Fizika I. GEFIT056BL Vegyészmérnök BSc, levelező tagozat, Kazincbarcika

2022/2023. tanév, II. félév

Kinematika

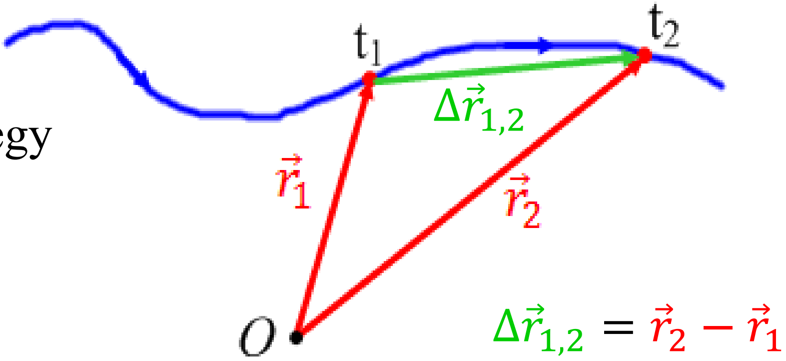
A mozgás matematikai leírása, a mozgást kiváltó ok feltárása nélkül.

Helyvektor és elmozdulás

Egy test helyzetét és helyzetváltozását csak más testekhez viszonyítva írhatjuk le. Választani kell egy vonatkoztatási rendszert:

Egy test (pontszerű) helyzetét a t időpillanatban egy $\vec{r}(t)$ **helyvektorral** jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a testhez mutat.

A test mozgása során a térben kijelöli a **pályagörbét**.



Az **elmozdulás** a helyvektor megváltozása egy eltelt Δt idő alatt (itt $\Delta t = t_2 - t_1$).

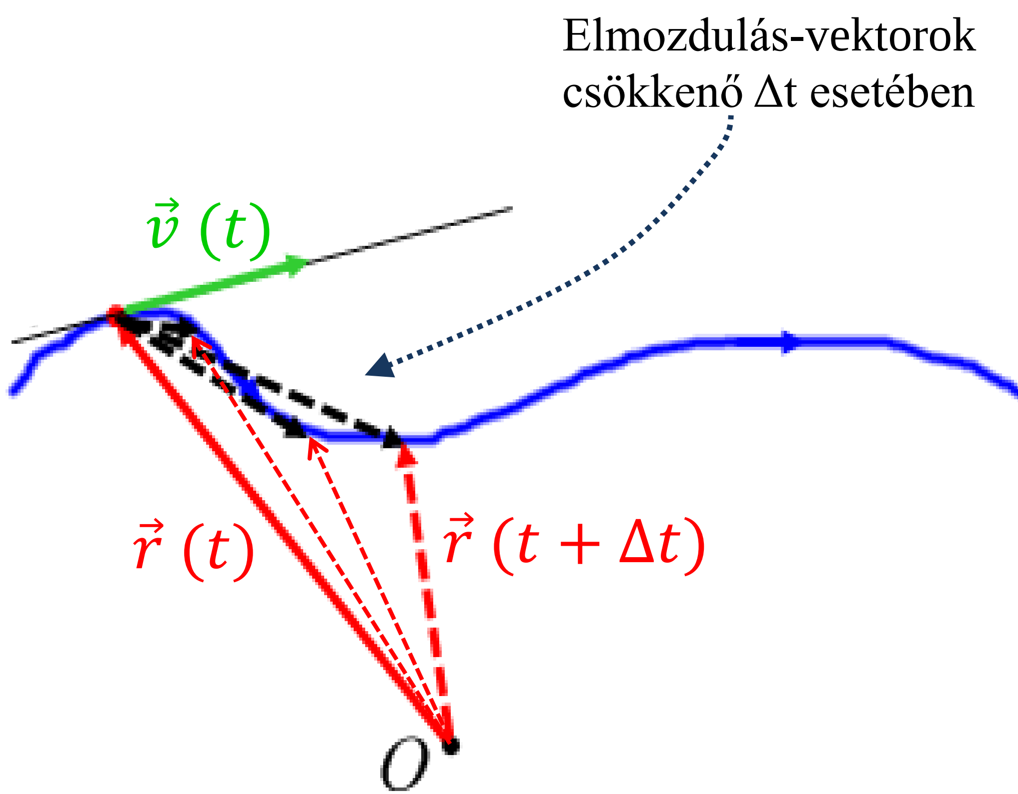
$$\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Sebesség

A **sebesség** azt jellemzi milyen gyorsan változik a helyvektor.
FONTOS: a sebesség vektormennyiség, iránya és nagysága is számít!

Ha a sebesség iránya és/vagy nagysága változik (általában igen), akkor eléggé pontos értéket csak kis Δt időre kaphatunk.
Teljesen pontos, ha $\Delta t \to 0$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Gyorsulás

A **gyorsulás** a sebességvektor változási gyorsasága:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

FONTOS: gyorsulás akkor is van ha csak a sebesség iránya változik. Pl. kanyarodás

Ha a gyorsulás mint az idő függvénye, a kezdeti hely $\vec{r}_0$ és a kezdeti sebesség $\vec{v}_0$ ismert, akkor a mozgás pályája meghatározható:

Első lépés a sebesség idő függvény meghatározása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{a}\,dt = d\vec{v}$$

Bármely t_1 időpontban a sebesség: $\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt + \vec{v}(t_0)$

A sebességfüggvény ismeretében a helyvektor bármely t_1 időpontban hasonlóképpen meghatározható:

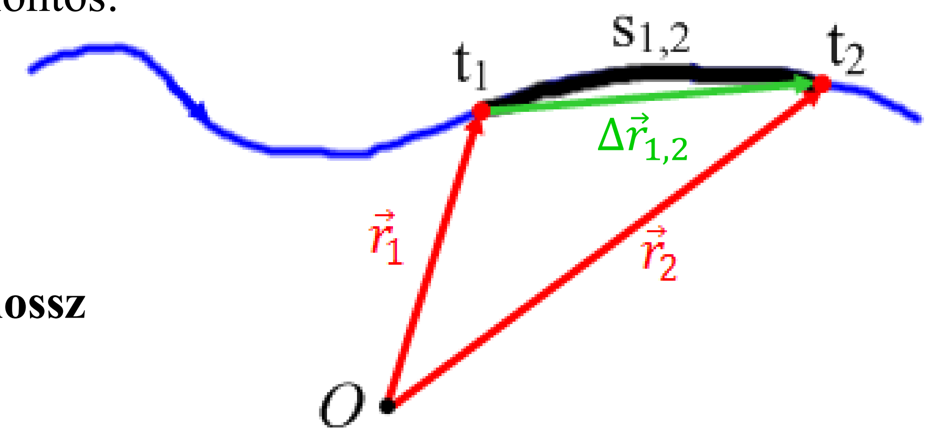
$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt + \vec{r}(t_0)$$

Úthossz és átlagsebesség

Egy adott idő alatt megtett **út(hossz)** a közben befutott pályagörbe hosszát jelenti.
Ez már csak egy skalár mennyiség.

Számításánál csak a sebesség nagysága fontos:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\,dt$$



Az ábra szemlélteti a különbséget az **úthossz**
és az **elmozdulás(vektor)** között!

Az **átlagsebesség** (skalár) az a sebességnagyság
amivel egyenletesen haladva ugyanazt a hosszúságú
utat tenné meg a test ugyanakkora idő alatt:

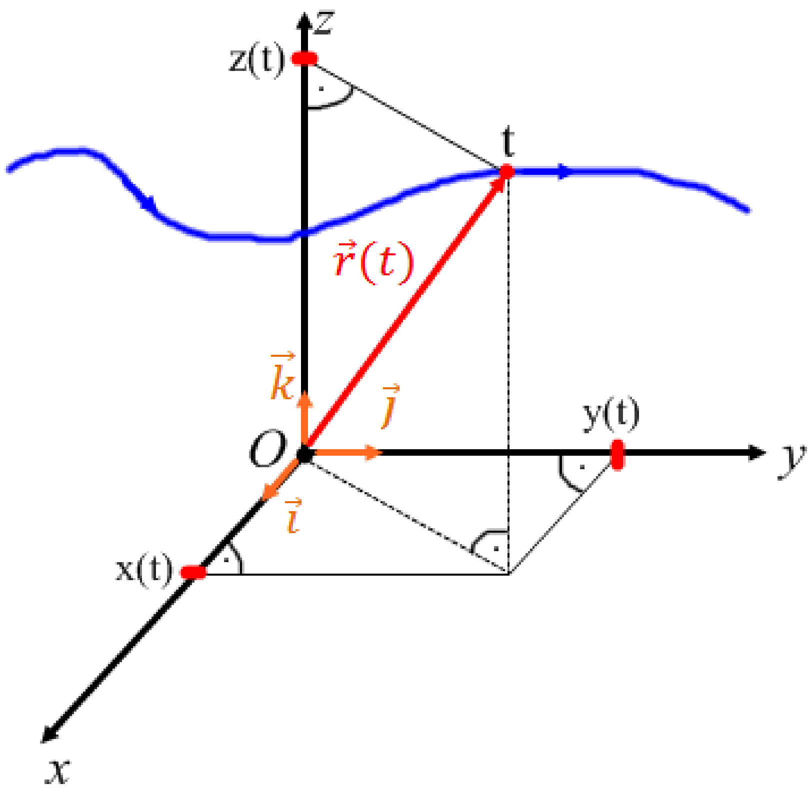
$$\bar{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}$$

Derékszögű Descartes koordináta rendszer

Segítségével a pálya egyenlete:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Az *x(t), y(t), z(t)* függvények a **koordináták**.



Az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységvektorok a **bázisvektorok**.

Pitagorasz tételével: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

A sebesség:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

A sebesség nagysága: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

A gyorsulás és nagysága:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

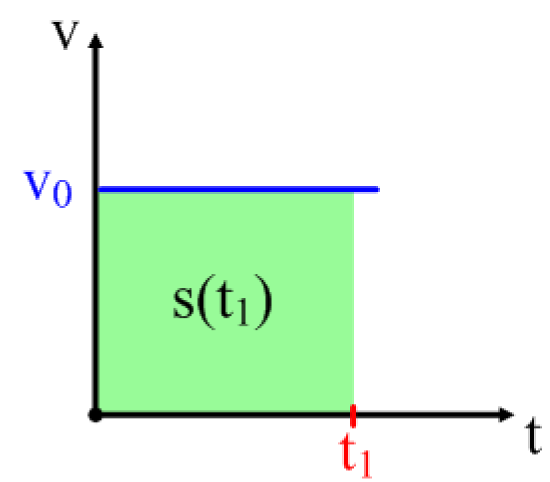
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Példa: Egyenes vonalú egyenletes mozgás

A mozgás 1 dimenziós, ezért elég egy koordináta ha a mozgás irányába vesszük fel azt az egy tengelyt (pl. *x*).
Ebben az egyszerű esetben:

$$|v_x| = v \qquad |\Delta x| = s$$

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t_1} v\, dt = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v\Delta t$$

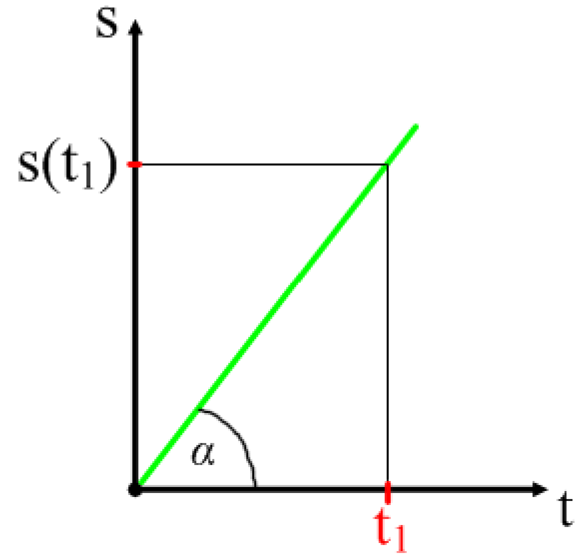


Tehát ha $t_0 = 0$, akkor visszakapjuk az $s = vt$ képletet.

