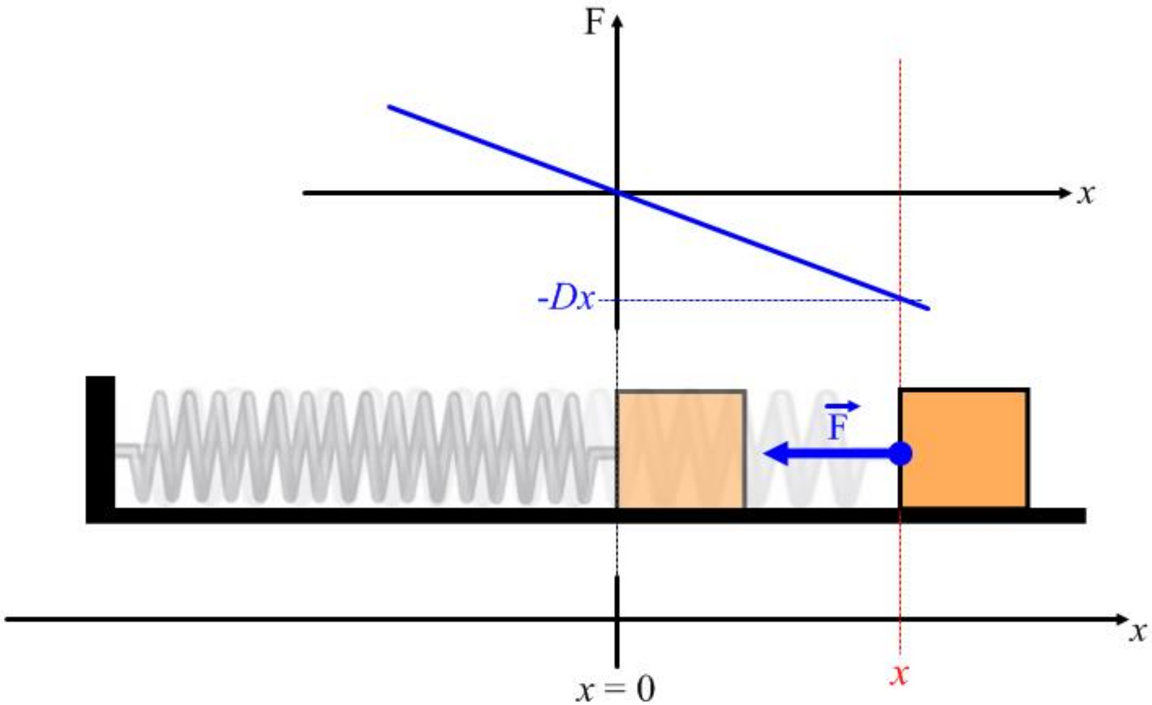
# Fizika I. GEFIT056BL Vegyészmérnök BSc, levelező tagozat, Kazincbarcika

2022/2023. tanév, II. félév

2.előadás

# Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

**Harmonikus rezgés:** Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).




Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás (mozgástörvény):

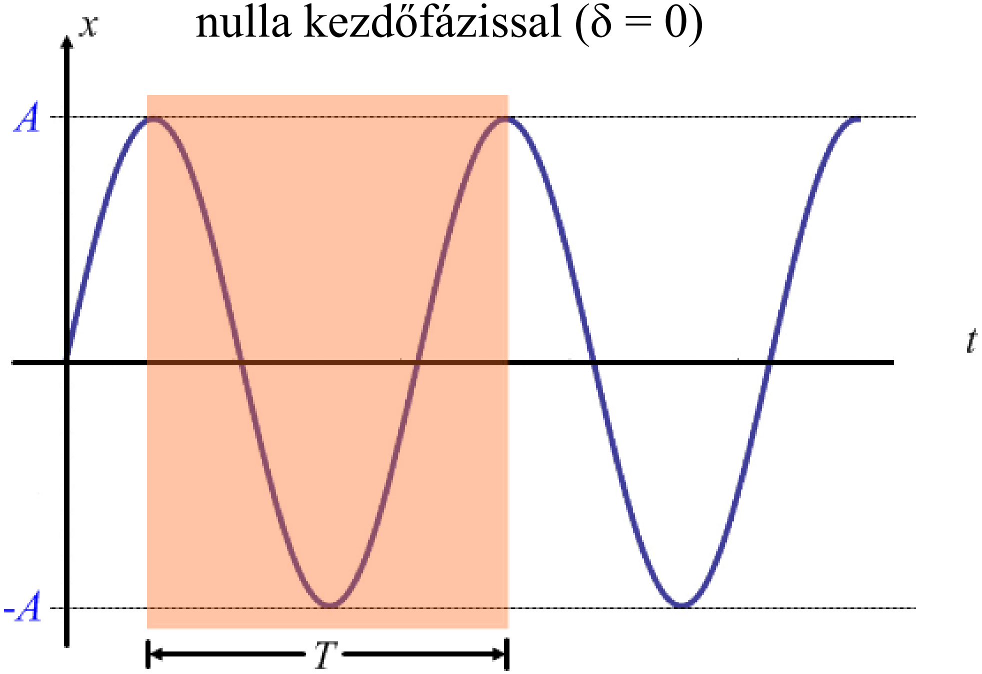
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket $\left\{ \begin{array}{l} \text{A: amplitúdó (maximális kitérés)} \\ \delta\text{: kezdőfázis} \end{array} \right.$

ω: körfrekvencia (lásd később)

# Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal ($\delta = 0$)




$$x(t) = x(t+T)$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

Tehát: $\omega^2 = \frac{D}{m}$

# Energia a harmonikus rezgésnél

**Kinetikus energia:** A sebesség-idő függvényt felhasználva (δ = 0)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

**Potenciális energia:** A kitérés-idő függvényt felhasználva (δ = 0) – rugalmas erőtér

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

**Mechanikai energia:**

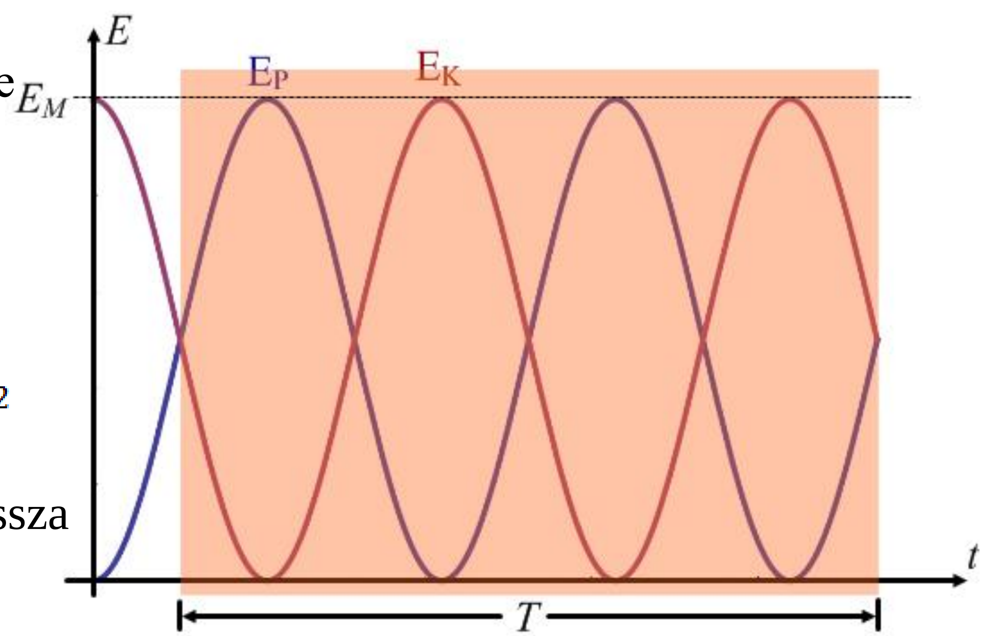
A potenciális és a kinetikus energia összege

