Fizika I. GEFIT056BL
Vegyészmérnök BSc, levelező tagozat, Kazincbarcika

2022/2023. tanév, II. félév

5.előadás

Elektrosztatika

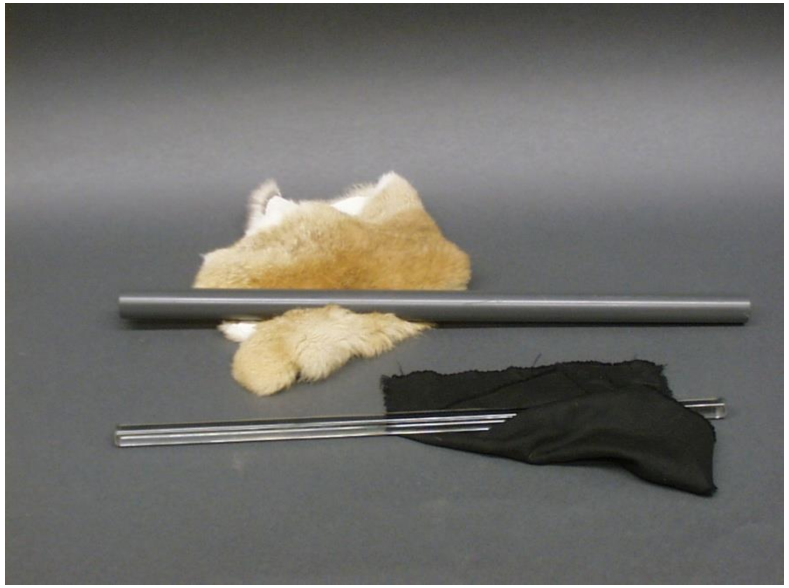
Elektrosztatikai jelenségek

Ebonit vagy üvegrudat megdörzsölve
az apró tárgyakat magához vonz.

Két selyemmel megdörzsölt üvegrúd
között taszítás, üvegrúd és gyapjúval
megdörzsölt borostyánkő között
vonzás lép fel.

Kétféle elektromos állapot.

Megdörzsölt üvegrúd pozitív.
Borostyán negatív.



Elektromos töltés: milyen mértékben vesz részt egy test az elektromos kölcsönhatásban.
Jele: Q SI mértékegysége: C (coulomb)

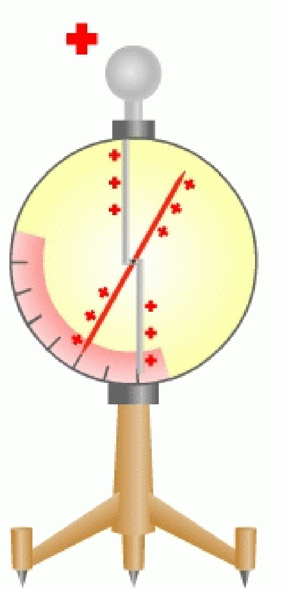
Egynemű töltések között taszítás, ellenkező neműek között vonzás.

Elektromos töltések szétválasztása

Semleges test: pozitív és negatív töltések egyenlő mértékben vannak jelen.

A töltés **megmaradó mennyiség**, viszont szétválasztható. Elektromos megosztás, vagy influencia.

Vezetők: a töltések szabadon elmozdulhatnak. (pl. fémek; sók, savak, bázisok vizes oldatai)

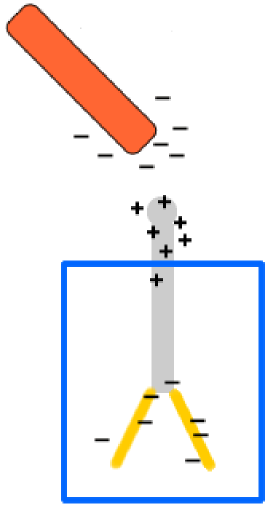


elektroszkóp

Szigetelők: a töltések csak néhány nanométert mozdulhatnak el. (polarizáció). (pl. kvarc, gumi, ebonit, porcelán)

A töltések fizikai kontaktus során átvihetők egyik testről a másikra. Vezető esetén a töltés szétterjed a test teljes felületére.

