Fizika II.

Vegyészmérnök BSc Kazincbarcika
2023/24 tanév I félév

Az 1. konzultáción leadott tananyag

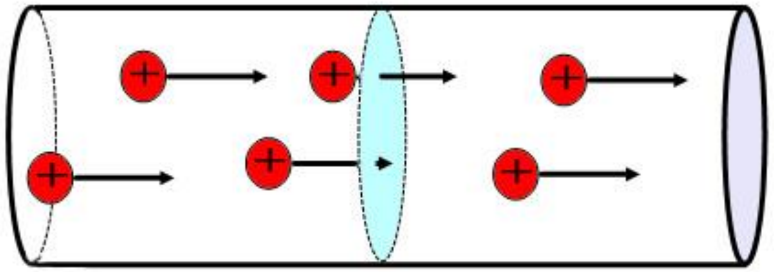
Elektromos áramerősség

Két különböző potenciálon lévő fémet vezetővel összekötve töltések áramlanak amíg a potenciál ki nem egyenlítődik.

Az elektromos áram iránya a pozitív töltéshordozók áramlási iránya.

<u>Áramerősség:</u> Egy vizsgált felület keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltés.

$$[I] = \mathrm{A(amper)} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$



Amennyiben az áramerősség állandó:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Ha az áramerősség időben változik, a t_1 és t_2 között átáramlott töltés megadható mint:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

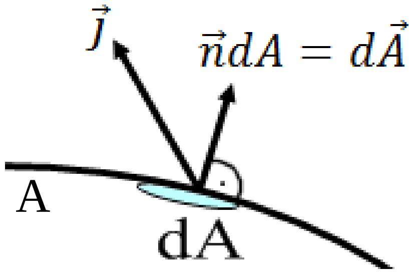
Háztartási gépekben néhány tizedtől néhány amper erősségű áram. Halálos: kb. 0,5 A

Áramsűrűség vektor

<u>Elektromos áramsűrűség vektor:</u> egy pontban értelmezett, nagysága megegyezik az áramlás irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramló töltéssel. Iránya a pozitív töltések áramlási iránya.

Az áramsűrűség vektor nagysága: $j = \lim_{A \to 0} \frac{I}{A}$ Mértékegysége: $[j] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

Egy bármely felületen átáramló áram erőssége általánosan: $I = \int_{\mathrm{A}} \vec{j} \cdot d\vec{A}$



ahol

$$\vec{j} \cdot d\vec{A} = \vec{j} \cdot \vec{n}dA = j_n dA$$

egy felületelemre számolt elemi áramerősség.

Ha az áramsűrűség vektor a felület minden pontjában ugyanakkora, és minden pontban merőleges a felületre, akkor:

$$I = jA$$

Áramforrások

A folyamatos töltésáramlás fenntartásához szükség van olyan idegen (nem elektromos) erőre amely a pozitív töltéshordozókat visszakényszeríti a magasabb potenciálú helyre.

Áramforrások azok a berendezések, melyekben ilyen erők működnek.

Az elektromos energia forrása az áramforrásokban lehet pl.
- mechanikai energia (generátorok, dinamók)
- kémiai energia (galvánelemek, akkumulátorok)
- hőenergia (termoelem)
- fényenergia (fotocella)

A q töltésre ható idegen erő: $\vec{F}^*$ Ebből definiáljuk az idegen térerősséget: $\vec{E}^* = \dfrac{\vec{F}^*}{q}$

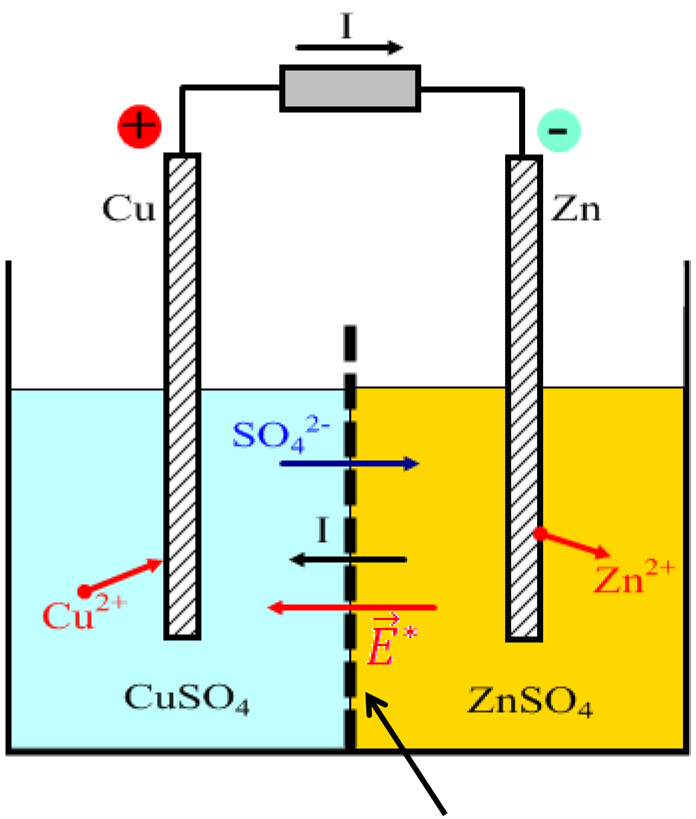
Az elektromotoros erő definíciója: $\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$ az áramforrás belsejében a – és + pólusok között integrálva.

Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Fogyasztó: Olyan vezető amelyben idegen erő nincs jelen. Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Elektromos áram galvánelemben

<u>Daniell-elem</u>



diafragma
(csak szulfát-ionok
jutnak át)

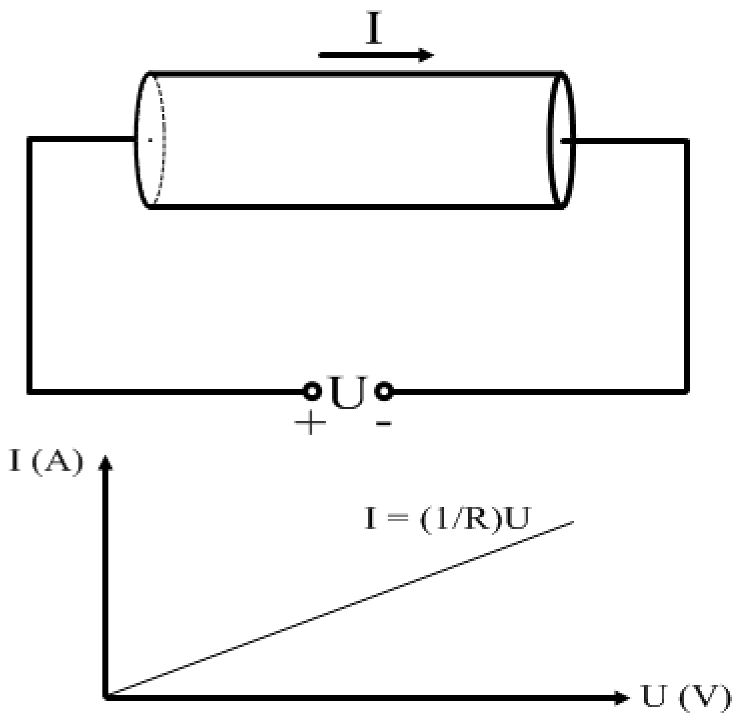
Kémiai energia alakul át elektromos energiává. Porózus anyaggal elválasztott cink-szulfát és réz-szulfát oldatok, bennük fém elektródákkal.
Cink beoldódik, két elektront hátrahagyva.
Ezek a vezetőn keresztül a rézre kerülnek.
A kiváló réz felveszi az elektronokat.

Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Ohm-törvény (integrális alak)

Tapasztalat szerint egy homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) arányos a vezető két vége közötti feszültséggel:



Hányadosuk a vezető két vége közötti ellenállás:

$$R = \frac{U}{I} \qquad [R] = \Omega(\mathrm{ohm}) = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Ez a törvény fémekre és ötvözeteikre bizonyos határok között jó közelítéssel igaz, ellentétben például a félvezetőkkel vagy elektrolitokkal.

Egyenáramú áramkörök

Stacionárius elektromos áram (egyenáram): az összes fizikai mennyiség állandó, és a töltések időben állandósult módon áramlanak.

A töltésmegmaradás törvényét a kontinuitási egyenlet írja le:

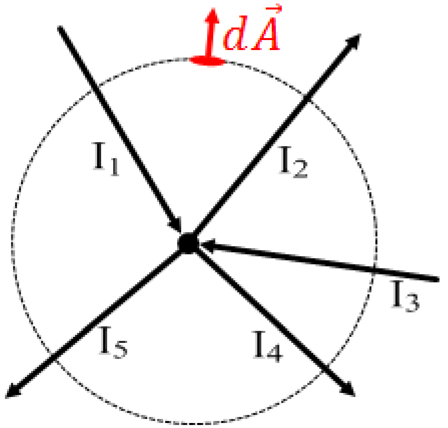
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

A rögzített *V* térfogatot az *A* zárt felület határolja, melynek normálisa kifelé mutat. ρ a térfogati töltéssűrűség.

Stacionárius esetben a baloldal nulla, így a befolyó (-) és kifolyó (+) áramok algebrai (előjeles) összege zérus.

Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény):

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$



$$I_2 + I_4 + I_5 - I_1 - I_3 = 0$$

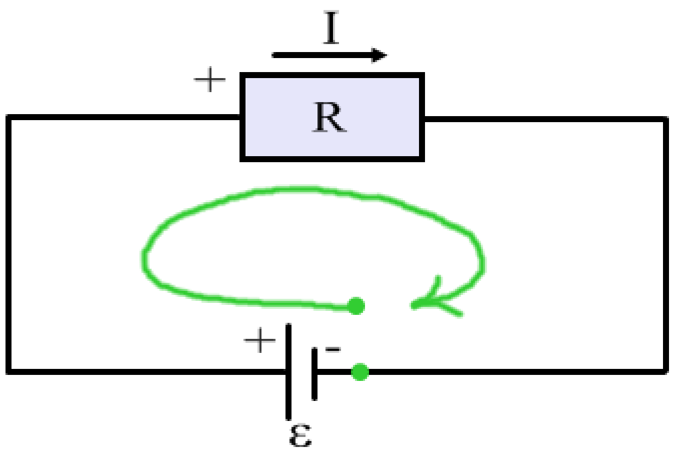
Kirchhoff II. törvénye (hurok törvény)

A stacionárius elektromos tér konzervatív, tehát továbbra is fennáll: $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

A térerősség görbe menti integrálja a potenciálkülönbség, tehát egy zárt hurok mentén a potenciálváltozások előjeles összege nulla. Ez Kirchhoff II. törvénye.

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = 0$$

<u>A törvény alkalmazása</u>: felveszünk egy körüljárási irányt, és egy áramirányt.



$$\varepsilon - RI = 0$$

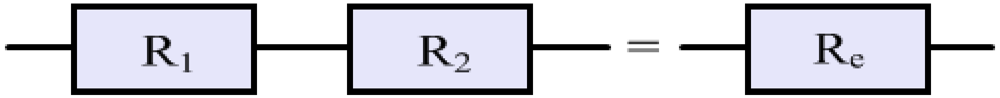
Tehát egy ideális telep és egy ellenállás esetén:

$$\varepsilon = RI$$

Összetett áramkörök

Csomópont: azon pont ahová kettőnél több vezeték fut be
Ág: két vége csomópont, de benne nincs több csomópont

Az egy ágon belüli elemek **sorosan** vannak kapcsolva és rajtuk ugyanakkora áram folyik keresztül.