$$E_M = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

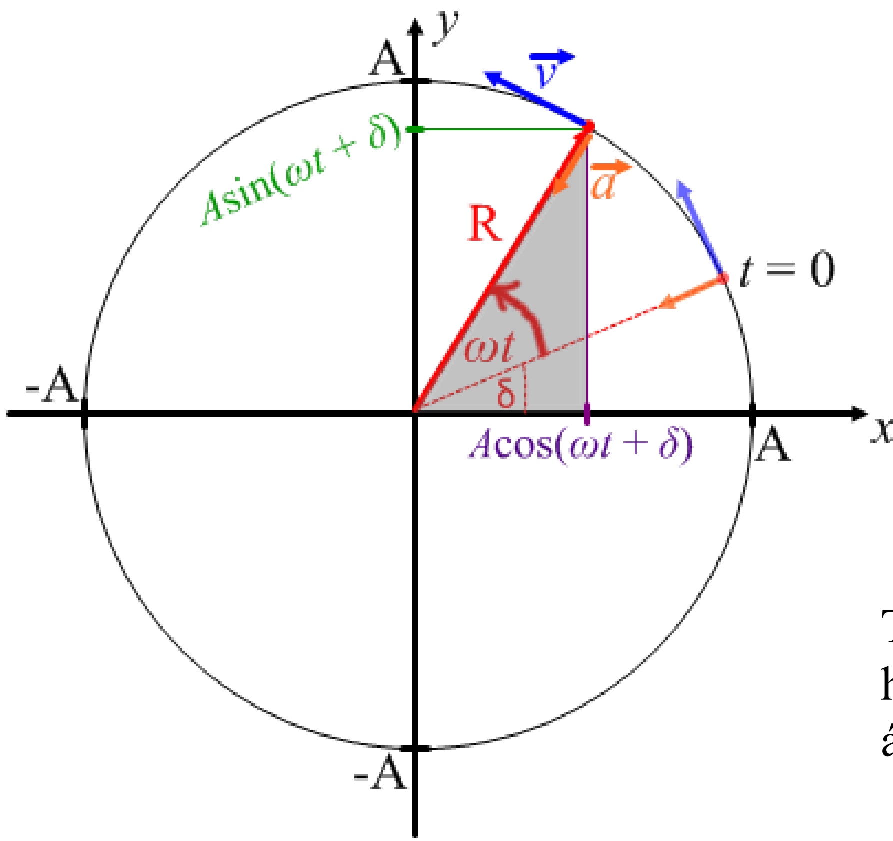
$$= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2$$

A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.



# Egyenletes körmozgás és harmonikus rezgés

Körmozgás esetén mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.




$T$: keringési vagy periódusidő
$\omega$: szögsebesség vagy körfrekvencia

Felhasználva a kapcsolatot:

$R = A$

$v_{ker} = R\omega = A\omega = v_{max}$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 A = a_{max}$$

Tehát a körmozgás két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás összetevéseként áll elő:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) = A\sin\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Hogy körmozgás legyen az eredmény, frekvenciák és amplitúdók meg kell egyezzenek, fáziskülönbség pedig π/2 kell legyen. SZIMULÁCIÓ!

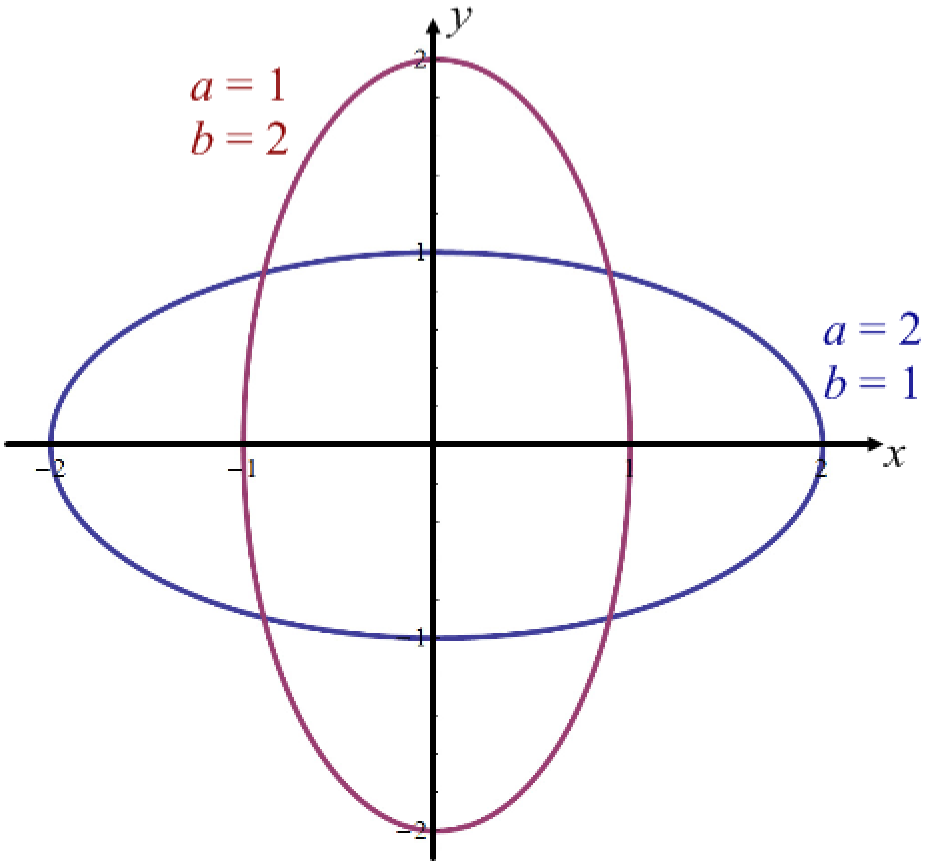
# Merőleges rezgések összetevése (többi eset)

# Eltérő amplitúdók, π/2 fáziskülönbség

A két merőleges kitérésre: $\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\omega t) \\ y(t) &= b\sin(\omega t) \end{aligned}\right\}$ $\frac{x}{a} = \cos(\omega t)$ és $\frac{y}{b} = \sin(\omega t)$