A megtett út a sebesség-idő grafikon alatti terület.

Tehát az úthossz lineáris függvénye az időnek, a meredekség pedig a sebesség:

$$\tan\alpha = v = \frac{s}{t}$$



Példa: Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Ha a kezdősebesség vektor és a gyorsulás vektor egy egyenesbe esik, akkor a test annak az egyenesnek a mentén fog mozogni (ismét elég egy koordináta, pl. *z*):

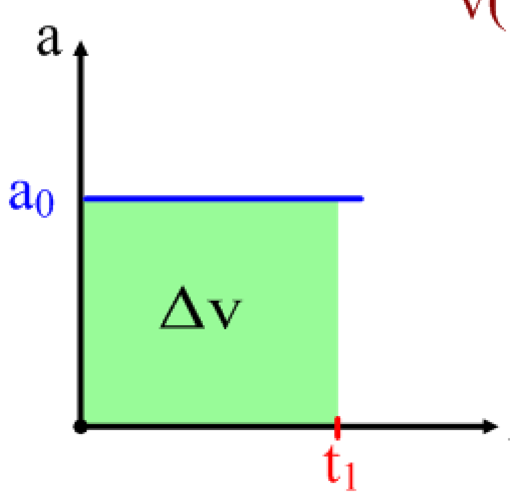
Hagyjuk el az indexeket a sebességnél és gyorsulásnál: $a_z = a$ és $v_z = v$ (lehetnek negatívok, ellenben a gyorsulás és a sebesség nagyságával!).

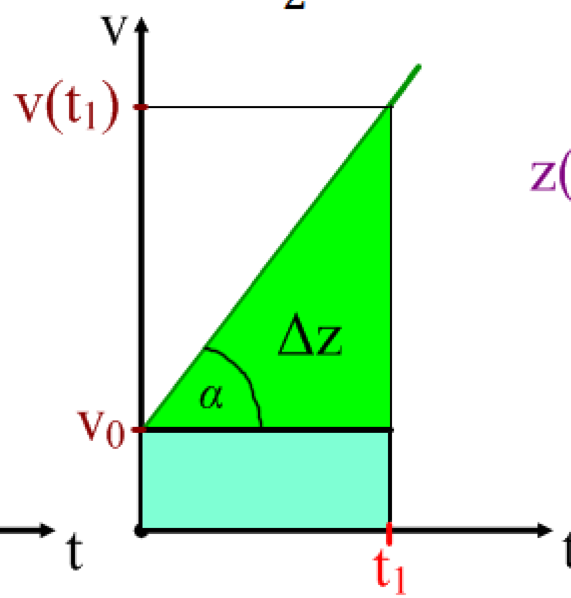
A sebesség egy t_1 időpontban:

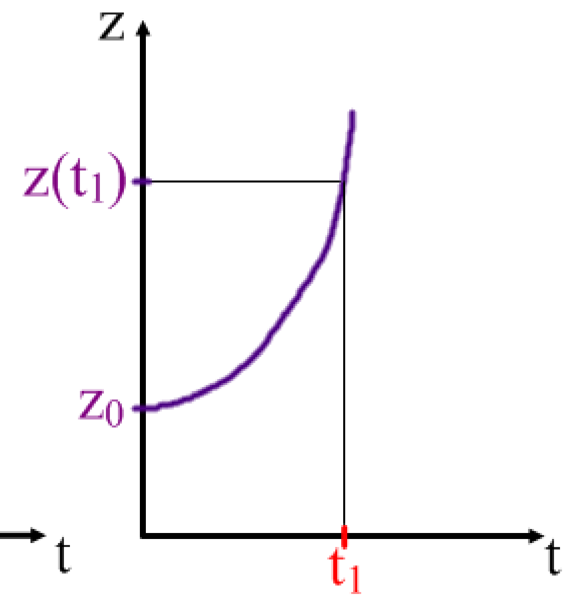
$$v(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt + v(t_0) = a(t_1 - t_0) + v(t_0) \rightarrow \Delta v = a\Delta t$$

A test helye : $z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} (at + v_0)\,dt + z(t_0) = \frac{1}{2}a{t_1}^2 + v_0 t_1 + z(t_0)$

(legyen $t_0 = 0$)



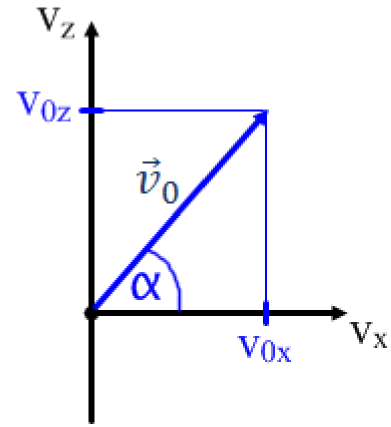




Példa: Ferde hajítás

A gyorsulás állandó (g), de nem esik egybe a kezdősebesség vektor irányával:
A kezdeti sebesség felbontása (2D – x és z):

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$



A gyorsulás: $\vec{a} = -g\vec{k}$

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + 0\vec{j} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor: $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{i} + 0\vec{j} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t\right)\vec{k}$

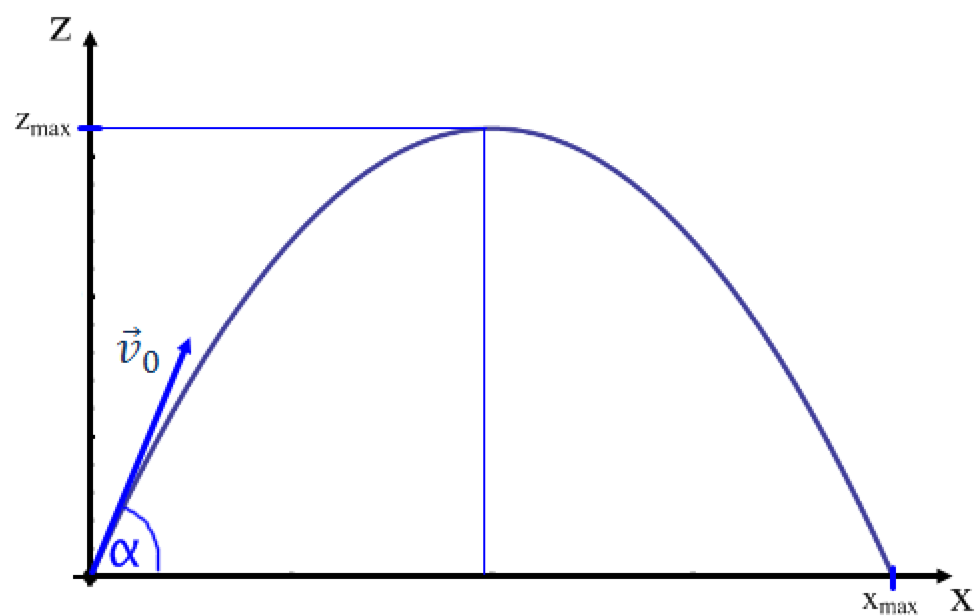
A test földet ér amikor $z = 0$:

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t = 0$$

Megoldva az időre: $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

Behelyettesítve az x koordinátára megkapjuk a hajítás távolságát:

$$x_{max} = \frac{2v^2{}_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

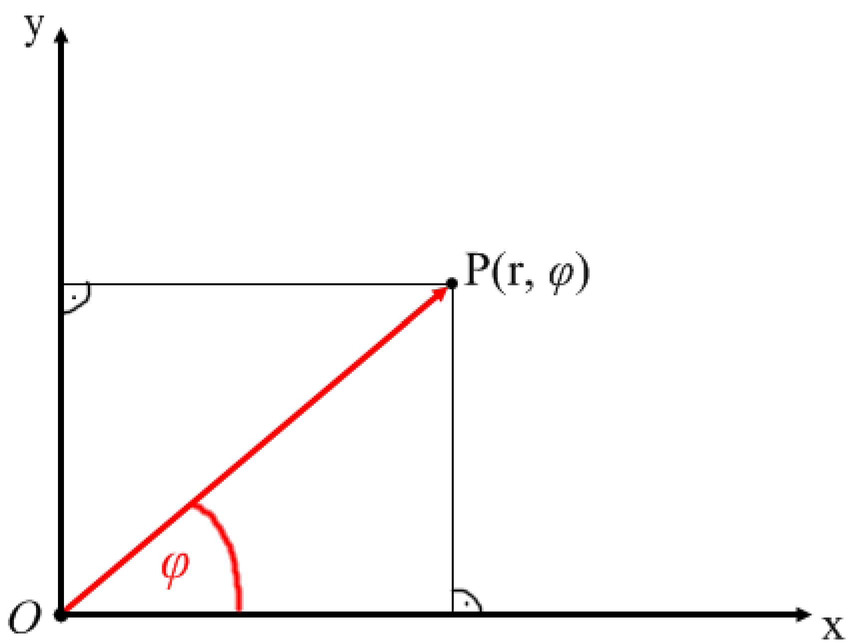


Síkbeli polár koordináta rendszer

A két koordináta: egy ponttól mért távolság és egy iránytól mért szög.
Körmozgás leírására jól használható, ha az origó a kör középpontjában van.

