR^2$$

5. Merev testek dinamikája

Merev testek egyensúlya

Definíció: Akkor nevezünk egy testet **merev testnek**, ha bármely két pontjának távolsága időben állandó.

Merev test pontosan akkor van egyensúlyban, ha a testre ható

- összes külső erők eredője nulla és
- a külső erők (tetszőleges pontra, ill. tengelyre vonatkozó) forgatónyomatékainak eredője nulla.

Egyensúly alatt most nem csak a nyugalmi állapotot vagy az egyenes vonalú, egyenletes (tehát forgás nélküli) mozgást értjük, hanem a tömegközéppont körüli egyenletes forgást is.
A fenti tételben megfogalmazott két feltétel független egymástól. Példaként tekintsünk egy merev testet, amelynek kezdetben minden pontja nyugalomban van. Ha csak az első feltétel igaz, tehát a külső erők eredője nulla, viszont a forgatónyomatékok eredője nem nulla, akkor a test egy helyben gyorsulva forog. Ha csak a második feltétel igaz, tehát

a testre ható eredő erő nem nulla, a forgatónyomatékok eredője pedig nulla, akkor a test gyorsuló haladó mozgást végez forgás nélkül, vagyis minden pontja ugyanazzal a (növekvő) sebességgel mozog.

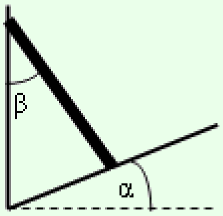
A $\sum M = 0$ egyenletet a konkrét rendszerre felírva **nyomatékegyenlet**nek is nevezik.

Megjegyzés: Deformálható testre a fenti tétel nem igaz, több feltétel kellene. Ha egy acélrugót megnyújtunk, majd elengedünk, rezegni fog, vagyis az egyes pontjainak gyorsulása általában nem nulla. Ez akkor is igaz, ha elengedés után már nem hat rá külső erő vagy forgatónyomaték.

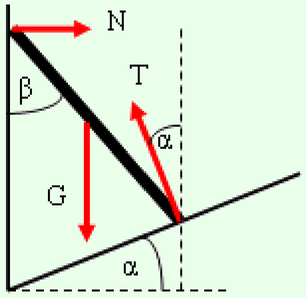
Számolási Feladat

Feladat

Egy *m* tömegű *l* hosszúságú homogén rúd egyik végét falnak támasztjuk, a másik végét egy súrlódás-mentes lejtőre helyezzük. Keresendő a lejtő α szöge és a rúd fallal bezárt β szöge között egyensúly esetén fennálló egyszerű összefüggés.



Mivel a rúd egyensúlyban van, a rá ható erők eredője és a forgatónyomatékok eredője is nulla. A $\sum \vec{F} = 0$ vektoregyenlet vízszintes komponense: $T \sin \alpha = N$. A függőleges komponens: $T \cos \alpha = G$, a kettőt elosztva *T* kiesik: $tg \alpha = \frac{N}{G}$.



A **nyomatékegyenletnél** a rúd alsó sarkát vesszük tengelynek:

$$N \cancel{l} \cos \beta = G \frac{\cancel{l}}{2} \sin \beta$$

A rúd *l* hosszával egyszerűsítettünk. Átrendezve: $2 \frac{N}{G} = tg \beta$. Az előbb kapott egyenlettel összehasonlítva kapjuk, hogy

$$2 tg \alpha = tg \beta \quad azaz \quad k = 2$$

Merev test mozgása

Azt, hogy egy merev test tömegközéppontja hogy mozog, a **tömegközépponti tétellel** számíthatjuk ki. Emellett a test még forgó mozgást végezhet. Ennek leírásához a forgómozgás alapegyenlete ad segítséget:

$$\sum M = \theta\beta$$

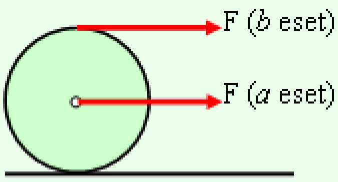
Megjegyzés

Egy merev test különböző pontjainak általában különböző a **sebessége** és a **gyorsulása**, de **szögsebessége** és **szöggyorsulása** adott tengelyre nézve csak egy van. Ha egy merev test forgó mozgást végez, mozgási energiáját és impulzusmomentumát nem számolhatjuk ki az $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ és az $L = mvr$ képletekkel, hanem a korábban felírt analógia táblázatban összefoglalt formulákat érdemes használni. A test impulzusát akkor adja meg az $\vec{I} = m\vec{v}$ képlet, ha $\vec{v}$ a tömegközéppont sebessége.

SZÁMOLÁSI FELADAT

FELADAT

Egy hengert a talajra helyezünk, majd vízszintes *F* erővel húzzuk a középpontjánál (*a* eset) ill. a tetejénél (*b* eset). Adott μ esetén legfeljebb mekkora lehet *F*, hogy tiszta gördülés jöhessen létre (azaz a henger ne csússzon meg a talajon)?