**frekvenciák azonosak**

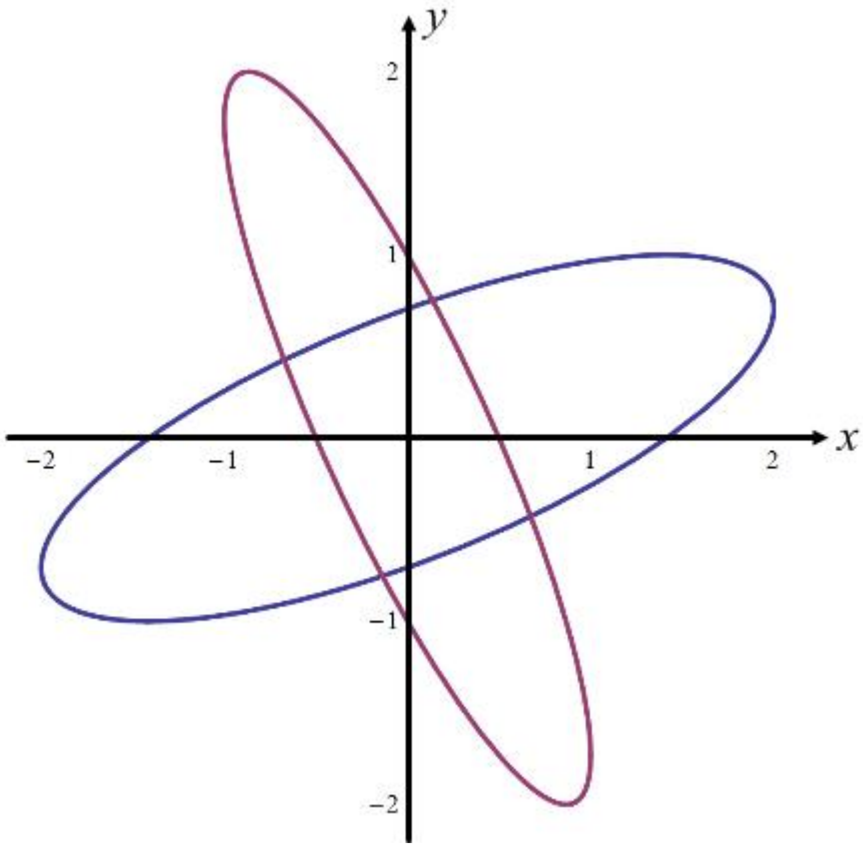
Tehát: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



# Tetszőleges fáziseltérés

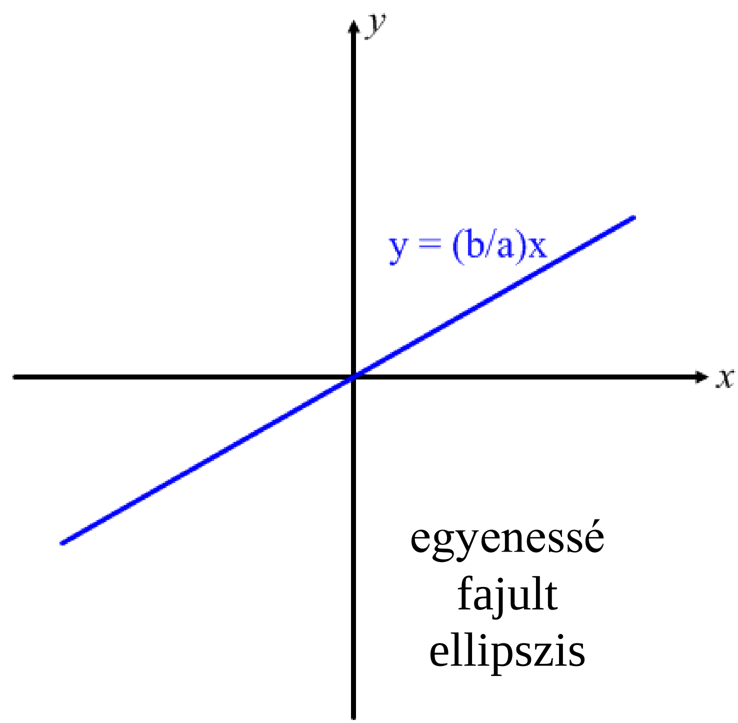
Abban az esetben, ha a frekvenciák azonosak, az amplitúdók nem, és a fáziseltérés bármi:
A mozgás továbbra is **ellipszis** alakú:

viszont torzul és elfordul
-5π/6 illetve -π/4 fáziskülönbség




másik speciális eset: 0 fáziskülönbség (vagy π)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\sin(\omega t) \\ y(t) &= b\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \longrightarrow y = \frac{b}{a}x$$

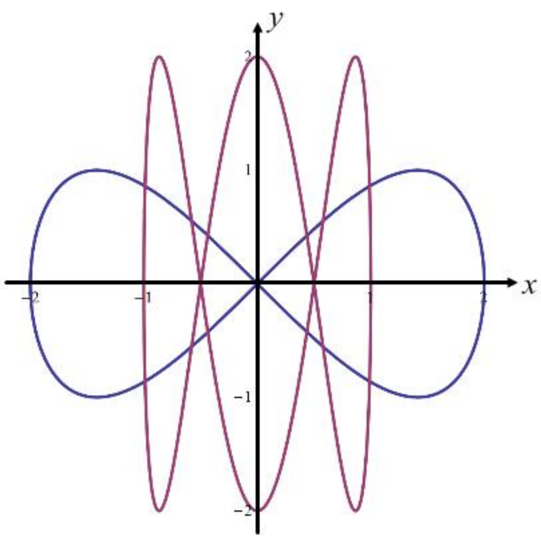


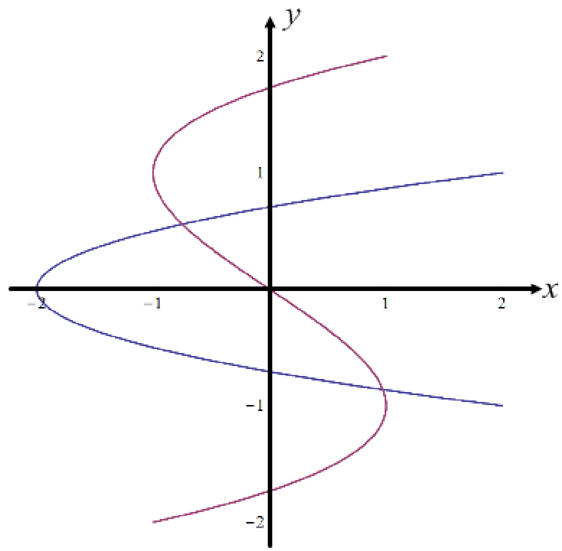
# Lissajous-görbék

<u>Teljesen általános eset</u>: A frekvenciák sem egyeznek meg.