Pitagorasz tételével és a tangens definíciójából:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



A koordinátákat a másik irányba kifejezve:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

A φ szög változási gyorsasága adja a **szögsebességet** (mértékegysége: 1/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

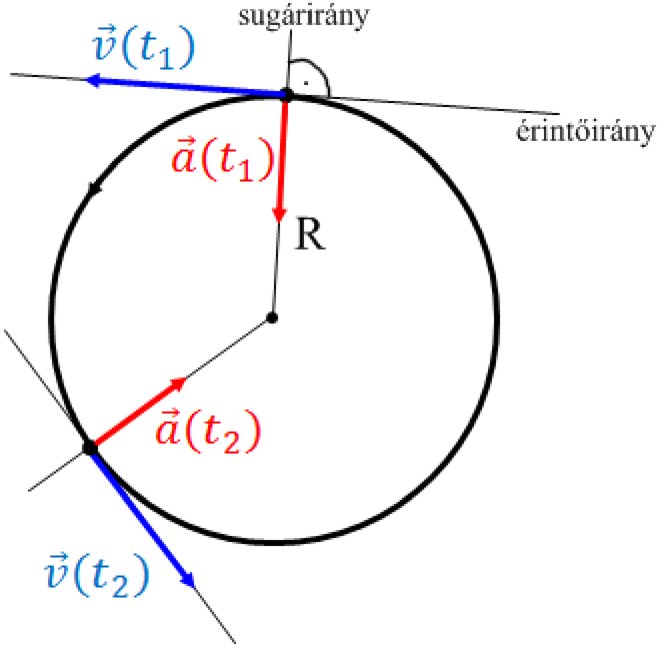
A szögsebesség változási gyorsulása pedig a **szöggyorsulás** (mértékegysége: $1/s^2$):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Példa: Egyenletes körmozgás

A szögsebesség állandó: $\omega = \text{áll.} = \dfrac{2\pi}{T}$ $\quad \beta = 0$
(ahol *T* a periódusidő)

A *T* idő alatt megtett út tehát a kör kerülete: $s(T) = 2R\pi$



A mozgás sebességének nagysága (kerületi sebesség) is állandó (az iránya viszont nem!):

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

Mivel a sebesség iránya folyamatosan változik, a gyorsulás nem nulla. Nagysága állandó, iránya pedig mindig a középpont felé mutat (centripetális):

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

Példa: Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás β = állandó, és emiatt a szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t) = \beta t + \omega_0$$

Az állandó szöggyorsulás miatt a gyorsulásnak lesz egy állandó nagyságú érintőirányú (tangenciális) komponense. Emiatt a sebesség nagysága egyenletesen változik:

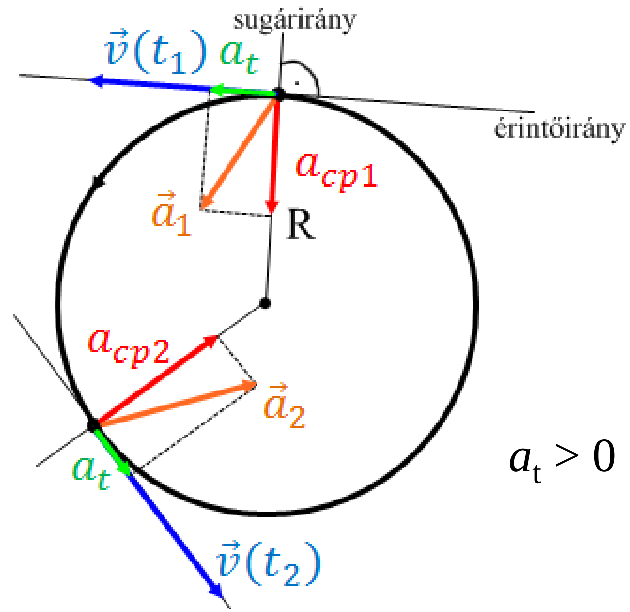
$$a_t = \beta R = \frac{dv}{dt}$$

A gyorsulás nagysága Pitagorasz tételéből:

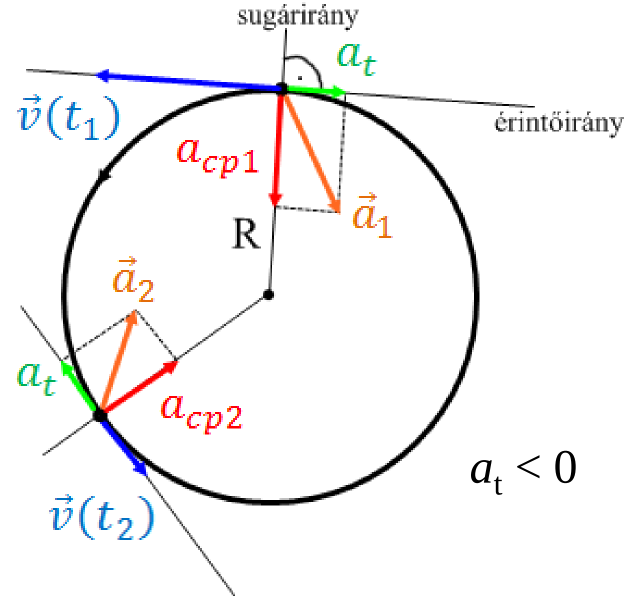
$$a = \sqrt{{a_{cp}}^2 + {a_t}^2}$$

A megtett út csak a tangenciális gyorsulás komponenstől függ (a másik komponens csak az irányt változtatja):

$$s(t_1) = \frac{1}{2} a_t {t_1}^2 + v_0 t_1$$



$a_t > 0$



$a_t < 0$

Henger koordináta rendszer

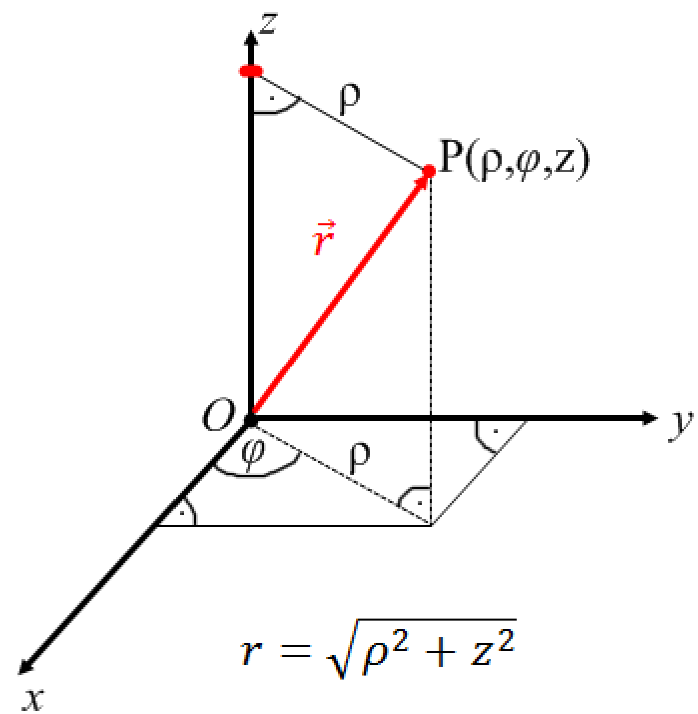
A síkbeli polár koordinátarendszer két koordinátájához hozzávesszük a Descartes koordinátarendszer z koordinátáját.

Három dimenziós mozgások leírására használható, főleg csavar alakzat menti mozgásra.

Megkülönböztetésül a síkbeli polár koordinátarendszertől r helyett ρ adja meg a tengelytől mért távolságot (ez még nem a pont origótól vett távolsága, azt jelöljük r-el).

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi \qquad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Dinamika

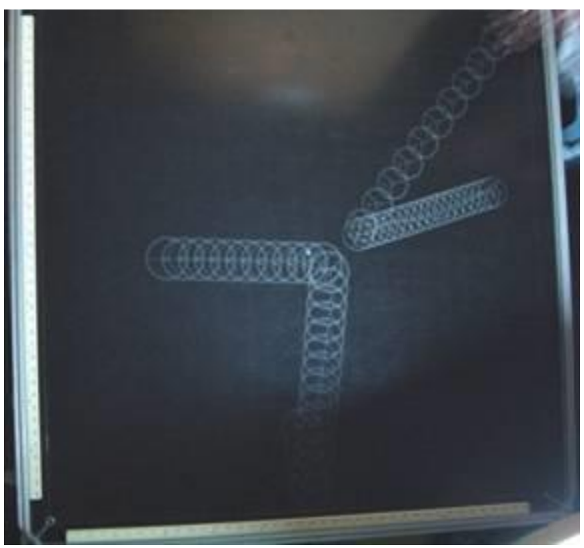
A dinamika feladata a mozgás okainak feltárása, a test(ek) gyorsulását okozó erők és a mozgás kapcsolatának matematikai leírása.

Newton törvényei: I.

<u>Newton I. axiómája</u>: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

ugyanez kicsit pontosabban megfogalmazva:

<u>Kiválasztási axióma</u>: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



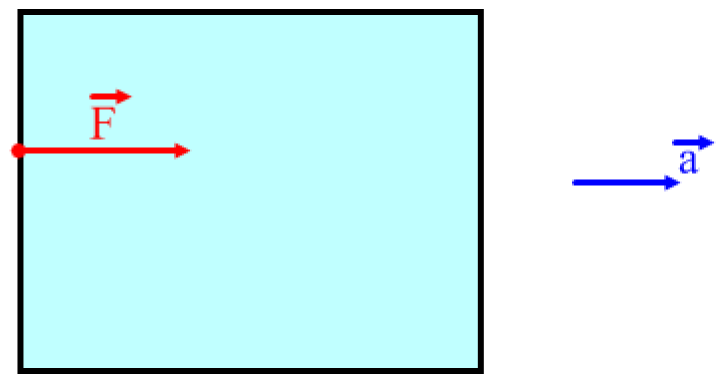
A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít.
Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

Newton törvényei: II.

Ha egy testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

Newton II. axiómája: Egy állandó tömegű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

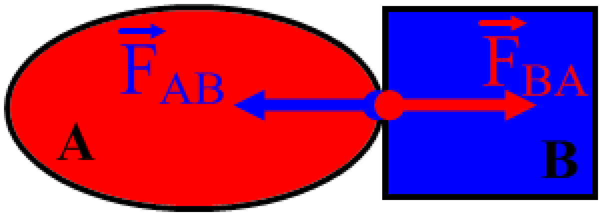


Newton törvényei: III.

Newton III. axiómája: (Hatás-ellenhatás törvénye)
Ha az *A* test a *B* testre $\vec{F}_{BA}$ erőt fejt ki, akkor a *B* test is erőt fejt ki az *A* testre.

Ez az $\vec{F}_{AB}$ erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az $\vec{F}_{BA}$ erővel.