Megoldás:

a) A **dinamika alapegyenletének** vízszintes komponense: $ma = F - F_s$

Felírunk egy **forgómozgás alapegyenletét** úgy, hogy a tömegközéppontban vesszük fel a tengelyt

$$F_s R = \theta\beta$$

ahol a szöggyorsulást a gyorsulással az $a = R\beta$ képlet köti össze (Ez utóbbi akkor igaz, ha a henger nem csúszik meg, mert ekkor a talajjal éppen érintkező pontja pillanatnyilag áll és a henger e körül forog). Mivel függőlegesen csak a tartóerő és a súlyerő hat, ezek kiejtik egymást. A tapadási súrlódási erő maximális értéke $F_s = \mu mg$, a tehetetlenségi nyomaték pedig hengerre $\theta = \frac{1}{2}mR^2$. Ezeket behelyettesítve:

$$\mu \cancel{m} g \cancel{R} = \frac{1}{2} \cancel{m} R^{\cancel{2}} \frac{a}{\cancel{R}}$$

vagyis $a = 2\mu g$. Ezt visszahelyettesíthetjük a legelső egyenletbe:

$$2m\mu g = F - \mu mg$$

Ebből azt kapjuk, hogy $F = 3\mu mg$. Mivel a tapadási súrlódási erő kisebb is lehet, ez valójában csak a maximális érték, azaz $F \leq 3\mu mg$.

b) Ha a húzóerő felül hat, hasonlóan járhatunk el. Vegyük most a henger alján, a padlóval való érintkezési pontban a forgástengelyt, ezzel a nyomatékegyenlet:

$$F \cdot 2R = \theta\beta$$

ahol a tehetetlenségi nyomatékot a **Steiner-tétellel** kapjuk: $\theta = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$.

Felhasználva ezeket és az $a = R\beta$ képletet:

$$2\cancel{R}F=\frac{3}{2}m\cancel{R}^{\cancel{2}}\frac{a}{\cancel{R}}$$

A gyorsulásra kapjuk:

$$a=\frac{4}{3}\frac{F}{m}$$

Ezt visszaírva a **dinamika alapegyenletébe**:

$$F-F_s=ma$$

vagyis

$$F-F_s=\frac{4}{3}F$$

tehát

$$F_s=-{}^{F}\!/_{3}$$

A tapadási súrlódási erőre negatív értéket kaptunk, ez azt jelenti, hogy ellentétes irányban hat! Maximális értéke továbbra is $F_s=\mu mg$, ezzel a tiszta gördülés feltétele:

$$F\le 3\mu mg$$

Javasoljuk a kedves olvasónak, hogy gyakorlásképp csinálja meg úgy a b) feladatot, hogy a henger közepén veszi fel a forgástengelyt.

$$\left(FR-F_s\right)R=\theta\beta$$

$$\left(F-\mu mg\right)\cancel{R}=\frac{1}{2}m\cancel{R}^{\cancel{2}}\frac{a}{\cancel{R}}$$

$$a=\frac{2\left(F-\mu mg\right)}{m}$$

$$F+\mu mg=2\left(F-\mu mg\right)$$

$$3\mu mg=F$$

SZÁMOLÁSI FELADAT

FELADAT

Egy függőleges tengely körül egy *m* tömegű, *R* sugarú propeller szabadon foroghat. A kezdetben álló propellerbe rá merőlegesen, vízszintes irányú v_0 sebességgel m_g tömegű golyó csapódik be a tengelytől s távolságra és benne marad. Mekkora **szögsebességgel** indul el a kezdetben álló propeller?

Megoldás:

Ez egy **rugalmatlan ütközés**, mégsem oldhatjuk meg impulzusmegmaradással, hiszen a forgó propeller (ami nem pontszerű test!) összimpulzusa mindenképp nulla, a golyó által kifejtett erőt ugyanis a tengely által kifejtett ismeretlen erő ellensúlyozza. Az **impulzusmomentum**-megmaradást kell alkalmaznunk, ami a golyó-propeller rendszerre azért teljesül, mert a tengely által kifejtett erő **forgatónyomatéka** nulla.

A golyó kezdeti perdülete $m_g v_0 s$, a propelleré nulla. Tekintsük a propellert az egyszerűség kedvéért homogén rúdnak, ekkor tehetetlenségi nyomatéka $\theta=\frac{1}{12}mR^2$. A propeller perdületét az $L=\theta\omega$ képlettel számolhatjuk, ahol az ω szögsebesség a golyó becsapódás utáni sebességével a kapcsolatban

$$v_u = s\omega$$

van.

Tehát a perdületmegmaradást kifejező egyenlet:

$$m_g v_0 s = \theta\omega + m_g s^2 \omega$$

Ebben már csak egy ismeretlen van, könnyen megoldható.

6. Ellenőrző kérdések

PONTRENDSZEREK ÉS MEREV TESTEK DINAMIKÁJA

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Válassza ki a helyes megoldást!

1. **Egy középkori malmot egy szamár forgat. A szamár egy vízszintes rúdhoz van kötözve, arra 400 N erőt fejt ki a forgástenygelytől 2 m távolságban. Mennyi munkát végez a szamár, amíg 20-szor körbeforgatja a rudat?**

   - 8 kJ
   - 100,5 kJ
   - 16 kJ
   - 4 kJ

2. **Melyik tételből következik közvetlenül, hogy Münchausen báró nem tudja saját magát a hajánál fogva kiemelni a mocsárból?**

   - tömegközépponti tétel
   - Steinter-tétel
   - munkatétel
   - teljesítménytétel
   - impulzusmomentum-tétel

3. **Egy adott vonatkoztatási rendszerben egy merev test minden pontja egyenletes körmozgást végez. Ekkor mindenképp igaz, hogy a szóban forgó vonatkoztatási rendszerben...**

   - a testre ható eredő erő teljesítménye pozitív
   - a testre ható eredő erő nulla
   - a test tömegközéppontja nyugalomban van
   - a test mozgási energiája állandó