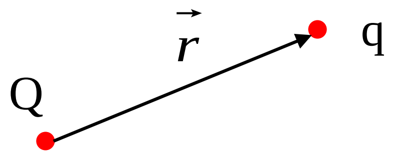
Töltött test közelében lévő fémben a töltések megoszlanak.



Coulomb törvény

Inerciarendszerben nyugvó, pontszerű elektromos töltésekre:

q: próbatöltés



$$\vec{F}_q = k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$$

k: Coulomb állandó

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \text{ahol}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

a vákuum permittivitás, vagy a vákuum dielektromos állandója.

Mivel a *q*-ra ható erő csak a helytől függ az erőtér konzervatív.

Newton 4. axiómája:
Bármely töltéselrendezés erőtere is konzervatív.

$$\vec{F}_e = \sum_i \vec{F}_i$$

Feladat: 13

Az elektromos térerősség

Az **elektromos térerősség** a próbatöltéstől független, egy P pontban csak a teret jellemző mennyiség:

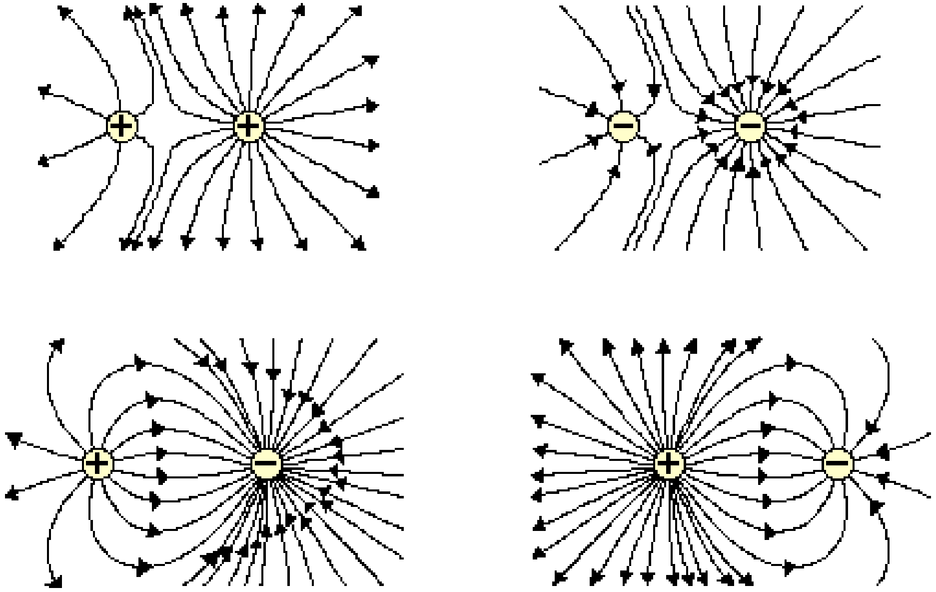
$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_q(P)}{q} \qquad \text{Mértékegysége: } \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \text{ vagy } \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Térerősség érzékeltetésére az erővonalakat használjuk
- iránya a vonalakkal párhuzamos minden pontban
- nagysága a vonalak sűrűségével van jelölve
- pozitív töltésekről indulnak, negatív töltéseken végződnek

<u>Szuperpozíció:</u> két vagy több töltés esetén a térerősség az egyes töltések által létrehozott térerősségek vektori összege.

A q-ra ható eredő erő :

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$
$$q\vec{E} = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \cdots + q\vec{E}_N$$
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N$$



Elektromos feszültség

Az elektrosztatikus tér munkája a *q* próbatöltésen amíg az *A*-ból *B*-be jut:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

A **feszültség** az egységnyi próbatöltésen végzett munka:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Mértékegysége: V

Homogén térben, azzal egyirányú *d* elmozdulás esetén: $U = Ed$

Az elektromos feszültség csak a térre és a két pontra jellemző mennyiség.