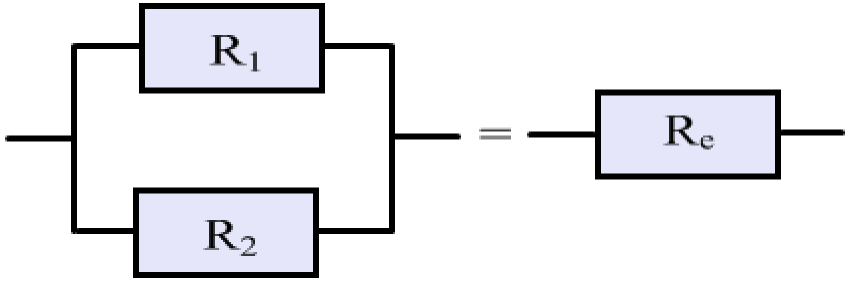


$$U_1 + U_2 = U \qquad I_1 = I_2 = I$$

$$R_1 I + R_2 I = R_e I \quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 = R_e$$

Több ellenállásra: $R_e = \sum_{i=1}^{N} R_i$

Párhuzamos kapcsolásnál az elemek megfelelő pólusai azonos potenciálon vannak.



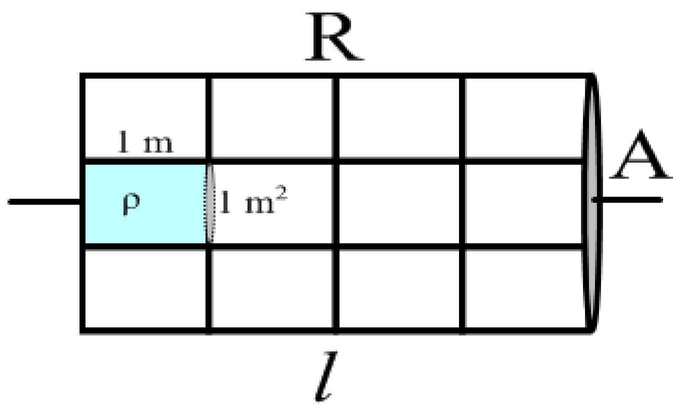
$$U_1 = U_2 = U \qquad I_1 + I_2 = I$$

$$\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_e} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_e}$$

Több ellenállásra: $\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Az ellenállás függése a geometriától

Fajlagos ellenállás (ρ): Egységnyi hosszú és egységnyi keresztmetszetű vezető ellenállása.



$[\rho] = \Omega\mathrm{m}$ vagy $\frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$

kétszeres hossz: mintha sorosan lenne kettő

kétszeres keresztmetszet: …párhuzamosan…

Tehát az ellenállás arányos a hosszal, fordítottan a keresztmetszettel: $R = \rho \frac{l}{A}$

A fajlagos ellenállás csak az anyagra jellemző mennyiség.

pl. réz esetén: $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8} \Omega\mathrm{m}$ (áramkörben elhanyagolható ellenállás)

műanyagokra: $\rho = 10^{15} - 10^{20} \Omega\mathrm{m}$ (szigetelők)

Differenciális Ohm-törvény

Vékony vezetőre vehetjük az áramsűrűséget állandónak és a vezetővel párhuzamosnak.

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = jA$$

A vezető ellenállására így: $R = \frac{U}{I} = \frac{El}{jA}$ illetve $R = \rho \frac{l}{A}$

Innen: $\rho = \frac{E}{j}$ azaz $\rho j = E$ Vektori formában: $\rho \vec{j} = \vec{E}$

Bevezetve a σ = 1/ρ fajlagos vezetőképességet a differenciális Ohm-törvény:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Amennyiben egy áramforrás miatt vagy egyéb oknál fogva $\vec{E}^*$ idegen térerősség is jelen van, akkor azt is számításba kell venni!

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)}$$

Fémeknél állandó hőmérsékleten jó közelítéssel igaz, de pl. félvezető diódák esetében még állandó hőmérsékletre sem teljesül.
Ha a ρ fajlagos ellenállás és az A keresztmetszet a vezeték mentén változik, akkor az R ellenállás kiszámítása:

$$R = \int_g \rho(s) \frac{ds}{A(s)}$$

a g görbét a vezeték mentén vesszük

A stacionárius áram munkája és teljesítménye

Ha egy fogyasztó kivezetései között a feszültség U és rajta t idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor az elektromos tér által végzett munka:

$$W = QU = ItU$$

Az elektromos energia eközben hővé alakul és a fogyasztót melegíti.

Az ehhez a munkához szükséges energiát általában az áramforrás biztosítja.

Ha a fogyasztó R ellenállása nem nulla, akkor hő mindig keletkezik. Erre az R ellenállásra a munkát a Joule-törvény adja meg:

$$W = ItU = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$$

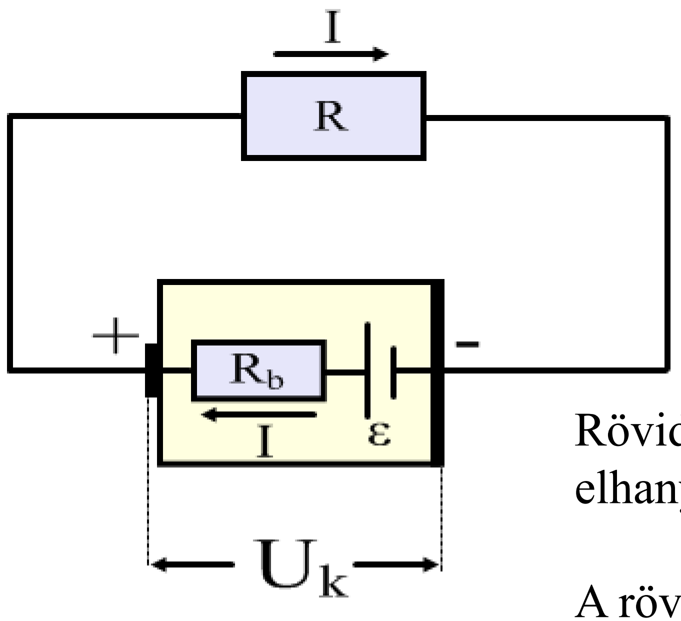
innen a teljesítmény: $P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$