A mozgás **periodikus**, ha a frekvenciák aránya **racionális**
pl. 1/2 vagy 1/3
(y: $-\pi/2$ fáziskülönbség)

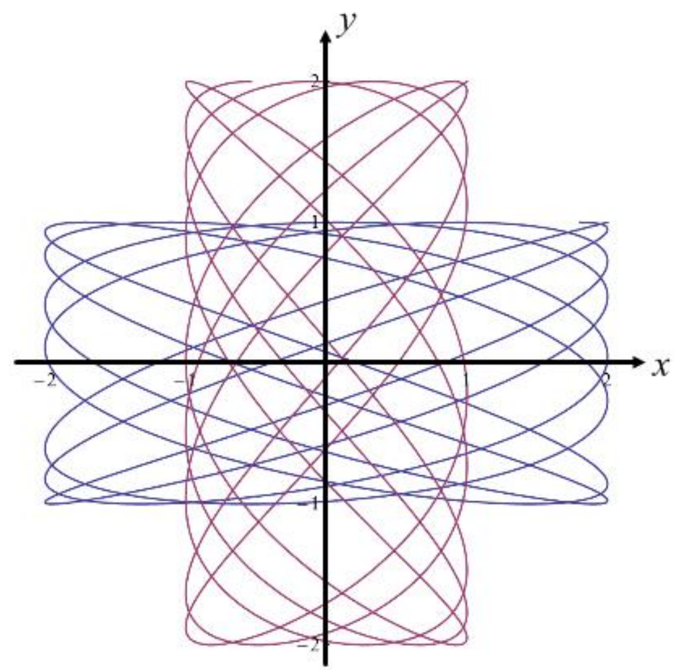
2 vagy 3
(0 fáziskülönbség)




a pálya ismétlődő görbét alkot
a periódusidők legkisebb közös többszöröse múlva
SZIMULÁCIÓ!

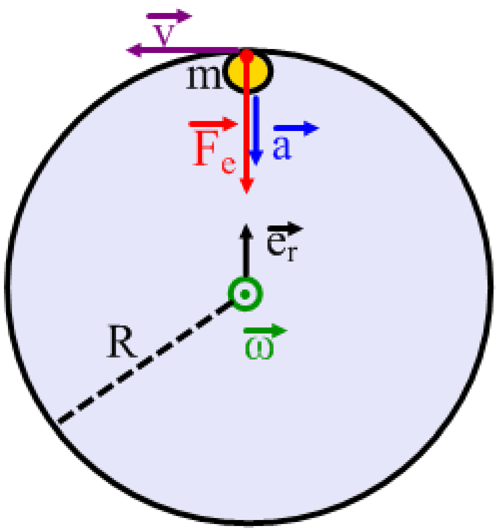
Ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor soha nem zárul a görbe, a mozgás nem periodikus (ismétlődő). pl.
(0 fáziskülönbség) $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$




a pálya sohasem ismétlődik
(teljesen besatírozná...)

# Egyenletes körmozgás dinamikája

**Egyenletes körmozgás:** A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).




INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötélerő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.

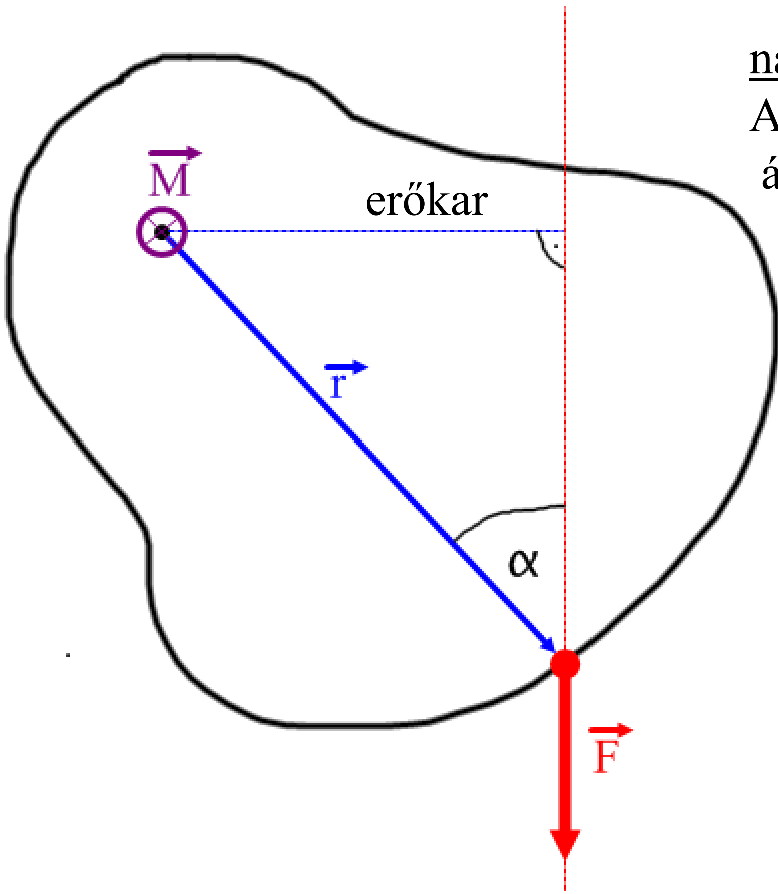
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$ , tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

# Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

**Erőkar**: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága




nagysága: erő × erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr\sin\alpha$
A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

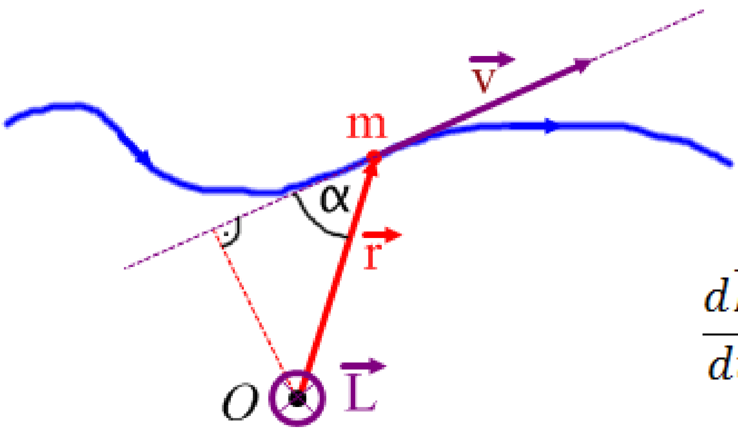
iránya: a vektorszorzat alapján (jobbkéz-szabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

# Perdület (impulzusmomentum)

A **perdület** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$




A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e$$

<u>**Perdülettétel**</u>**:** $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$

# Tehetetlenségi nyomaték

Speciális eset: tömegpont rögzített tengely körül, állandó távolságban mozog (körmozgás)

$$L(t) = mr^2\omega(t)$$

Ekkor a perdületet idő szerint deriválva: $\frac{dL}{dt} = mr^2\frac{d\omega(t)}{dt} = mr^2\beta(t)$

$\beta$ a szöggyorsulás, az $mr^2$ tag pedig a tömegpont **tehetetlenségi nyomatéka**.

Tömegpontra a tehetetlenségi nyomaték tehát: $\boxed{\theta = mr^2}$ , ahol $r$ a tengelytől mért távolság.