Potenciális energia és potenciál

Konzervatív erőtérben a tér által az *A* és *B* pontok között végzett munka megegyezik a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_P(A) - E_P(B)$$

Az egységnyi pozitív töltésre jutó potenciális energia a **potenciál**:

$$U_A = \frac{E_P(A)}{q}$$

Két pontban vett potenciálok különbsége a két pont közötti feszültség:

$$U_A - U_B = U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Az elektrosztatikus potenciált általában (véges töltéseloszlások esetén) a végtelenben vehetjük zérusnak:

$$U_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Hasonlóan: $E_P(A) = \int_A^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r}$

A potenciális energia és a potenciál gradiense

Az erő mindig az alacsonyabb potenciális energiájú hely irányába hat, és annál nagyobb minél nagyobb az egységnyi hosszra eső energiaváltozás:

$$\vec{F} = -gradE_P = -\nabla E_P = (-\frac{\partial E_P}{\partial x}, -\frac{\partial E_P}{\partial y}, -\frac{\partial E_P}{\partial z})$$

A q próbatöltéssel végigosztva kapjuk a térerősségre:

$$\vec{E} = -gradU = -\nabla U = (-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z})$$

<u>Példa:</u> Az elektrosztatikus potenciál az $U = b(3x + 4z)$ módon függ a helykoordinátáktól. Mekkora és milyen irányú a térerősség az origóban és a (2, 1, 0) pontban?

$$\vec{E} = -grad[b(3x + 4z)] = -bgrad(3x + 4z) =$$

$$= -b\left(\frac{\partial(3x + 4z)}{\partial x}, \frac{\partial(3x + 4z)}{\partial y}, \frac{\partial(3x + 4z)}{\partial z}\right)$$

$$= -b(3, 0, 4) = -3b\vec{i} - 4b\vec{k}$$

Az elektrosztatikus tér I. alaptörvénye (16:55)

Mivel az elektrosztatikus tér konzervatív, az általa bármely zárt görbe mentén végzett munka nulla:

$$W_O = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint q\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

q-val végigosztva: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

Felhasználva Stokes tételét a zárt hurok által határolt felületre:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint rot\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Majd a zárt görbe méretével nullához tartva kapjuk a törvény lokális alakját:

$$rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$$

(az elektrosztatikus tér örvénymentes)

Az elektrosztatikai tér I. alaptörvényét egy áramköri hurokra alkalmazva kapjuk a ***Kirchhoff-féle huroktörvényt.*** Bármely zárt görbén végighaladva a potenciálválto-zások (feszültségek) előjeles összege nulla.

$$\sum_i U_i = 0$$

Ponttöltés elektromos tere és potenciálja*

A térerősség definíciójából és a Coulomb törvényből:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q} = k\frac{Qq}{qr^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$

A *Q* ponttöltés potenciálja attól *R* távolságra:

$$U(R) = \int_R^\infty \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = \int_R^\infty \frac{kQ}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r} = kQ\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{r}$$

$$= kQ\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{kQ}{R}$$

Töltött részecske mozgása homogén elektrosztatikus térben*

A q töltésű és m tömegű részecskére felhasználva Newton 2. axiómáját:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Homogén elektrosztatikus tér esetén ez a gyorsulás is homogén és időben állandó. Vegyük fel az x tengelyt a gyorsulás irányába. Ekkor:

$$\vec{a} = (a, 0{,}0) = \left(\frac{qE}{m}, 0{,}0\right)$$

$$\vec{v} = \left(v_{x0} + at, v_{y0}, v_{z0}\right) = \left(v_{x0} + \frac{qE}{m}t, v_{y0}, v_{z0}\right)$$