Homogén drótban leadott teljesítményt osztva a $V = Al$ térfogattal kapjuk a Joule-törvény differenciális alakját:

$$\frac{P}{V} = \frac{UI}{V} = \frac{El \cdot jA}{Al} = Ej$$

Más formákban: $p_J = \vec{E} \cdot \vec{j} = \sigma E^2 = \rho j^2$

Valóságos áramforrás belső ellenállása



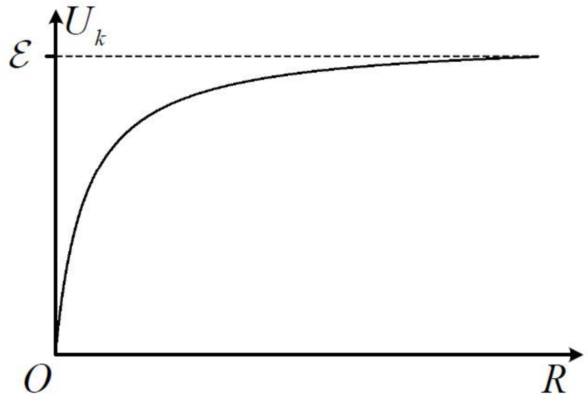
Kirchhoff II. törvényéből:

$$\varepsilon - I(R + R_b) = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_b}$$

Rövidzár, ha a külső fogyasztók (terhelés) ellenállása elhanyagolható: $R \approx 0$

A rövidzárási áram: $I_{röv} = \dfrac{\varepsilon}{R_b}$



A külső fogyasztókra jutó feszültség a kapocsfeszültség:

$$U_k = IR = \varepsilon - IR_b = \varepsilon \frac{R}{R + R_b}$$

Terheletlen telep esetén (ha $R \to \infty$), a kapocsfeszültség egyenlő az elektromotoros erővel (üresjárási feszültség, U_0):

$$U_k = U_0 = \varepsilon \quad \text{és ekkor} \quad I = 0$$

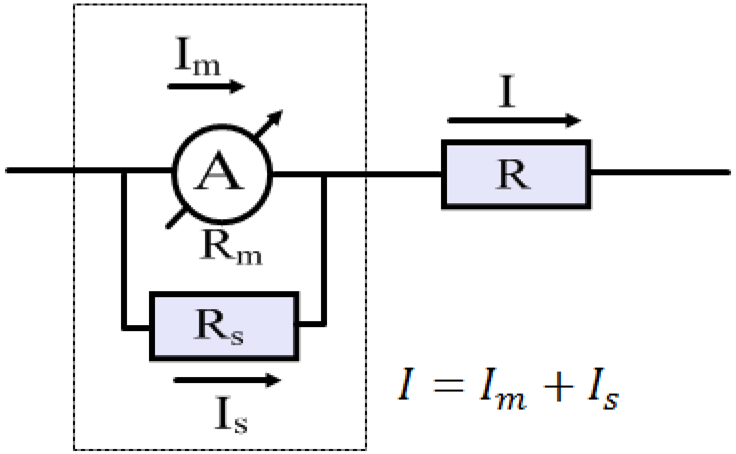
Áram és feszültségmérés

Ampermérőt sorba kell a mérendő elemmel kapcsolni. Kis ellenállása legyen.

Voltmérőt párhuzamosan kell a mérendő elemmel kapcsolni. Nagy ellenállása legyen.

<u>Méréshatár kiterjesztése</u>:

söntellenállás

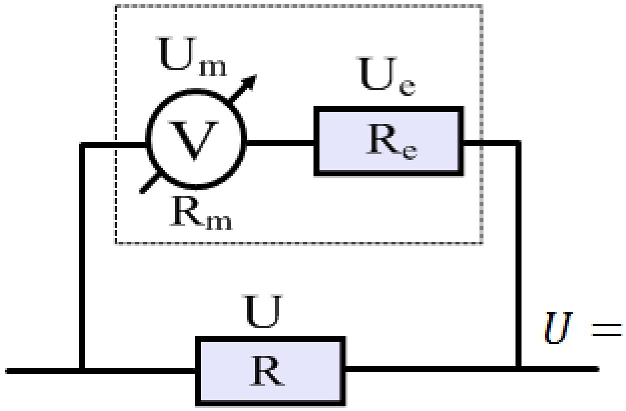


$$I = I_m + I_s$$

$$\frac{I_m}{I_s} = \frac{R_s}{R_m} \quad \rightarrow \quad I_s = I_m \frac{R_m}{R_s}$$