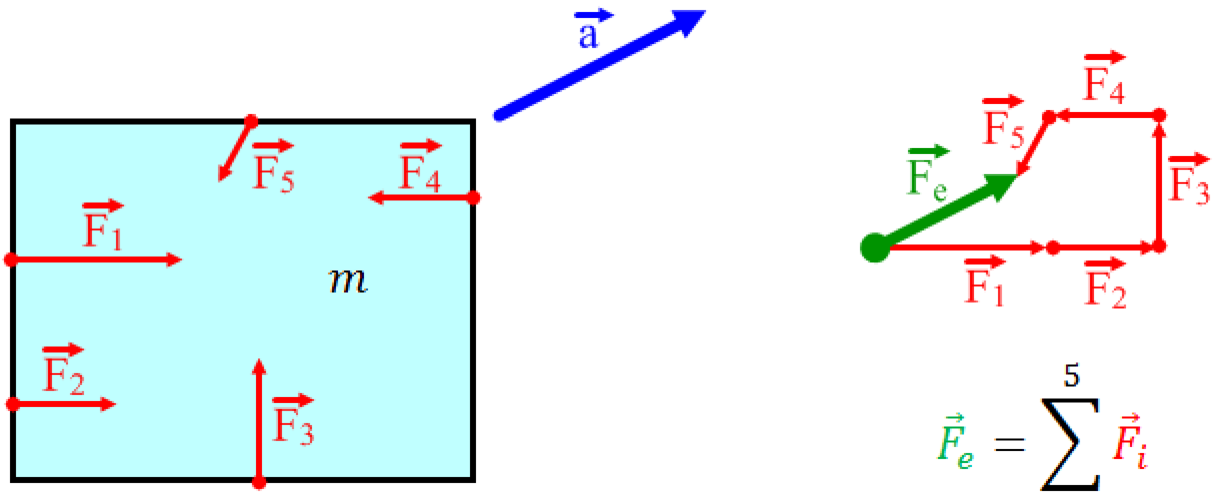
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$



Newton törvényei: IV.

Newton IV. axiómája: (A szuperpozíció elve)
Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i$$

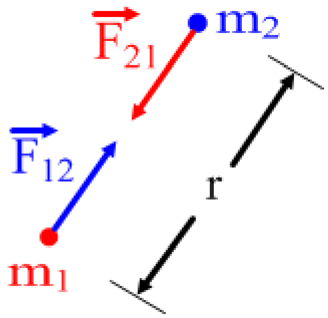
Erőtörvények

Olyan függvények melyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:
-a test helye
- a test sebessége
- az idő

Newton-féle gravitációs erő

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

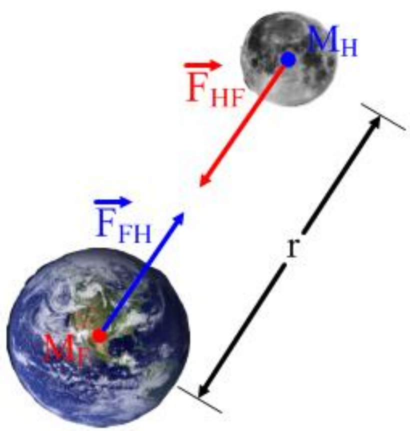
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

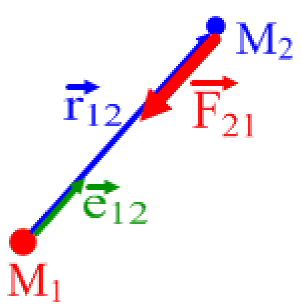
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Az erőtörvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok.
A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2{}_{12}}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2}\vec{e}_{12}$$



Nehézségi vagy Súlyerő

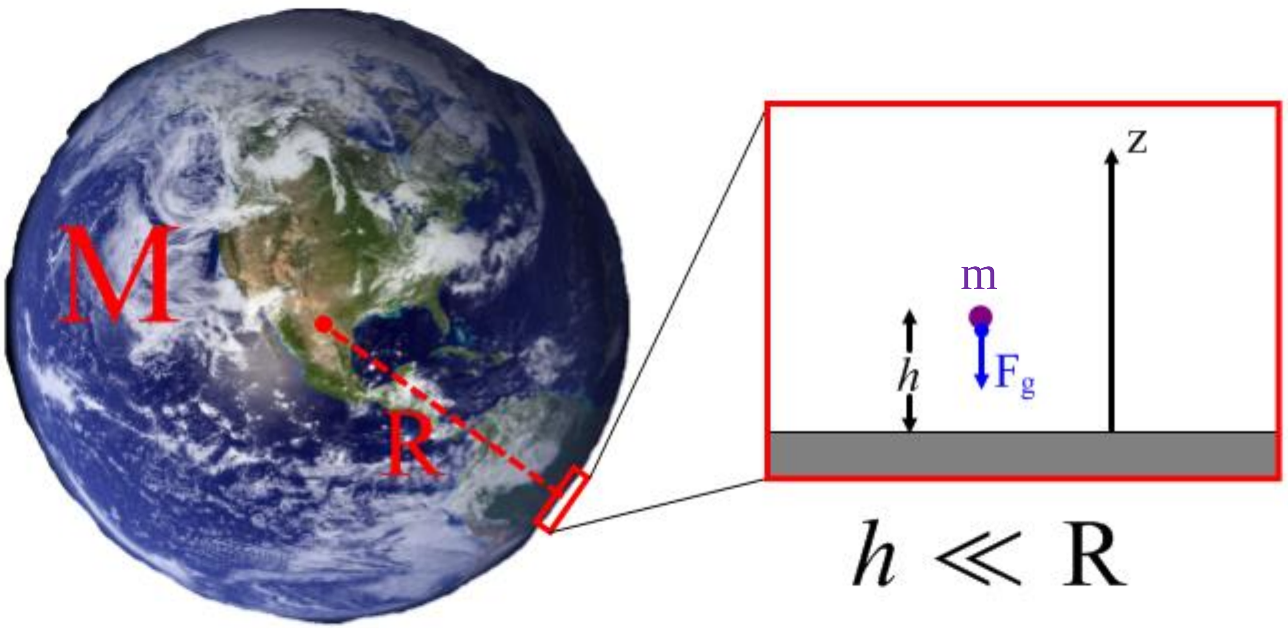
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtörvényből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2}\vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2}\vec{e}_r = -mg\vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

gravitációs gyorsulás a Föld felszínén

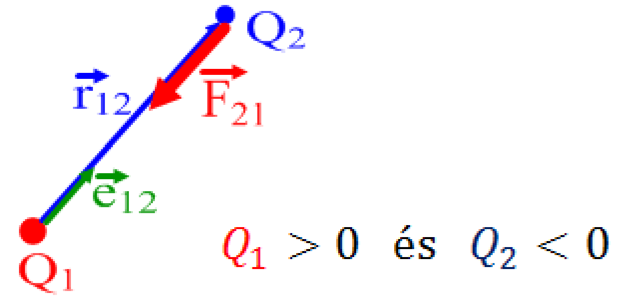


Coulomb-erő

A Coulomb-erő két ponttöltés között hat, arányos a töltések szorzatával és ellentétesen arányos a távolságuk négyzetével. Az erőtörvény alakja ugyanolyan mint a Newton-féle gravitációs erő esetében:

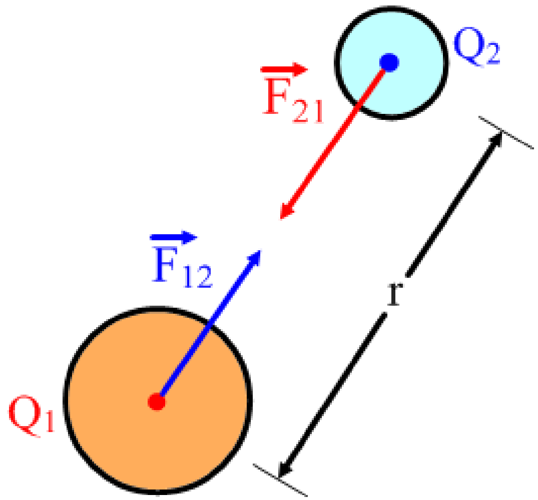
$$\vec{F}_{21} = \frac{kQ_1Q_2}{r^2{}_{12}}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{kQ_1Q_2}{r^2}\vec{e}_{12} \qquad k = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Coulomb állandó



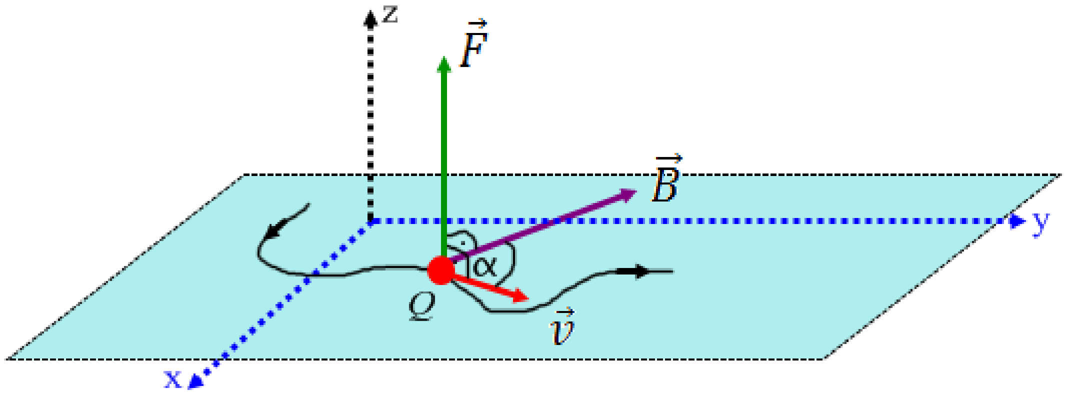
Mivel a töltések lehetnek pozitívok és negatívok – a kölcsönhatás lehet vonzó vagy taszító.

A Newton-féle gravitációs erőhöz hasonlóan, gömbszimmetrikus töltött testek esetében is használható a ponttöltésekre vonatkozó erőtörvény. (a távolság ugyanúgy a középpontok között mérendő)

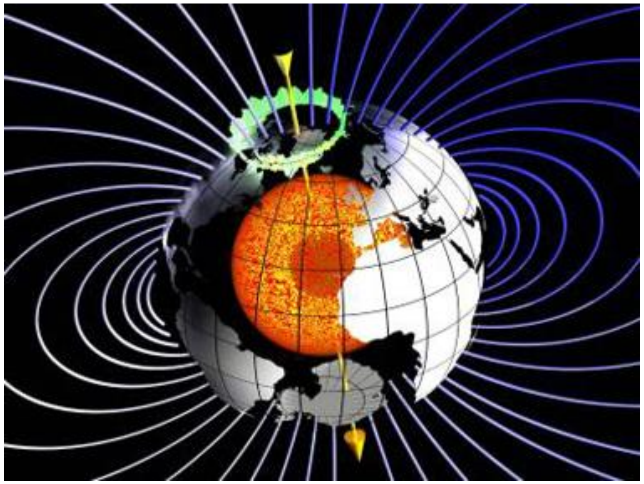


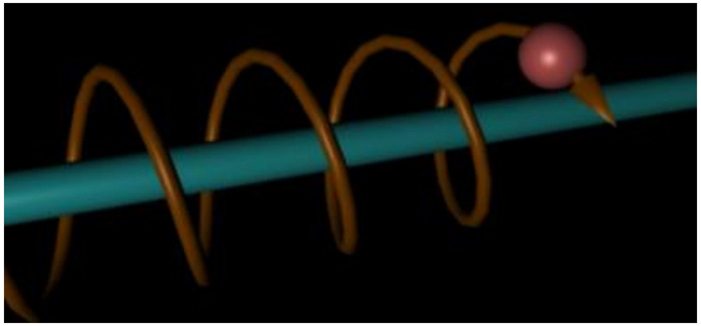
Lorentz-erő

Mágneses térben mozgó töltött részecskére ható erő: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$



Az erő merőleges a mágneses indukcióra és a részecske sebességére egyaránt.
Eredmény: kör vagy csavar alakú mozgás az indukcióvonalak körül.