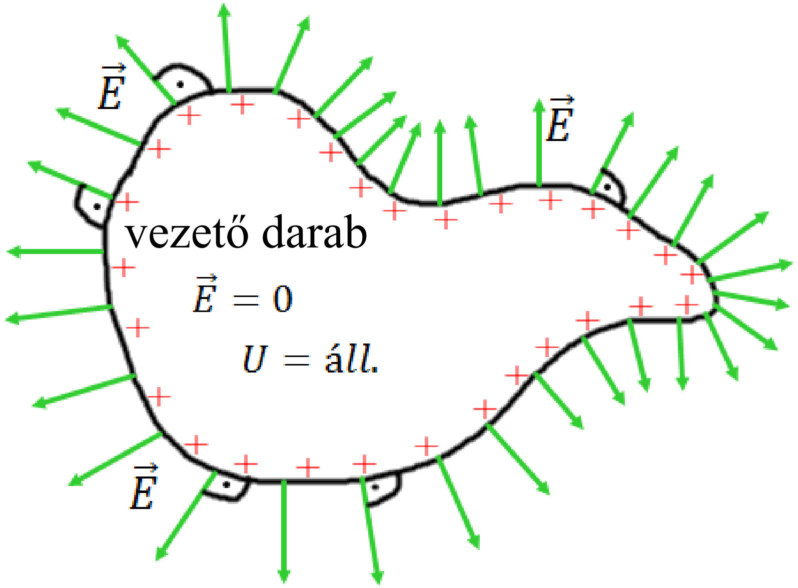
$$\vec{r} = \left(x_0 + v_{x0}t + \frac{a}{2}t^2, y_0 + v_{y0}t, z_0 + v_{z0}t\right)$$
$$= \left(x_0 + v_{x0}t + \frac{qE}{2m}t^2, y_0 + v_{y0}t, z_0 + v_{z0}t\right)$$

Vezetők elektrosztatikus térben

Vezető: a töltések szabadon elmozdulhatnak

Ha a vezető belsejében a térerősség nem lenne nulla akkor áram folyna.

Ha a felületen a térerősségnek lenne tangenciális (párhuzamos) komponense akkor a felület mentén áram folyna.



Egyensúly esetén (elektrosztatika)

- vezetőben a térerősség nulla
- a vezető egész térfogata ugyanolyan potenciálon van (ekvipotenciális)
- a vezető felületén a térerősség merőleges a vezető felületére
- a többlettöltés a vezető felülete mentén oszlik el
- minél hegyesebb egy felületdarab annál nagyobb ott a töltéssűrűség - térerősség

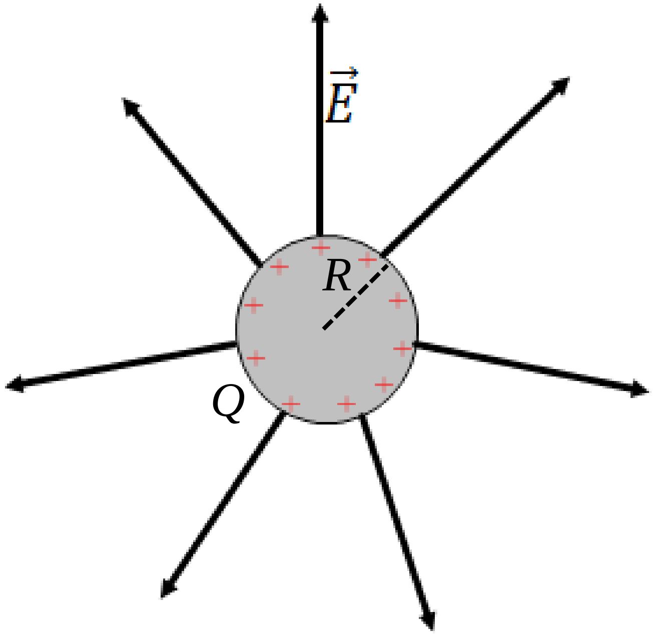
Csúcshatás: kellően hegyes ponton olyan nagy lehet a térerősség, hogy a töltések kilépnek a fémből.