$$I = I_m\left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right)$$

előtét ellenállás



$$U = U_m + U_e$$

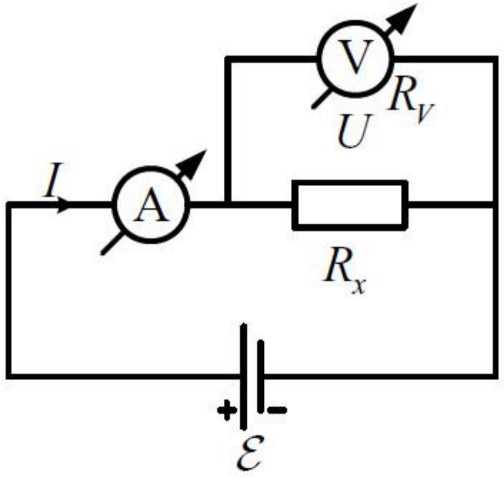
$$\frac{U_m}{U_e} = \frac{R_m}{R_e} \quad \rightarrow \quad U_e = U_m \frac{R_e}{R_m}$$

$$U = U_m\left(1 + \frac{R_e}{R_m}\right)$$

Feszültség-áram karakterisztika mérése

Ha egy R_x ellenállás feszültség-áram karakterisztikáját kell kimérni, akkor az áramerősség és a feszültség egyidejű mérésére van szükség.
Erre két megoldás alkalmazható attól függően, hogy az R_x mekkora.

Ha az R_x relatíve kicsi: $R_x \ll R_V$



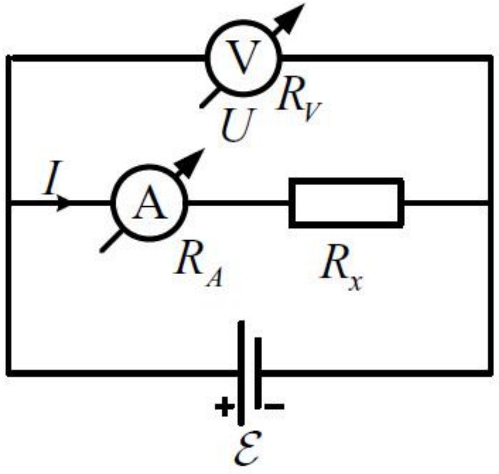
Ilyenkor az R_x mért értéke:

$$R_{xm} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_V + I_x}$$

A mérés relatív hibájára kapjuk:

$$\varepsilon_1 = \frac{R_x - R_{xm}}{R_x} = \cdots HF \ldots = \frac{R_x}{R_x + R_V} \approx \frac{R_x}{R_V}$$

Ha az R_x relatíve nagy: $R_A \ll R_x$



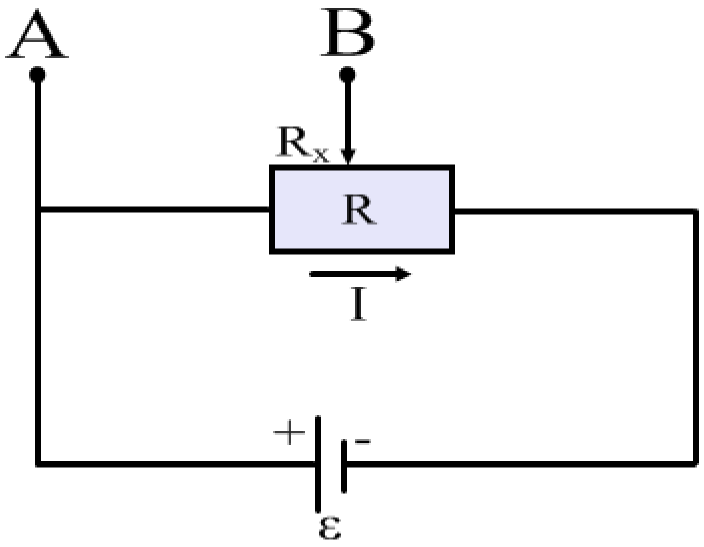
Ilyenkor az R_x mért értéke:

$$R_{xm} = \frac{U}{I} = \frac{U_A + U_x}{I}$$

A mérés relatív hibájára kapjuk:

$$\varepsilon_2 = \frac{R_{xm} - R_x}{R_x} = \cdots HF \ldots = \frac{R_A}{R_x}$$

Feszültségosztó (potenciométer)



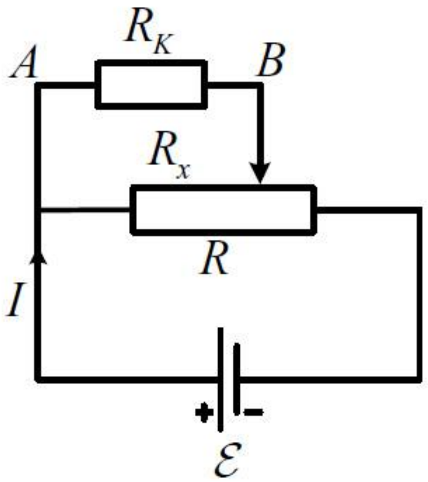
A főkörben folyó áram: $I = \frac{\varepsilon}{R}$

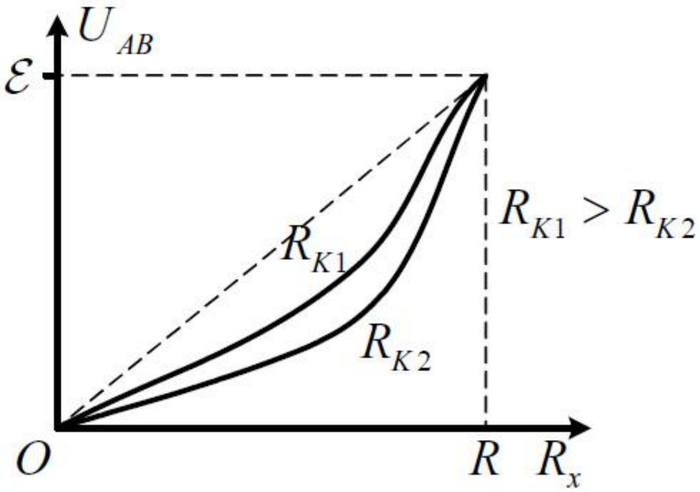
Az R_x ellenálláson eső feszültség:

$$U_{AB} = R_x I = \varepsilon \frac{R_x}{R} = \varepsilon \frac{x}{l}$$

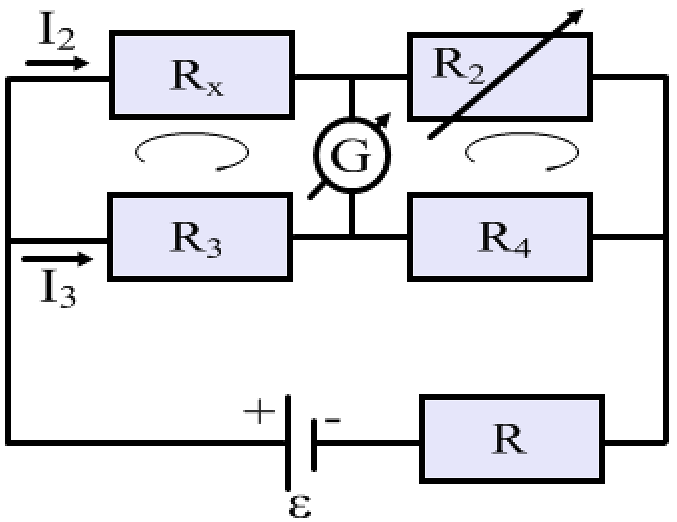
ahol x az R_x és l a teljes R ellenállás hossza.

A terheletlen feszültségosztó karakterisztikája tehát lineáris függvénye az x-nek, de a terhelt feszültségosztó esetében ez a kapcsolat már nem lesz lineáris!





Ellenállás mérése Wheatstone-híddal



R_x: ismeretlen ellenállás
R_2: szabályozható ellenállás
R: védőellenállás
G: galvanométer (érzékeny árammérő)

Az R_2 ellenállást addig szabályozzuk amíg a galvanométer nullát nem mutat. Ekkor rajta áram nem folyik, a híd ki van egyenlítve, és az R_x meghatározható:

Kirchhoff II. törvényét felírva a két hurokra:

$$I_2 R_x - I_3 R_3 = 0$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_4 = 0 \rightarrow \quad I_2 = I_3 \frac{R_4}{R_2}$$

Beírva az első egyenletbe:

$$I_3 \frac{R_4}{R_2} R_x - I_3 R_3 = 0$$

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

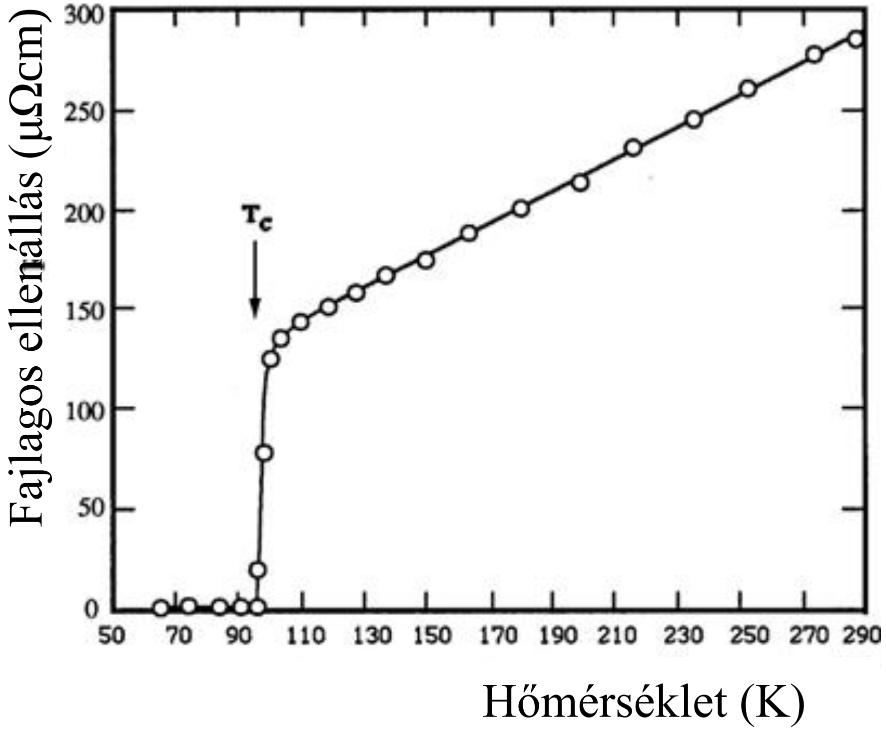
Az ellenállást befolyásoló tényezők

1. anyagi minőség
2. mechanikai feszültség (összenyomáskor általában csökken, nyújtáskor nő)
3. hőmérséklet (fémeké és ötvözeteké nő, félvezetőké, elektrolitoké csökken)

Meglehetősen tág hőmérsékleti tartományban a fémek fajlagos ellenállása a hőmérsékletnek lineáris függvénye:

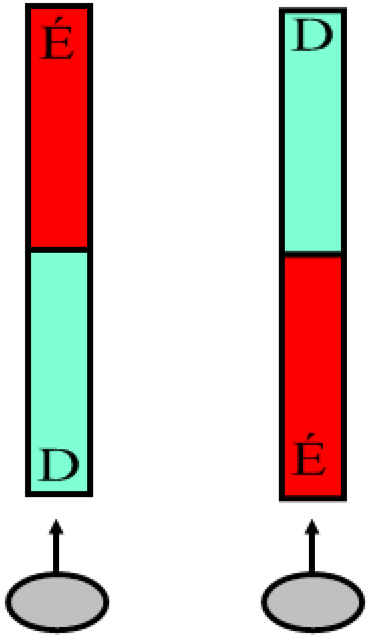
$$\rho(T) = \rho(T_0)\{1 + \alpha(T - T_0)\}$$ ahol α a hőmérsékleti együttható.