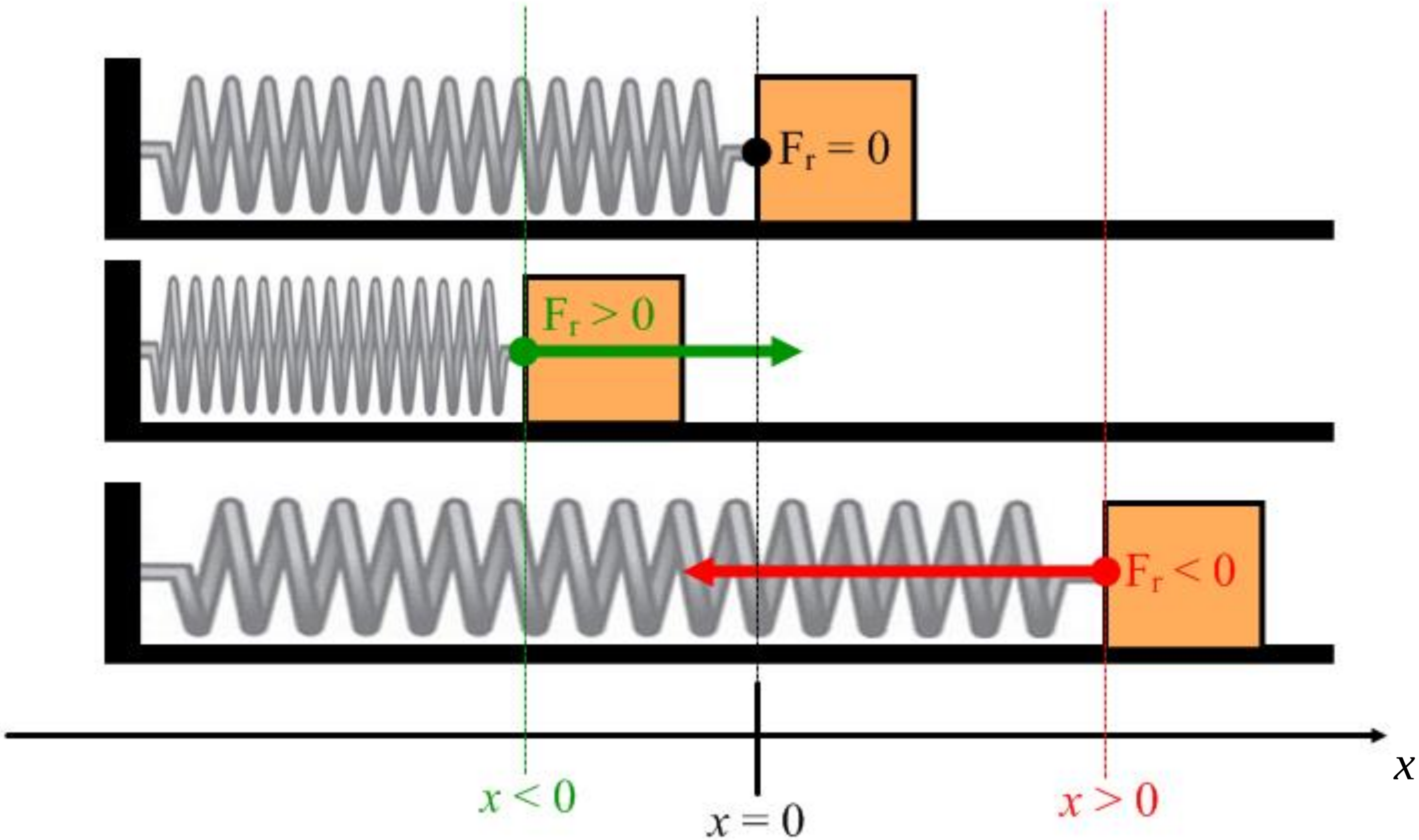


csavar alakú mozgás:
henger koordinátarendszer jól használható

Rugóerő

Hooke-törvény: Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú. (Lineáris közelítés!)

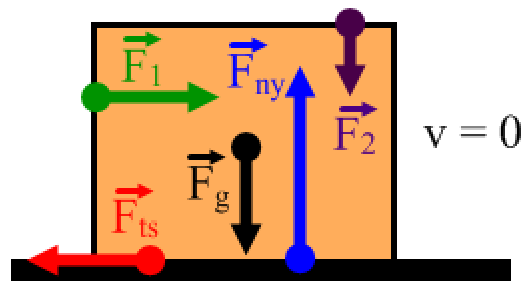
Az arányossági tényező a rugóállandó *D*. $F_r = -Dx$



Súrlódási erő

<u>Három fajta lehet</u>:

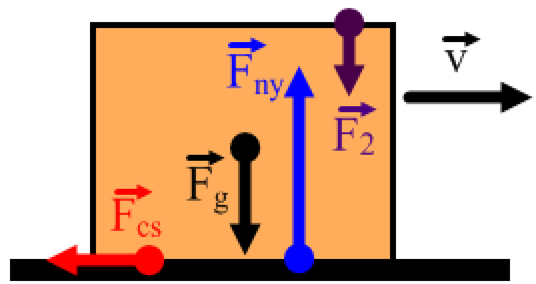
1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekszik megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).



$$F_{ts} = F_1$$
amíg
$$F_1 \le F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

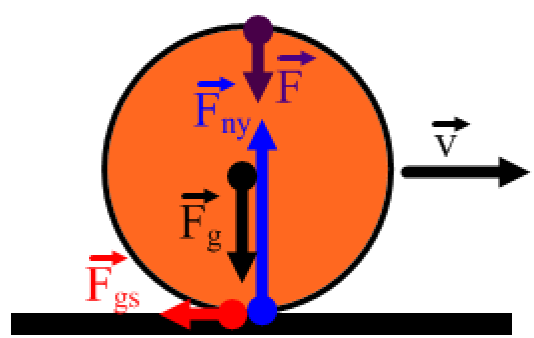
$\mu_t > \mu_{cs}$ mindíg

2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekszik gátolni. Csak az anyagi minőségtől (μ) és a felületeket összenyomó erőtől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban.
(pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)

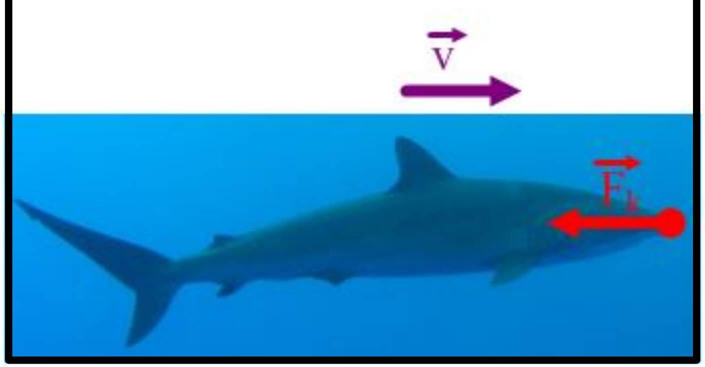


$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

Közegellenállás vagy légellenállás

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, azzal ellentétes irányú.

$$\vec{F}_k = -c\vec{v}$$

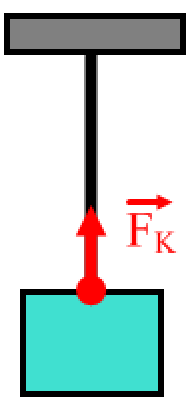


$$\vec{F}_k = -cv^2\vec{e}_v$$

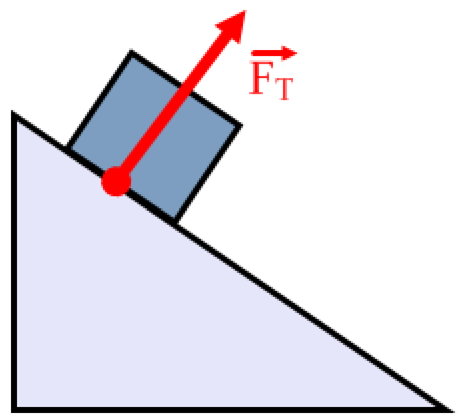
Az arányossági tényező *c* függ:
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

Kényszererők

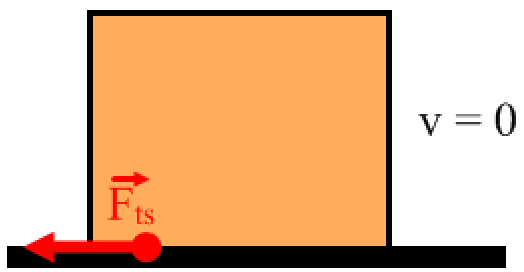
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

Tehetetlenségi erők*

Ezek **nem valódi** (valamilyen kölcsönhatásból származó) erők, hanem **fiktív** erők.
Akkor lépnek fel, ha a vonatkoztatási rendszerünk nem inerciarendszer.
A gyorsuló rendszerek nem inerciarendszerek.

Pl.

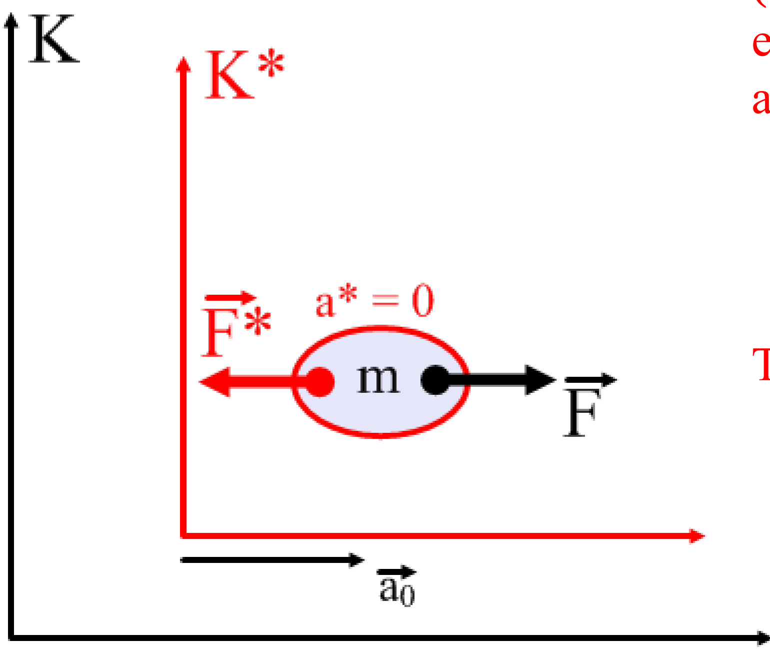
- fékező, gyorsuló vagy kanyarodó autó
- forgó körhinta vagy centrifuga
- szigorúan véve bármelyik bolygó vagy hold (keringés és forgás)

Gyorsuló vonatkoztatási rendszerek

Bizonyos esetekben szükség lehet a mozgás gyorsuló rendszerben történő leírására (illetve nem hanyagolhatóak el a Föld forgása miatti tehetetlenségi erők).