Kapacitás

<u>Kapacitás:</u> az a mennyiség amely jellemzi, hogy egy bizonyos Q töltés szétválasztása mekkora potenciálkülönbséget (feszültség) eredményez a $+Q$ és $-Q$ között.

Vezetőt körülvevő tér erőssége egyenesen arányos a rajta lévő töltéssel.
Emiatt a vezető potenciálja is arányos a töltéssel, az arányossági tényező a kapacitás:

$$C = \frac{Q}{U} \qquad [C] = F\,(\text{farad})$$



<u>Magányos gömb kapacitása:</u>

gömbszimmetria miatt – ponttöltésre érvényes képlet használható U-ra

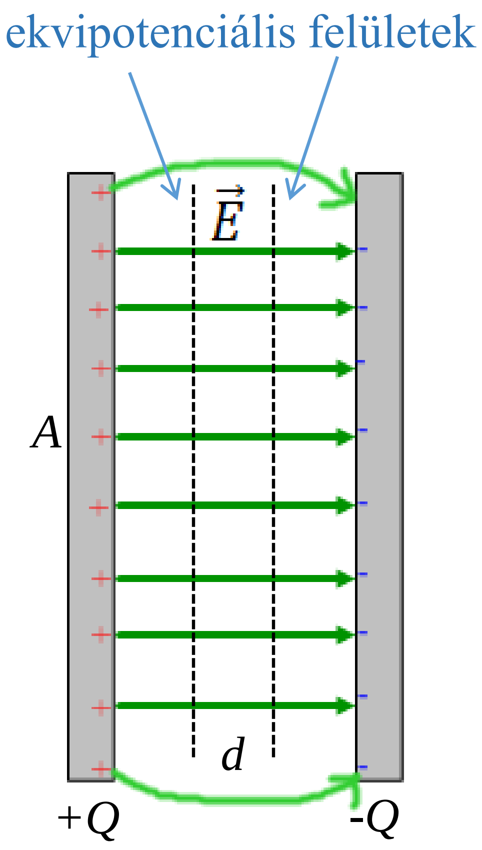
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{k\frac{Q}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Ez nagyon pici, de ha az ellentétes töltést nem visszük a végtelenbe hanem közel marad akkor sokkal nagyobb lesz a kapacitás, mivel a feszültség így sokkal kisebb!

Kondenzátor

A szétválasztott töltések tárolása egymáshoz közel történik – kis feszültség – nagy kapacitás.

- párhuzamos lemezek (síkkondenzátor)
- koncentrikus gömbök
- koaxiális hengerek



<u>Síkkondenzátor</u>

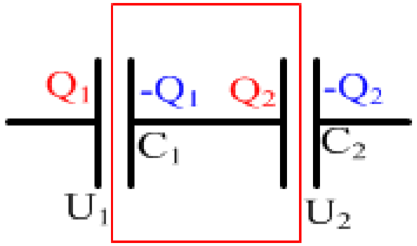
• A fegyverzetek mérete sokkal nagyobb mint a köztük lévő távolság (*d*).

- végtelen síkoknak tekinthetők
- a térerősség a lemezek között homogén és azokra merőleges.
- az ekvipotenciális felületek a lemezekkel párhuzamosak.

$$C = \frac{Q}{U} \qquad\qquad Q = CU = CEd$$

Kondenzátorok kapcsolásai*

soros kapcsolás eredő kapacitása C_{12}



Jobbról és balról szakadás -
középen lévő darab össztöltése
feltöltés előtt és után is nulla
(piros téglalap) $Q_2 - Q_1 = 0$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