A perdülettételt felhasználva: $\frac{dL}{dt} = mr^2\frac{d\omega(t)}{dt} = \theta\beta(t) = M$

Megkaptuk a forgómozgás alapegyenletét: $\boxed{M = \theta\beta}$

A tömegpont **mozgási energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$

# Munka és teljesítmény

Az elemi munka egy infinitezimális elmozdulás során körmozgás esetén:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = ma_t ds = m\beta r ds = m\beta r^2 d\phi = \theta\beta d\phi = M d\phi$$

Ebből a teljesítmény:

$$P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = M\frac{d\phi}{dt} = M\omega$$

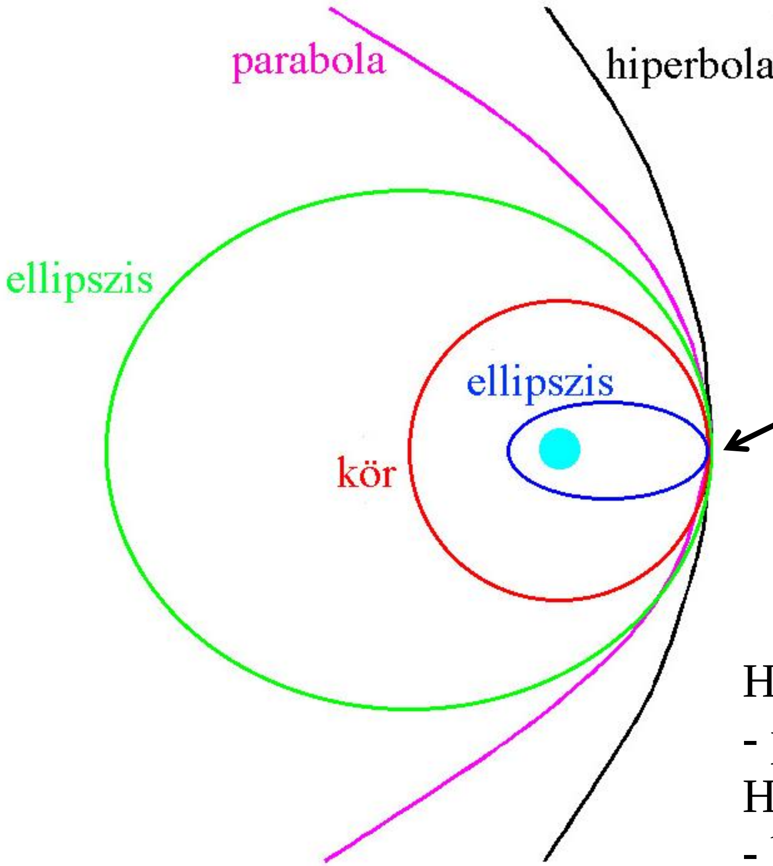
Haladó és forgó mozgások közötti analógia

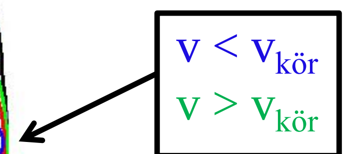
| | Haladó mozgás (1 dimenzió) | Forgó mozgás |
|---|---|---|
| változó | x | $\varphi$ |
| (szög)sebesség | $v_x$ | $\omega$ |
| (szög)gyorsulás | $a_x$ | $\beta$ |
| tehetetlenség | m | $\theta$ |
| A (szög)gyorsulás oka | $F_x = m a_x$ | $M = \theta\beta$ |
| Impulzus(momentum) | $I_x = m v_x$ | $L = \theta\omega$ |
| Kinetikus energia | $\frac{1}{2} m v_x^2$ | $\frac{1}{2} \theta\omega^2$ |
| munka | $F_x \Delta x$ | $M\Delta\varphi$ |
| teljesítmény | $F_x v_x$ | $M\omega$ |

# Bolygók mozgása

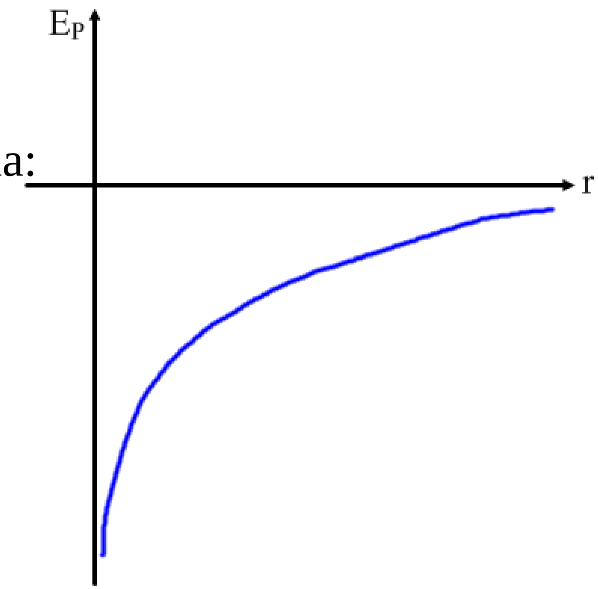
Tegyük fel, hogy $m$ tömegű test mozog egy sokkal nagyobb ($M$) tömegű test gravitációs terében. Mivel $M$ sokkal nagyobb, mint $m$, ezért nyugvónak tekinthető. pl. Nap és Föld.

Az $m$ tömegű test rendelkezik $E_K$ kinetikus és $E_P$ potenciális energiával.
A végtelenben vesszük a nullpontot: $E_P = 0$, ha $r \to \infty$ vagyis $E_P$ negatív!!!




A mechanikai energia:
$E_M = E_P + E_K$



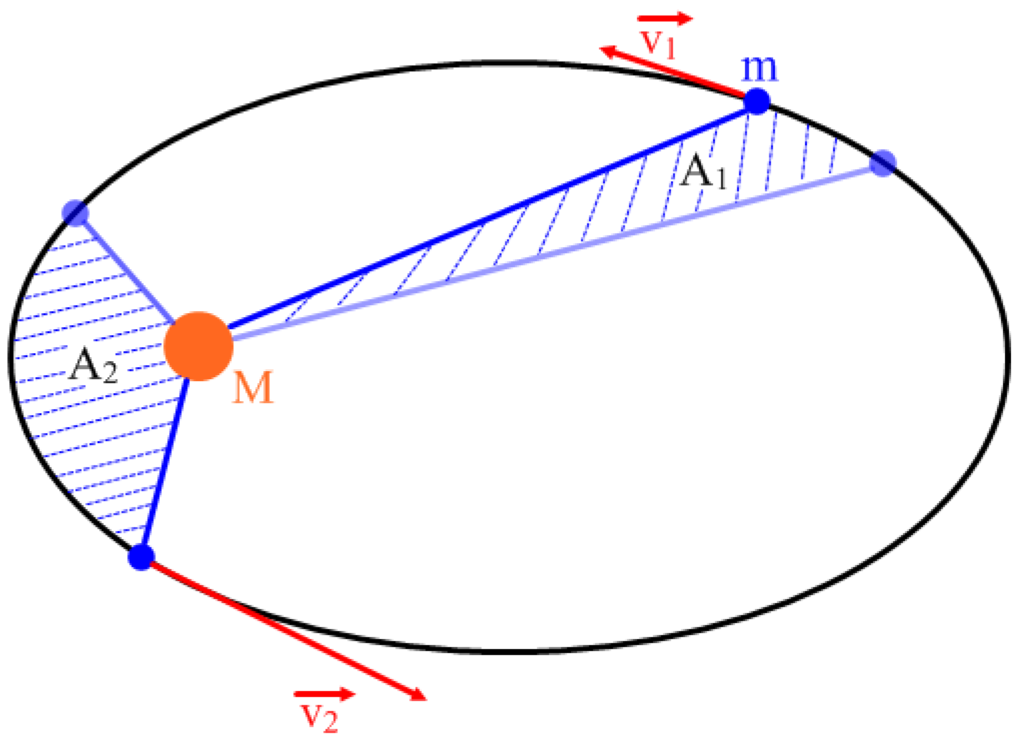

Ha $E_M \geq 0$, akkor szabad (eltávolodhat végtelenbe)
- parabola ($E_M = 0$ ) vagy hiperbola alakú pálya
Ha $E_M < 0$, akkor kötött (véges távolságban marad)
- kör vagy ellipszis alakú pálya

# Kepler törvényei I-II.

Egy nagy tömegű test gravitációs terében kötött állapotban mozgó testekre (pl. bolygók).