<u>Inerciarendszer</u> (K):
A test $\vec{a}_0$ gyorsulással mozog (együtt a K* rendszerrel) a ráható $\vec{F}$ erőnek köszönhetően.

$$\vec{F} = m\vec{a}_0$$



<u>Gyorsuló rendszer</u> (K*):
A test nyugalomban van (a* = 0), mert a testre ható erők eredője zérus (beleértve a fiktív $\vec{F}^*$ erőt.)

$$\vec{F} + \vec{F}^* = 0$$

$$m\vec{a}_0 + \vec{F}^* = 0$$

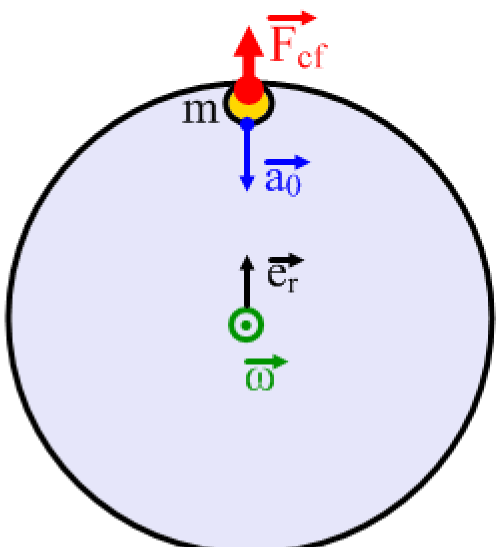
Tehát: $\boxed{\vec{F}^* = -m\vec{a}_0}$

Centrifugális erő és Coriolis-erő

A tehetetlenségi erő meghatározásához először határozzuk meg a test gyorsulását egy inerciarendszerben vizsgálva. Ezután alkalmazhatjuk az előbb látott eredményt: $\vec{F}^* = -m\vec{a}_0$

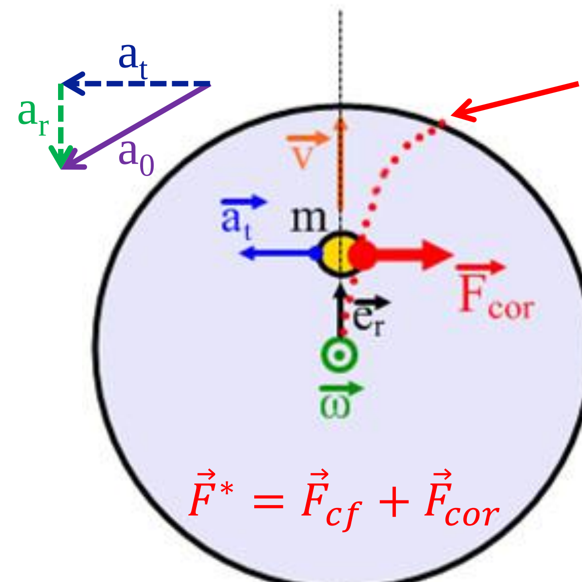
<u>Centrifugális erő</u>:
Forgó mozgást végző testre hat,
a középponttól kifelé mutat
(centripetális gyorsulással ellentétes irányba)

$$\vec{F}_{cf} = -m\vec{a}_0 = m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = m\omega^2 R\vec{e}_r$$



<u>Coriolis-erő</u>: (az F_{cf} továbbra is hat!)
Forgó rendszerben sugárirányban mozgó testre **EZ IS** hat (a kerületi sebesség sugárfüggése miatt a_t és a_r is van)

$$\vec{F}_{cor} = -m\vec{a}_t = -m(2\vec{\omega} \times \vec{v}) = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$



ide térülne el
a korong
rendszerében
nézve
ha nem
hatna rá
tangenciális
valódi erő
(ábrán csak
a_t szerepel)

A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. axiómáját, megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtörvényeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

másodrendű, csatolt differenciálegyenletek

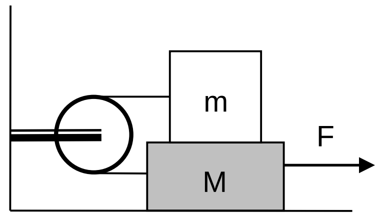
Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.

A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája: $\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$

Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete):

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

23. Egy *M=20* kg tömegű ládát leteszünk a padlóra, ráhelyezünk egy m=5kg tömegű dobozt. A két testet egy nyújthatatlan, de könnyű kötéllel összekötjük egy falhoz rögzített könnyű csigán keresztül. Ezután *F=220N* erővel elkezdjük a ládát húzni vízszintesen. A doboz és a láda között a súrlódási együttható $\mu_1 = 0{,}2$, a láda és a padló között pedig $\mu_2 = 0{,}4$. Mekkora a láda gyorsulása?

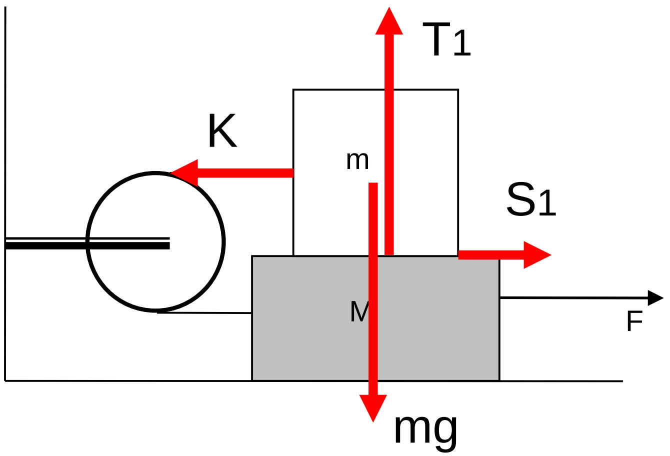


A kötél nyújthatatlan, tehát a két test gyorsulásának nagysága ugyanaz, az irány viszont különbözik. Tehát amikor felírjuk a két testre a

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

alapegyenlet vízszintes komponensét, a pozitív irányt a gyorsulás irányába választjuk, a doboznál balra, a ládánál jobbra.

A dinamika alapegyenlete a dobozra:



függőlegesen: $T_1 - m_1 g = 0$ $\qquad T_1 = mg$

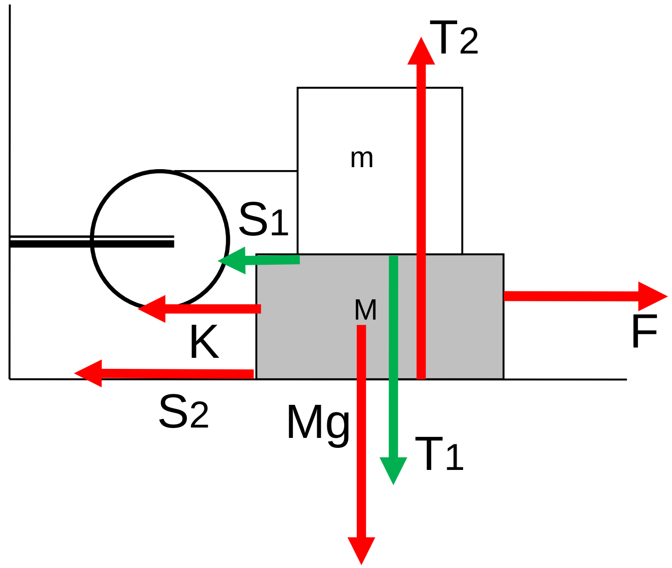
vízszintesen: $K - S_1 = ma$

Az S_1 súrlódási erőt úgy kapjuk, hogy $S_1 = \mu_1 T_1$ $\qquad S_1 = \mu_1 mg$

mivel a két felület közti nyomerő T_1.

$$K - \mu_1 mg = ma \qquad \text{(i)}$$

A dinamika alapegyenlete a ládára:



függőlegesen: $T_2 - T_1 - Mg = 0$ azaz $T_2 = T_1 + Mg = (M+m)g$

vízszintesen: $F - K - S_1 - S_2 = ma$

Az S_2 súrlódási erőt úgy kapjuk, hogy $S_2 = \mu_2 T_2$, mivel a két felület közti nyomerő T_2.

$$S_2 = \mu_2 (M + m) g$$

$$F - K - \mu_1 mg - \mu_2 \left(m + M\right) g = Ma \qquad \text{(ii)}$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$K - \mu_1 mg = ma \qquad \text{(i)}$$

$$F - K - \mu_1 mg - \mu_2 (m + M) g = Ma \qquad \text{(ii)}$$

Az (i) és a (ii) egyenleteket összeadva K kiesik

$$F - 2\mu_1 mg - \mu_2 g (m + M) = (m + M) a$$

Egy ismeretlenünk maradt, a gyorsulás, ezt kifejezve:

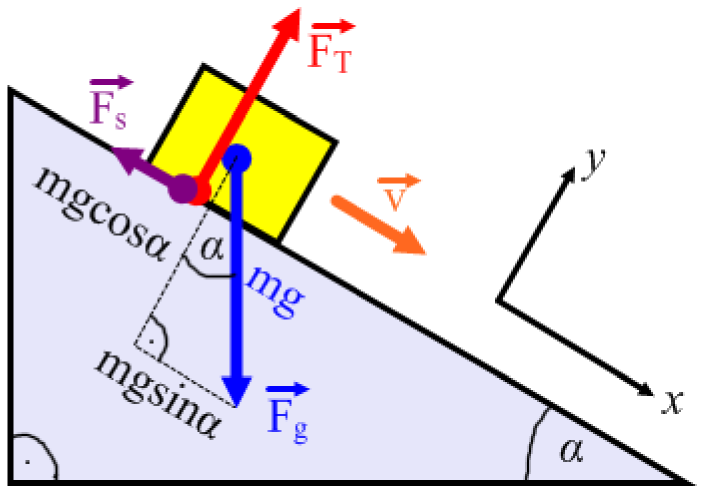
$$a = \frac{F - mg(2\mu_1 + \mu_2) - \mu_2 Mg}{m + M} = 4\frac{m}{s^2}$$

A kötélerőt megkaphatjuk, ha visszahelyettesítünk:

$$K = \mu_1 mg + ma = 30N$$

Példa: Lejtőn mozgó test

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét: $$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$$



Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az *y* irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$(x) \quad m\ddot{x} = ma = mgsin\alpha - F_s$$

$$(y) \quad 0 = F_T - mgcos\alpha$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mgcos\alpha$$

Beírva az (x) egyenletbe a súrlódást:

$$ma = mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha$$

Ha $a < 0$ jön ki megoldásnak:
- a lefelé csúszó test lassul

$$a = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$$

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:
- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ($\mu_t F_T$)

Lendület

Lendület (impulzus): A test tömegének és sebességének szorzata.
vektormennyiség: iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Lendülettétel: Az lendület erő hatására változik meg.
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