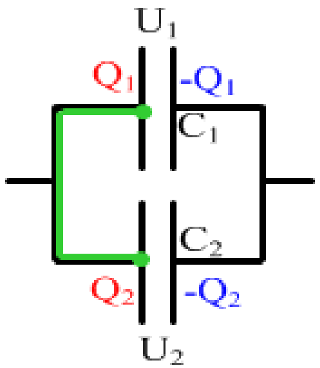
A feszültség összeadódik:

$$U = U_1 + U_2$$

$$\frac{Q}{C_{12}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

párhuzamos kapcsolás eredő kapacitása C_{12}



A kondenzátor megfelelő lemezei
vezetővel vannak összekötve.
(zöld vonal, de a másik két lemez is)
Ezért azonos potenciálon vannak és

$$U_2 = U_1 = U$$

A töltés összeadódik:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C_{12}U = C_1U + C_2U$$

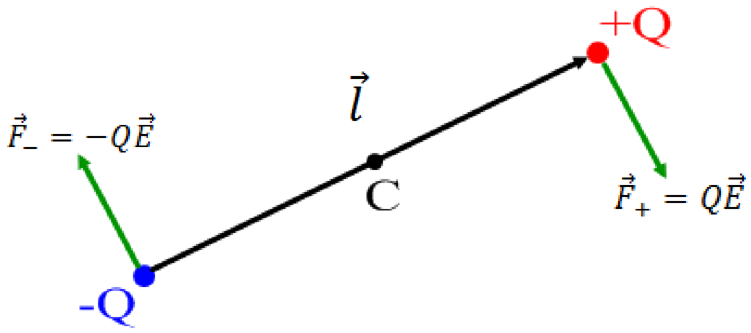
$$C_{12} = C_1 + C_2$$

Feladat: 15

Elektromos dipólus

Egy pozitív és egy negatív töltésből áll melyek egymástól *l* távolságra vannak rögzítve.

<u>Dipólusmomentum:</u> $\vec{p} = Q\vec{l}$



Dipólusra ható eredő erő homogén térben:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_- + \vec{F}_+ = -Q\vec{E} + Q\vec{E} = 0$$

Dipólusra ható eredő forgatónyomaték (a C pontra) homogén térben:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_{C-} + \vec{M}_{C+} = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = -\frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_- + \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_+$$

$$= -\frac{\vec{l}}{2} \times \left(-Q\vec{E}\right) + \frac{\vec{l}}{2} \times Q\vec{E} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

A dipólust a tér vele egy irányba igyekszik befordítani – stabil egyensúlyi helyzet
Ha a dipólmomentum párhuzamos a térrel, de ellentétes irányú – labilis egyensúly

Polarizáció

Töltés-középpont: $\vec{r}_{tkp} = \frac{\sum Q_i \vec{r}_i}{\sum Q_i}$

Apoláros molekulák: a + és a – tkp. egybeesik
(pl. H_2 és O_2)
Poláros molekulák: a + és a – tkp. nem esik egybe
(pl. HCl és H_2O)

Indukált polarizáció: Az elektromos tér széthúzza a töltés-középpontokat.

Orientációs polarizáció: Az elektromos tér a poláris molekulák által alkotott dipólusokat a tér irányába beforgatja (alacsonyabb hőmérsékleten számottevőbb a hatás).

Az elektromos polarizáció vektor: Egy dielektrikum *A* pontja körüli kicsiny térfogatban található molekulák dipólusnyomatékának eredője.

$$\vec{P}(A) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \qquad [\vec{P}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Az anyagok nagy részére a polarizáció egyenesen arányos a térerősséggel:

$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$ κ: elektromos szuszceptibilitás

Elektromos indukcióvektor

<u>Elektromos indukcióvektor:</u> felhasználva a térerősséget és a polarizáció vektort