**I.** A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában a Nap áll.

**II.** (Területi tétel) A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) egyenlő idő alatt egyenlő területet súrol. A bolygók Napközelben gyorsabban mozognak.
A perdület megmaradásából következik: nincs forgatónyomaték centrális erőtérben.

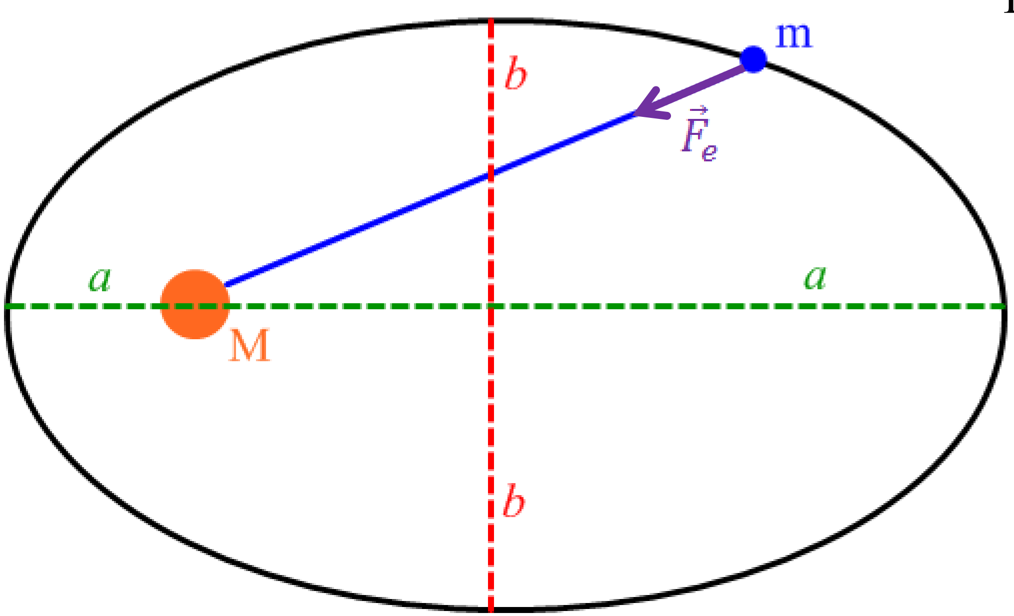


# Kepler III. törvénye

**III.** Az ellipszispályák fél-nagytengelyeinek ($a$) köbei úgy aránylanak, mint az adott pályákon keringő bolygók keringési idejének ($T$) négyzetei.

Tehát minden a Nap körül keringő bolygóra (és bármilyen testre): $\frac{a^3}{T^2} = \text{állandó}$

Mindhárom törvény a Newton axiómákból, és a Newton-féle gravitációs erőtörvényből levezethető.




Bizonyítás kör alakú pályára: $a = b = R$

$$F_e = ma$$

$$\gamma \frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R$$

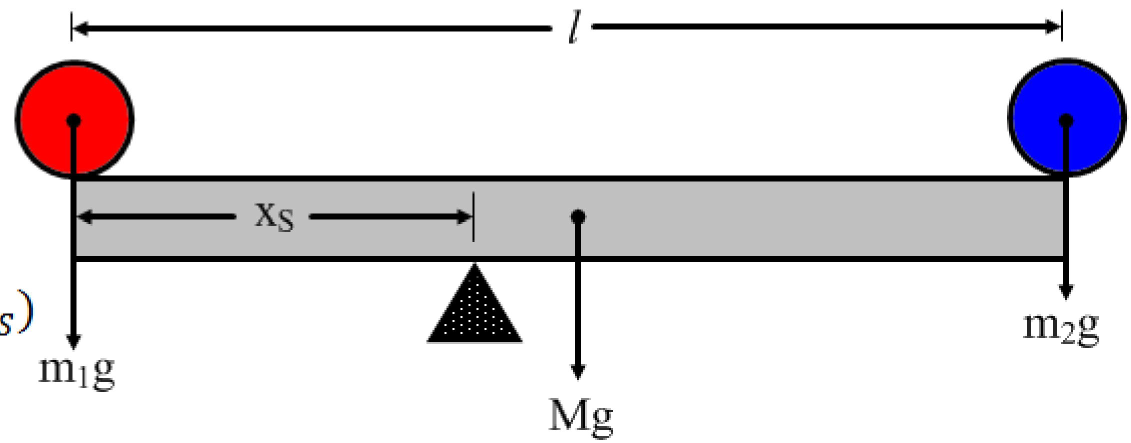
$$\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$\frac{\gamma M}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2} = \text{állandó}$$

# Súlypont

A testek mérete sokszor nem hanyagolható el a problémában szereplő méretekhez képest. A kiterjedésük miatt a haladó mozgás mellett a forgó mozgásukat is figyelembe kell venni.

A **súlypont** az a pont ami alatt úgy alátámaszthatjuk a testet, hogy az egyensúlyban legyen:

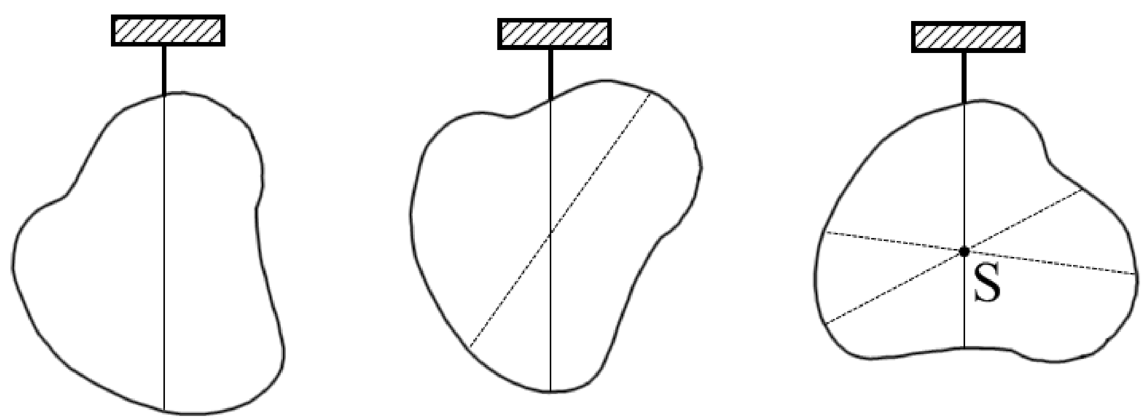



Az alátámasztás helyére az eredő forgatónyomatéknak nullának kell lennie. Például:

$$m_1 g x_S = Mg\left(\frac{l}{2} - x_S\right) + m_2 g(l - x_S)$$

$$x_S = \frac{Mg\left(\frac{l}{2}\right) + m_2 g l}{m_1 g + Mg + m_2 g}$$

Egy bonyolult alakú test súlypontját azt több pontjában felfüggesztve határozhatjuk meg, mint a függőleges vonalak metszéspontja:

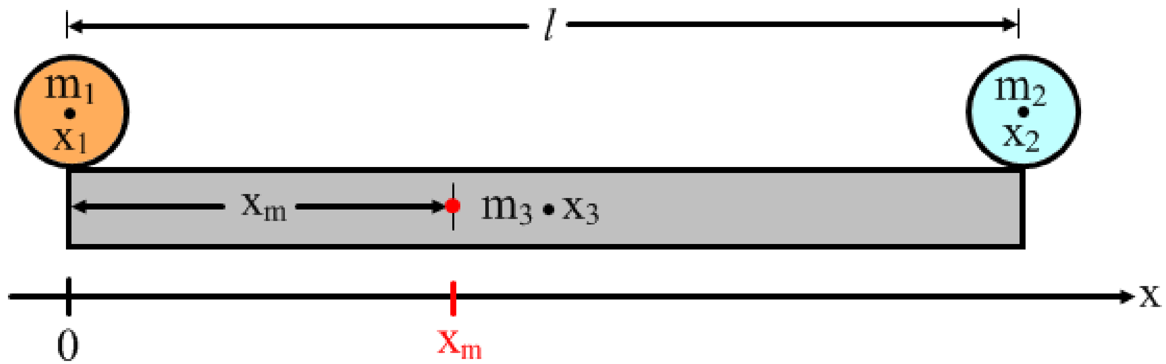


# Tömegközéppont

Kiterjedt test **tömegközéppontjának** helye a testet felépítő pontok helyének tömegekkel súlyozott átlaga (illetve a részek tömegközéppontjainak tömegekkel súlyozott átlaga):

A példában az összetett test tömegközéppontjának *x* koordinátája:

$$x_m = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 \left(\frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$




A **tömegközéppont** helye általában: $(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^N m_i}\right) =$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i\, x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i\, y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i\, z_i}{m}\right)$$

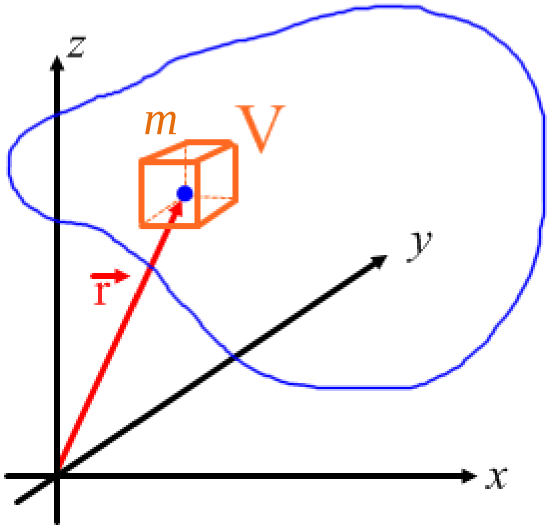
tehát: $\boxed{\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\, \vec{r}_i}{m}}$

A legtöbb esetben a **súlypont** és a **tömegközéppont** helye ugyanott van, és a kettő közül bármelyik használható. Különbség a két pont helye között csak akkor van, ha a test mérete olyan nagy, hogy a gravitáció nem tekinthető a test minden pontjára ugyanolyan erősségűnek.

# Folytonos tömegeloszlású test

Folytonos tömegeloszlás esetén a test minden pontjában definiálhatjuk a **sűrűséget**:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{V \to 0} \frac{m(\vec{r}, V)}{V}$$




Ez általános esetben pontról pontra változhat.

A test tömegét a sűrűség térfogati integrálja adja (a test térfogatára integrálva):

$$m = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

A test tömegközéppontja (súlypontja) ekkor:

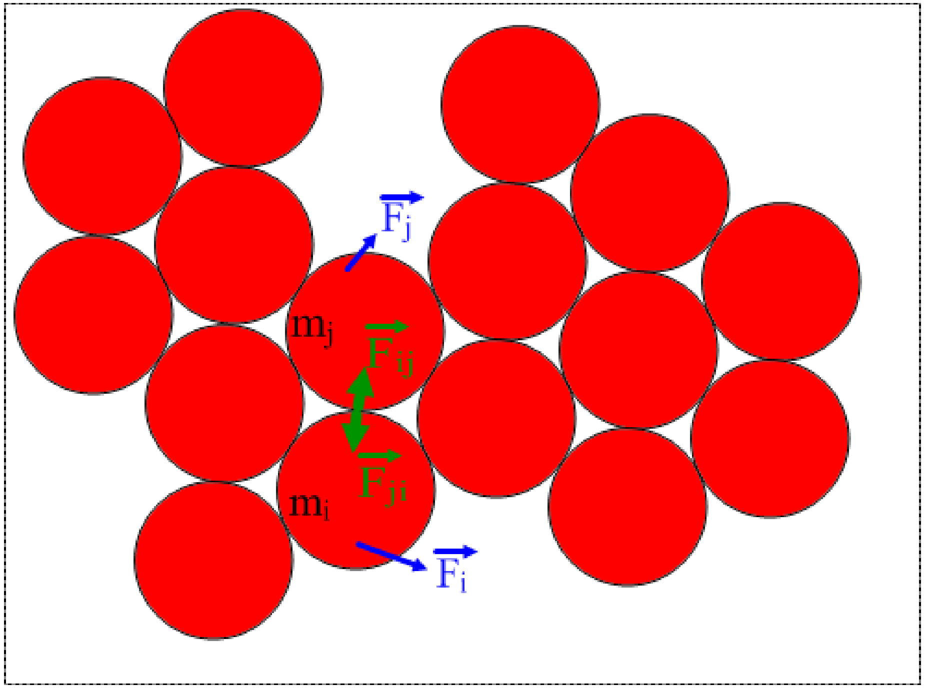
$$\vec{r}_m = \frac{\int_V \rho(\vec{r})\vec{r} dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV} = \frac{\int_V \rho(\vec{r})\vec{r} dV}{m}$$

# Lendülettétel tömegpontrendszerre

Pontrendszer mozgásának vizsgálatához írjuk fel a **lendülettételt** az egyik pontra (*i*):

A rá ható külső erők eredője: $\vec{F}_i$

A *j*-edik pont által kifejtett erő: $\vec{F}_{ji}$




A dinamika alapegyenletét is felhasználva az általános (*i*-edik) tömegpontra:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

Összegezve a test minden pontjára:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

A belső erők kiesnek (Newton 3. axiómája): $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

Lendülettétel tömegpontrendszerre: $$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i}$$

Ha a pontrendszerre ható erők eredője nulla, akkor a lendület állandó.

# Tömegközépponti tétel

A lendülettételt tovább alakítva, és felhasználva a tömegközéppont/súlypont definícióját:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_S) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_S = m\vec{a}_S$$

<u>A **tömegközépponti tétel**</u>: $\boxed{m\vec{a}_S = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i}$

Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer összes tömege ebbe a pontba lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna.