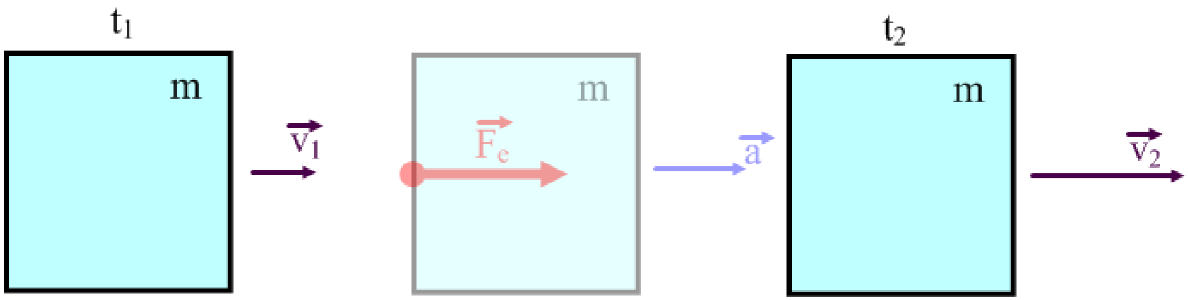
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

Az okozott lendületváltozás t_1 és t_2 között az eredő erő által:

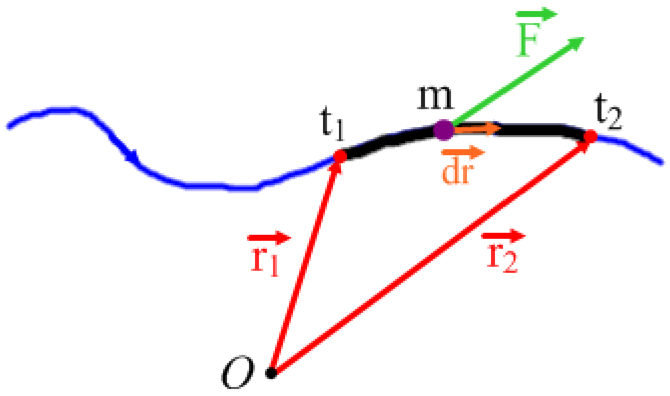


$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \, dt$$

tömegtől független

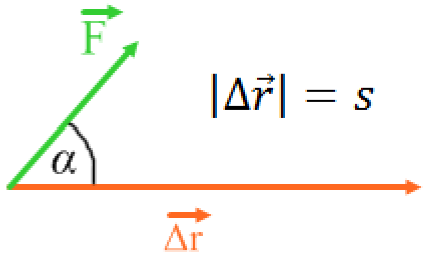
Munka

Munka: Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Speciális eset: A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$|\Delta\vec{r}| = s$$

$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos\alpha \, dr = F \cos\alpha \int_g dr = Fs \cos\alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat (α = 0): $W = Fs$

Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ (a mozgás pályája egyenes vonalú) → a_x → a

- t idő múlva sebessége: $v = at$, a megtett út pedig: $s = x = \dfrac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka: $W = Fs = ma\dfrac{a}{2}t^2 = \dfrac{1}{2}m(at)^2 = \dfrac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**: $E_K = \dfrac{1}{2}mv^2$ (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

Munkatétel: A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett munkával.

$$W = \Delta E_K$$

Teljesítmény

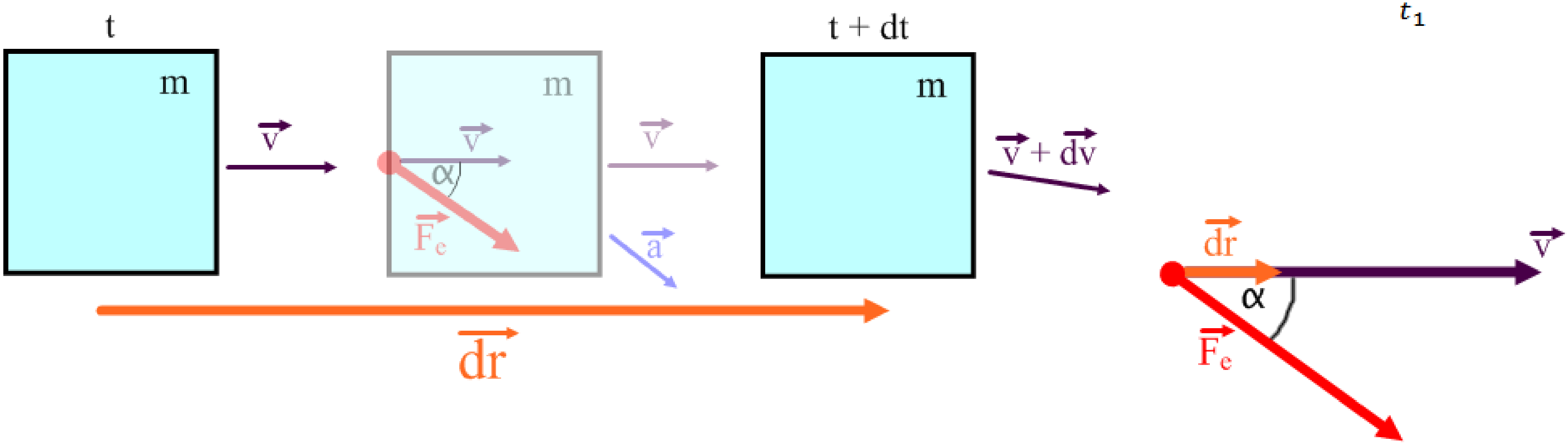
Teljesítmény: Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

$$P = \frac{dE}{dt}$$ (lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia)

A mechanikai átlagteljesítmény: $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$

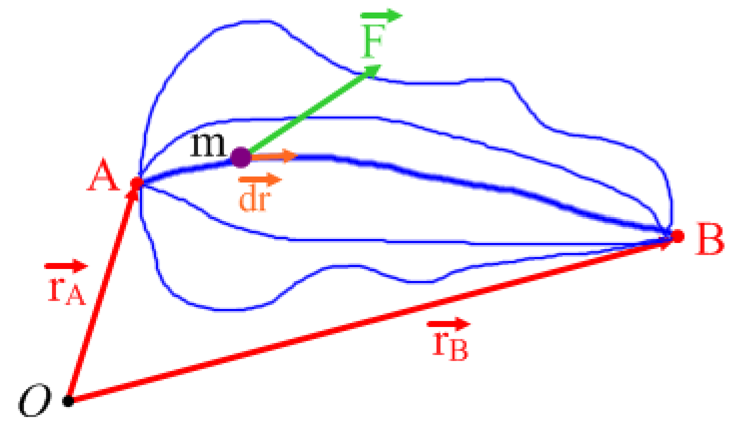
A mechanikai **teljesítménytétel**: A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával: $P = \frac{dE_K}{dt}$

A munkatétel felhasználásával: $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ $\qquad W = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt$



Konzervatív erőterek

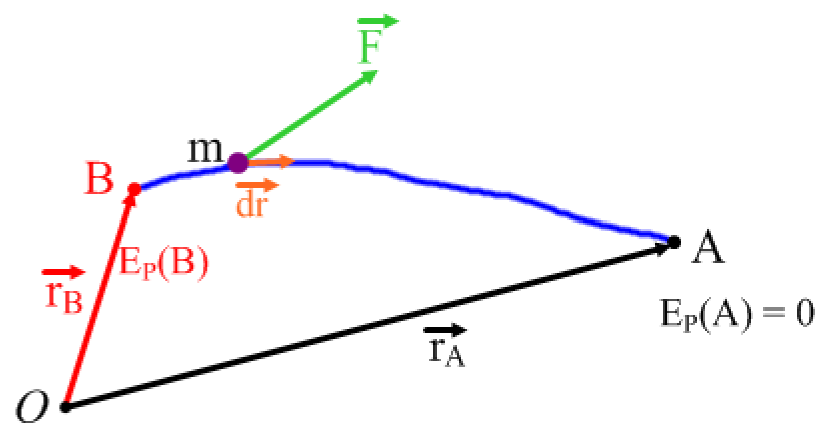
Konzervatív erőtér: Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az úttól (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).



Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

Potenciális (helyzeti) energia:
A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a tér végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_P(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



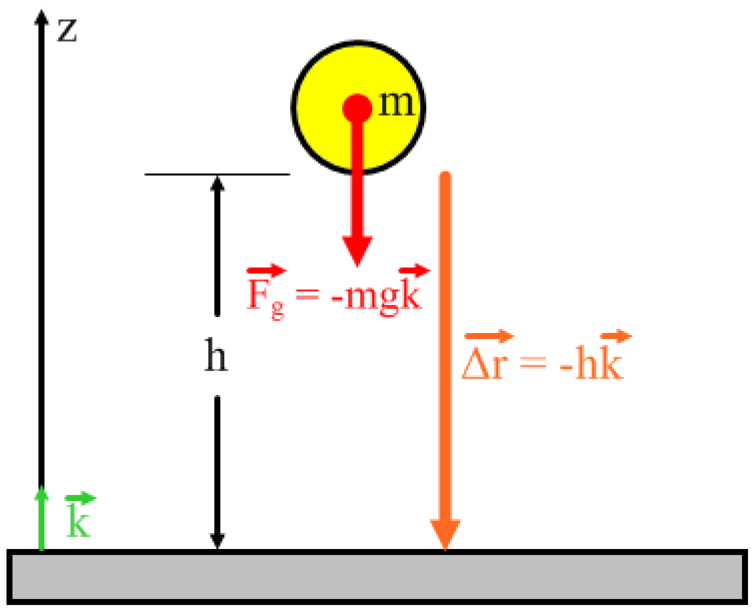
Példa: súlyerő munkája

Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy F_g = 20N súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$E_p(h) = W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^{0} \left(-mg\vec{k}\right) \cdot \left(dz\vec{k}\right) =$$

$$= \int_{h}^{0} -mg\, dz = -mg[z]_h^0 = mgh$$



Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a $W = Fs$ képlet is, tehát a $W = (mg)h = mgh$ egyből látható.

vagyis esetünkben: W = (20N)(80m) = 1600J

Az energiaminimum elve

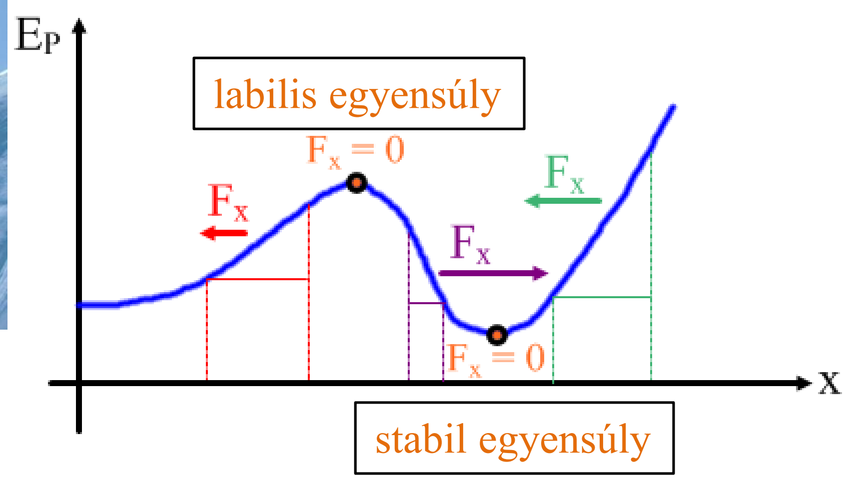
Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.
Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.
Homogén erőtér esetén (illetve az átlagos erőt számolva) egy dimenzióban: $F = -\frac{\Delta E_P}{\Delta x}$

Általánosan bármely pontban: $F = -\frac{dE_P}{dx}$

Energiaminimum elve: Az erő a **csökkenő** potenciális energia irányába hat (negatív előjel).