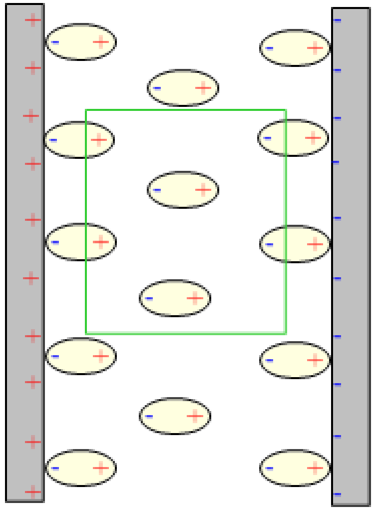
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad [\vec{D}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Lineáris közelítéssel: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\kappa)\vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

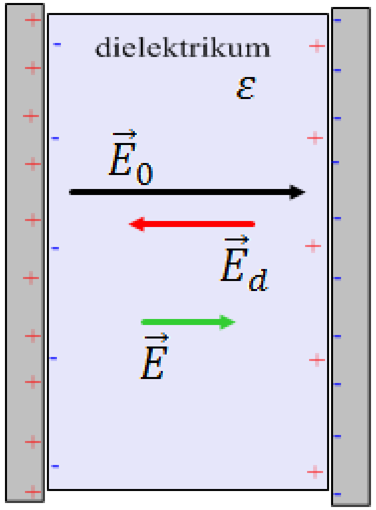
ε_r és ε a relatív, illetve az abszolút permittivitás

<u>Dielektrikumok használata:</u>



$\vec{E}_0$ ilyen tér lenne vákuumban

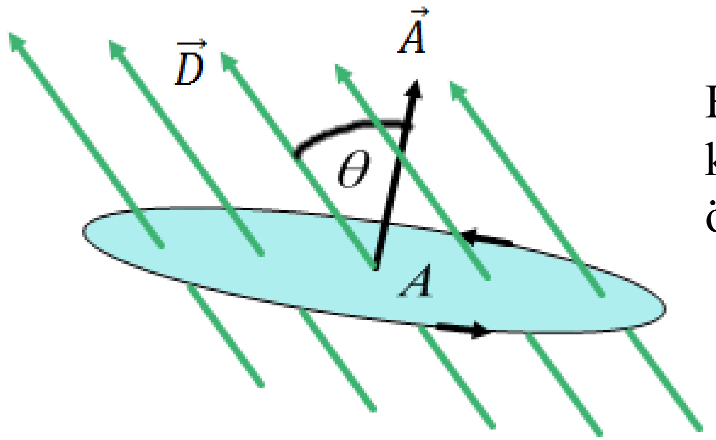
$\vec{E}_d$ ilyen teret okoz a dielektrikum



$\vec{E}$ ez lesz az eredő a dielektrikumban

Elektromos fluxus

<u>Elektromos fluxus:</u> Megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát.



Ha az indukció a felület mentén homogén:

$$\psi = DA\cos\theta = \vec{D}\cdot\vec{A}$$

Ha nem homogén az indukció akkor a felületet kicsi darabokra bontjuk és a járulékokat összegezzük:

$$\psi = \iint \vec{D}\cdot d\vec{A}$$

Az elektrosztatika második alaptörvénye

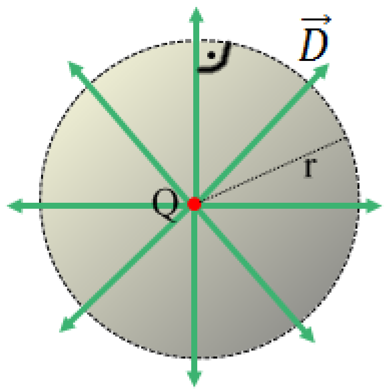
Zárt felületre vett fluxus a ponttöltéstől *r* távolságban:

vákuum esetén: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\psi = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oiint \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} dA =$$

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \oiint dA = \frac{4\pi r^2}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} = Q$$



Bármilyen felületre igaz: zárt felületre vett elektromos fluxus egyenlő a felületben foglalt töltéssel.