# Perdülettétel és munkatétel

A **perdülettétel** a lendülettételhez hasonlóan levezethető.
A tömegpontrendszer perdületének idő szerinti deriváltja egyenlő az eredő forgatónyomatékkal:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$$

A tömegpontrendszerre vonatkozó **munkatétel** azt mondja ki, hogy a rendszer kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az összes erő (<u>külső és belső</u>) által a rendszeren végzett munkával:

$$\boxed{W = \Delta E_K}$$

A belső erők azért szerepelnek, mert a rendszer tömegpontjai közötti potenciális energia munkavégzés során átalakulhat a pontok kinetikus energiájává.
Például egy rúgó két végéhez kötött testek rezgése során, vagy a Naphoz közeledő üstökös esetében.

# Ütközések

Ha az ütköző testek zárt rendszert alkotnak (külső erők nem hatnak rájuk), akkor az ütközés során mindig teljesül a lendületmegmaradás.
A rendszer tagjainak lendülete összesen ugyanazt adja az ütközés előtt mint után:

$$\vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} + \vec{p}_{C1} + \cdots = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} + \vec{p}_{C2} + \cdots$$

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} + m_C \vec{v}_{C1} + \cdots = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2} + m_C \vec{v}_{C2} + \cdots$$

Ez általában 3 független egyenletet jelent a lendület *x*, *y* és *z* komponenseire.
Erre akkor van szükség ha az ütközés térben játszódik le és nem centrális (pl. két egymáshoz vágott labda, melyek sebességvektorai nem a másik tömegközéppontjának irányába mutatnak, vagy egy szétrobbanó tűzijáték esetében is alkalmazható)
Billiárdgolyók ütközése az asztal síkjában két egyenletet eredményez.
Egyenes mentén mozgó két test centrális ütközése pedig csak egyet:

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

Ha ellentétes irányban halad a két test, akkor ez egyik sebesség negatív.

Extrém esetek:

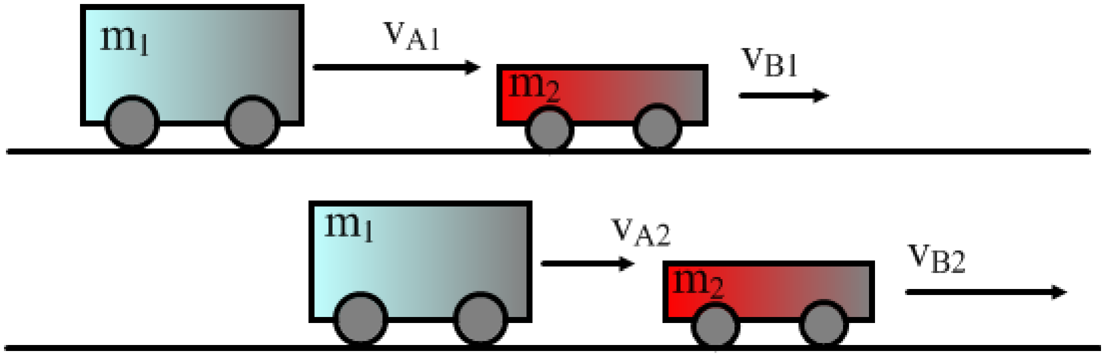
Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két test összetapad: $v_{A2} = v_{B2}$ és $m = m_A + m_B$

Tökéletesen rugalmas ütközésnél a kinetikus energia is megmarad:

$$\frac{1}{2} m_A {v_{A1}}^2 + \frac{1}{2} m_B {v_{B1}}^2 = \frac{1}{2} m_A {v_{A2}}^2 + \frac{1}{2} m_B {v_{B2}}^2$$

# Ütközési szám

A valóságos ütközések se nem tökéletesen rugalmatlanok, se nem tökéletesen rugalmasak. Az **ütközési szám** azt mutatja meg mennyire rugalmas az ütközés. Ez a szám a távolodási sebesség és a közeledési sebesség hányadosa.

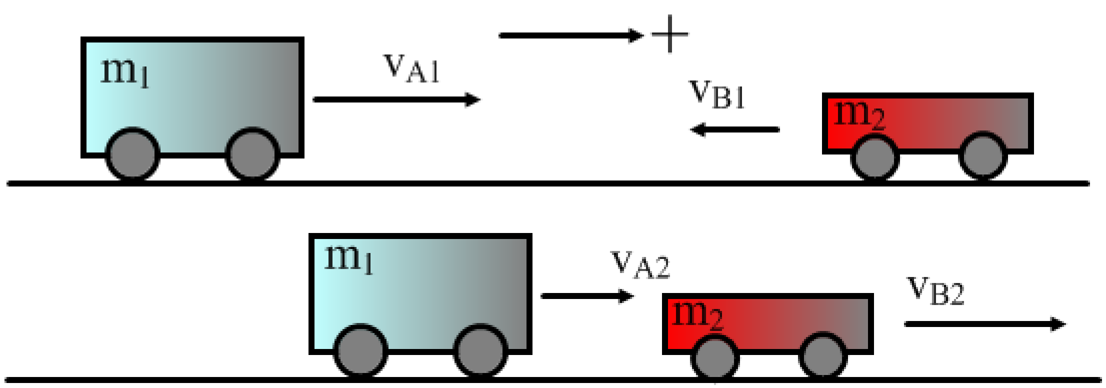



Az ütközési szám:

$$k = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

<u>Extrém esetek:</u>

tökéletesen rugalmatlan: $k = 0$




tökéletesen rugalmas: $k = 1$

általánosan: $0 \leq k \leq 1$

Egyszerűbb ezt használni a kinetikus energia megmaradása helyett, mert ez nem másodfokú.

# Tehetetlenségi nyomaték

Egy tömegpontrendszer **tehetetlenségi nyomatéka** az egyes tömegpontok tehetetlenségi nyomatékainak összege:

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{\,2}$$

Folytonos tömegeloszlás esetén az infinitezimális $dV$ térfogatú darab tömege: $\rho dV$
Tehetetlenségi nyomatéka: $dmr^2 = \rho dVr^2$
Tehát az egész test tehetetlenségi nyomatéka: $\boxed{\theta = \int_V \rho r^2 dV}$ $r$ a tengelytől mért távolság.

**Steiner tétel**: Ha tudjuk a tehetetlenségi nyomatékot egy, a súlyponton átmenő tengelyre ($\theta_s$), akkor a vele párhuzamos, tőle $d$ távolságban lévő tengelyre a tehetetlenségi nyomaték:

$$\boxed{\theta_d = \theta_s + md^2}$$

# Merev testek mechanikája

Egy **merev test** bármely két pontjának távolsága időben állandó (nem deformálódik).

**Egy merev test egyensúlyának feltételei**:
• a testre ható külső erők eredője nulla **és**
• a külső erők bármely pontra (illetve tengelyre) vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla.

Itt az egyensúly nem csak a statikus állapotot jelenti, hanem állandó sebességű mozgást és állandó szögsebességű forgást is.

**Változó mozgás esetén**:
Merev test mozgása tehát haladó mozgásból és forgómozgásból áll.
- A haladó mozgást (a tömegközéppont gyorsulását) a **tömegközépponti tételből** kaphatjuk meg.

$$m\vec{a}_S = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

- A forgó mozgás szöggyorsulását pedig a **forgómozgás alapegyenletéből** lehet meghatározni.

$$M_e = \theta\beta$$