Három dimenzióban:

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} =$$



$$= -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\nabla E_P = -\mathrm{grad}E_P$$

Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test B-ből C-be mozdul.

Ekkor bármely B és C pontokra: $E_P(B) - E_P(C) = W = E_K(C) - E_K(B)$

Az egyenletet átrendezve: $E_P(B) + E_K(B) = E_P(C) + E_K(C)$
A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_P + E_K$$

Ez a mechanikai energia konzervatív erőtérben megmarad: $E_M(B) = E_M(C)$

Amikor **nem-konzervatív** erők is hatnak (pl. súrlódás, közegellenállás, emberi munka), azok munkája egyenlő a mechanikai energia **megváltozásával**:

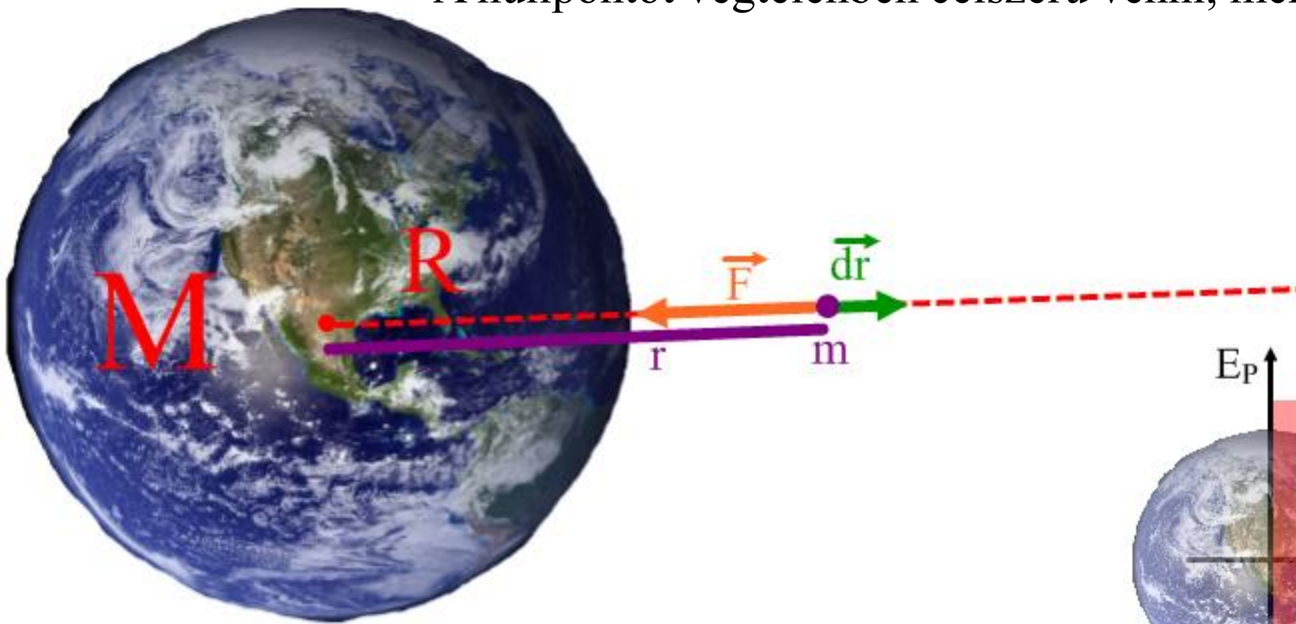
$$\Delta E_M = W_{nk}$$

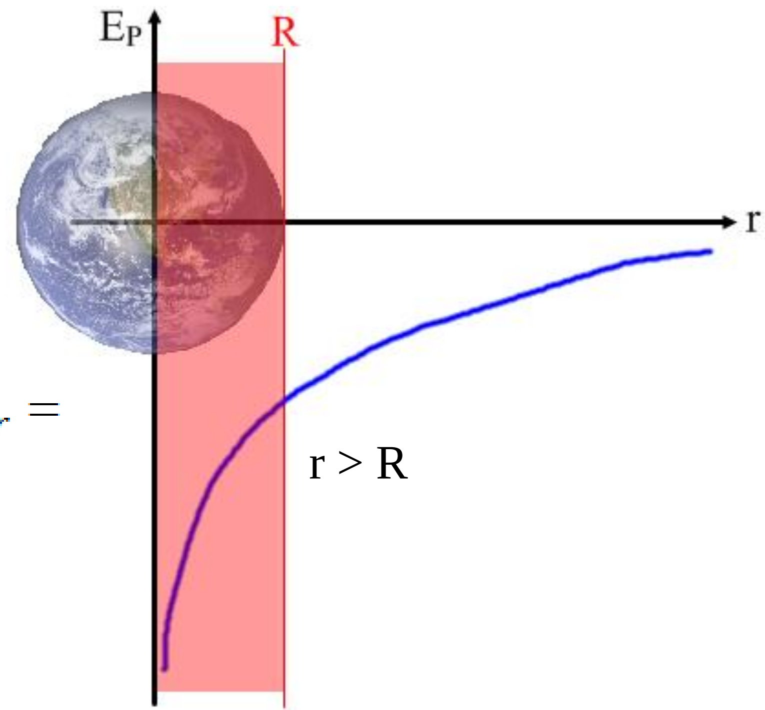
Példák konzervatív erőterekre

Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben

Legyen a *M* tömegű test rögzítve, és tőle *r* távolságban kiszámoljuk a *m* tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert $r = 0$ problematikus.





$$E_P(\vec{r}) = W_{\vec{r},\infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\frac{\gamma M m}{r^2}\vec{e}_r\right) dr\vec{e}_r =$$

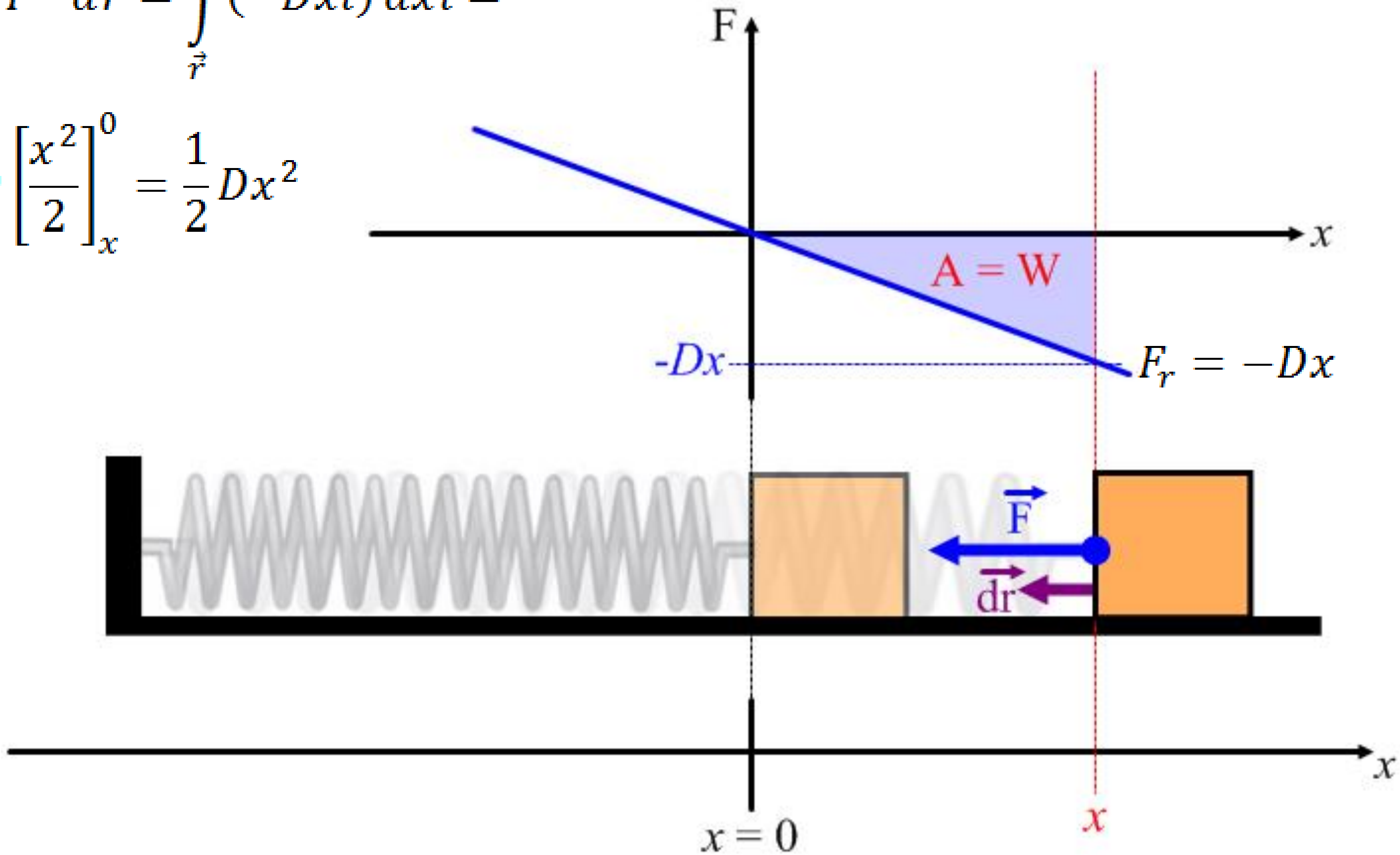
$$= \int_{r}^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r}$$

Rugóerő potenciális energiája

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.
Ez konzervatív erőteret eredményez.
Az *x* hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$E_P(x) = W_{\vec{r},O} = \int_{\vec{r}}^{O} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{O} (-Dx\vec{\imath})\, dx\vec{\imath} =$$

$$= \int_{x}^{0} -Dx\, dx = -D\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^0 = \frac{1}{2}Dx^2$$



Coulomb-erő potenciálja

A Coulomb-erő erőtörvénye ugyanolyan alakú, mint a Newton-féle gravitációs erő:

$$E_P(\vec{r}) = W_{\vec{r},\infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(\frac{kQq}{r^2}\vec{e}_r\right) dr\vec{e}_r =$$

$$= \int_{r}^{\infty} \frac{kQq}{r^2} dr = kQq\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{kQq}{r}$$