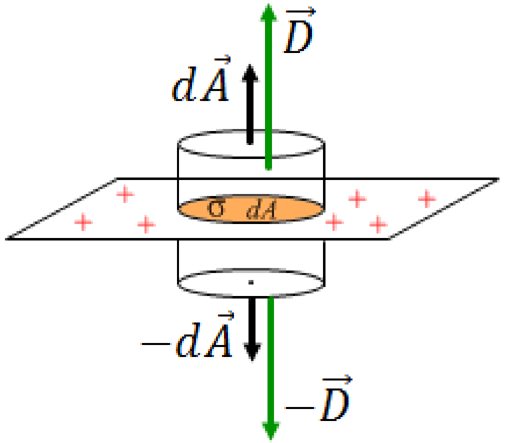
<u>Elektrosztatika II. alaptörvénye (Gauss törvény):</u> $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$

Dielektrikumok esetén is igaz, a kémiai anyag jelenléte az elektromos indukciót nem befolyásolja, mert annak forrásai csak a valódi (szabad) töltések.

A Gauss törvény differenciális (lokális alakja): $\mathrm{div}\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$

Példák a Gauss törvény használatára*

Végtelen töltött membrán σ felületi töltéssűrűséggel:



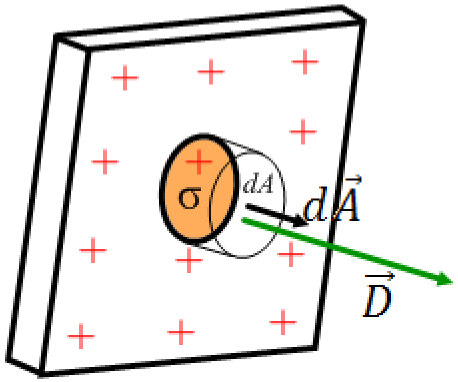
$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{A} = DdA + (-D)(-dA) = 2DdA$$

$$Q = \sigma dA$$

$$2DdA = \sigma dA$$

$$D = \frac{\sigma}{2} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Végtelen töltött felület σ felületi töltéssűrűséggel:

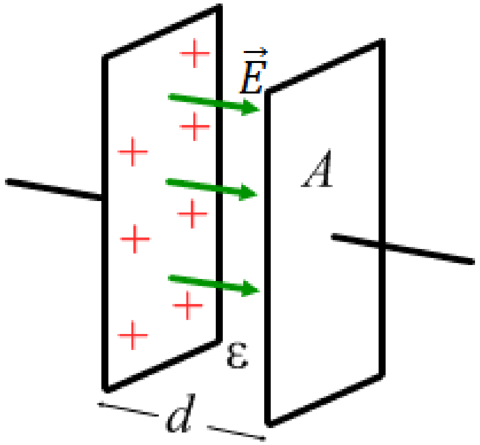


$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{A} = DdA = Q = \sigma dA$$

$$D = \sigma \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Feladat: 14

Síkkondenzátor kapacitása (17:40 szünet – 18:00)



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon} d} = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

<u>Elektromos mező energiája:</u> A kondenzátor annyi energiát tárol, mint amennyi a feltöltéséhez kell.
Tegyük fel már van rajta $q(t)$ töltés és a feszültség $u(t)$.
Ekkor további dq töltés szétválasztásához végzendő munka:

$$dW = u(t)dq = \frac{q(t)}{C} dq$$

A teljes feltöltésre $q = 0$ és $q = Q$ között:

$$W = \int_0^Q u(t)dq = \int_0^Q \frac{q(t)}{C} dq = \left[\frac{q^2}{2C}\right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2 U^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

A térfogati energiasűrűség:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{CU^2}{2}}{Ad} = \frac{\frac{\varepsilon A}{d} \frac{E^2 d^2}{2}}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon E \cdot E = \frac{1}{2} D \cdot E$$

Általános esetben: $w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ ha a közeg anizotrop, így akkor is érvényes