<u>Szupravezetők</u>: Egyes fémek és egyéb anyagok (pl. speciális kerámiák) fajlagos ellenállása egy bizonyos T_C kritikus hőmérséklet alatt nullára esik.
Ezekben az anyagokban külső tér nélkül is folyhat áram.
Mivel R = 0, a hőveszteség is nulla.
Felhasználás:
• nagy erősségű mágnesek tekercselésénél
• elektromos tápvezetékeknél

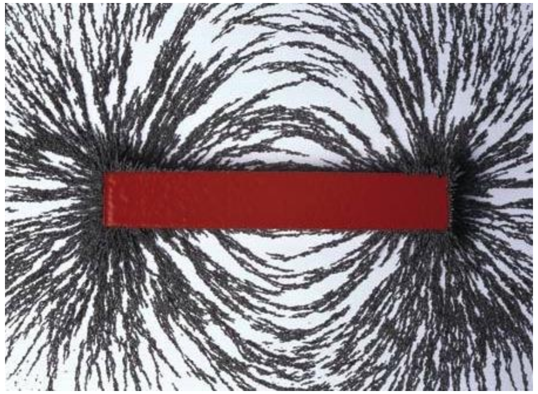


Mágneses alapjelenségek

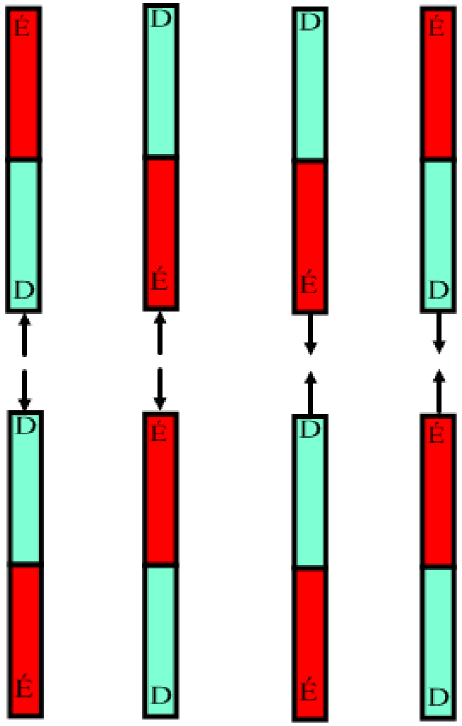
Bizonyos vasércek képesek apró vasdarabokat magukhoz vonzani: **permanens mágnes**



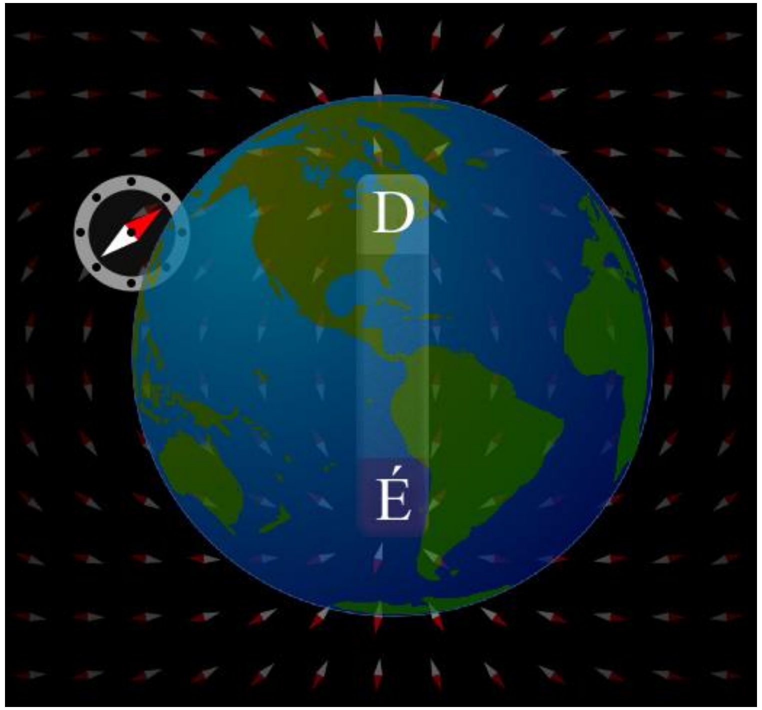
Az acélrúd felmágnesezhető ilyen ércek segítségével.
Rúd két vége: **pólusok** (a vasreszelék csak ide tapad)



Kétféle pólus - azonosak között taszítás,
ellentétesek között vonzás:

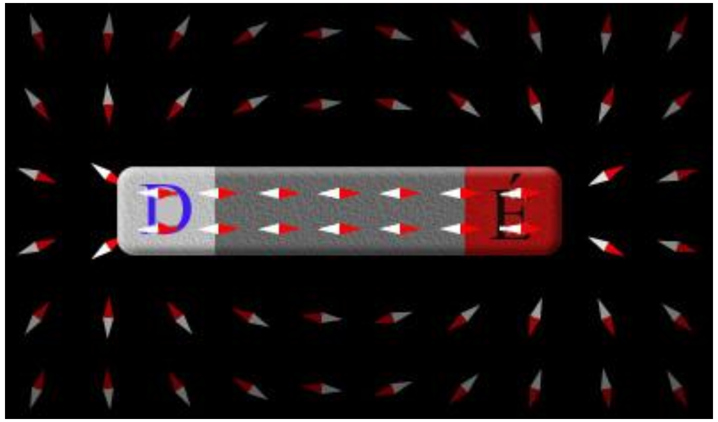


A Föld mágneses tere



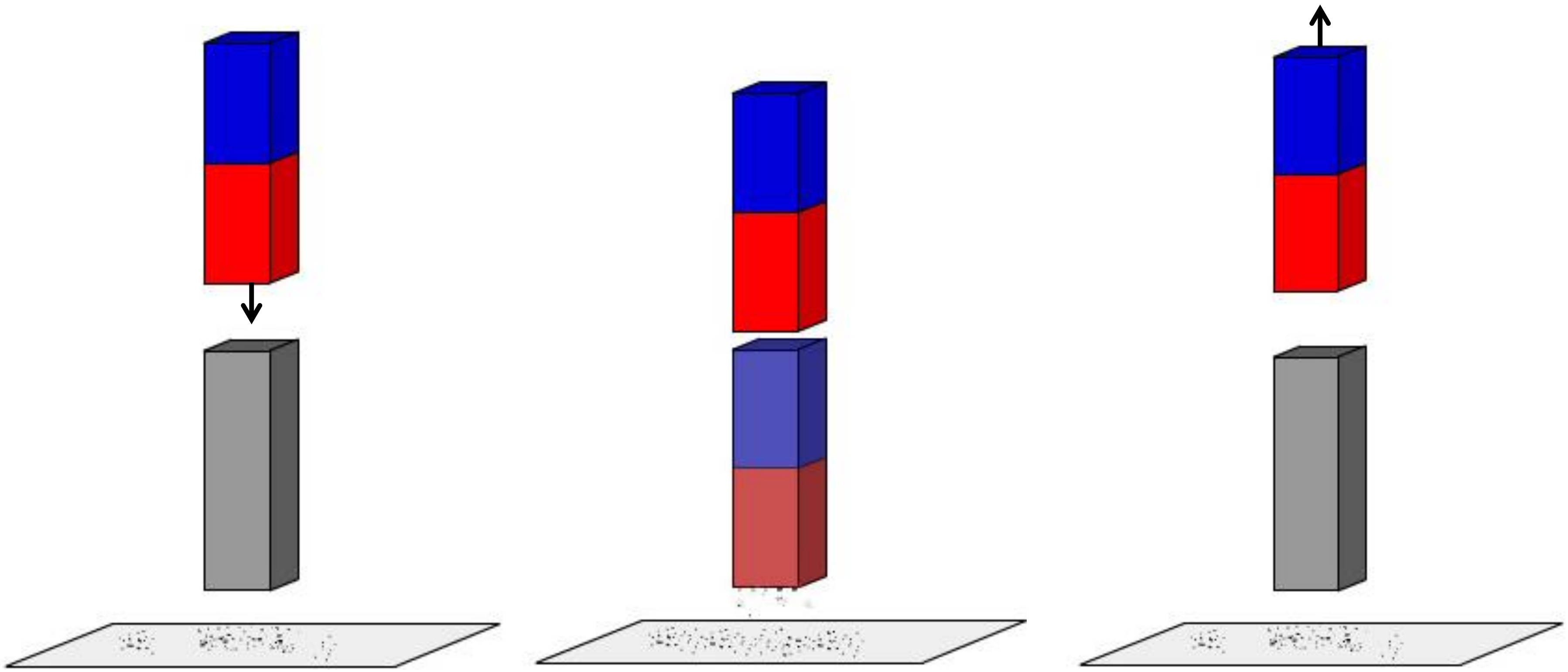
Mágnestű északi pólusa észak felé fordul a Föld mágneses tere miatt.
(a Föld mágneses terének **déli** pólusa irányába)

Északi és Déli pólusok mindig együtt vannak jelen, magányos pólusok nem fordulhatnak elő.
Rúd mágnest kettévágva a kisebb daraboknak is lesz két pólusa.



Mágneses polarizáció

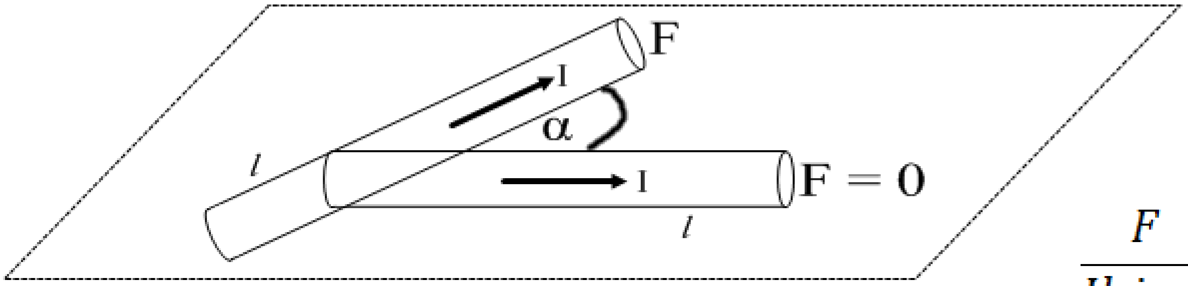
Közelbe helyezett mágnes rúd hatására a lágyvas mágnesessé válik. Eltávolítva a mágnest a mágneses tulajdonság megszűnik.



Ampere-erő, a mágneses indukcióvektor

Árammal átjárt vezető közelébe helyezett mágnestű elfordul. A mozgó töltés tehát nemcsak elektromos, hanem mágneses teret is kelt. A mágneses tér pedig a mozgó töltésekre (Lorenz-erő) illetve áramjárta vezetőkre erőt fejt ki (Ampere-erő).

Homogén mágneses térben egy bizonyos irányban a vezetőre ható erő nulla.



Egyébként: $F \sim I$

$F \sim l$

$F \sim \sin\alpha$

$\dfrac{F}{Il\sin\alpha}$ már csak a mágneses térre jellemző.

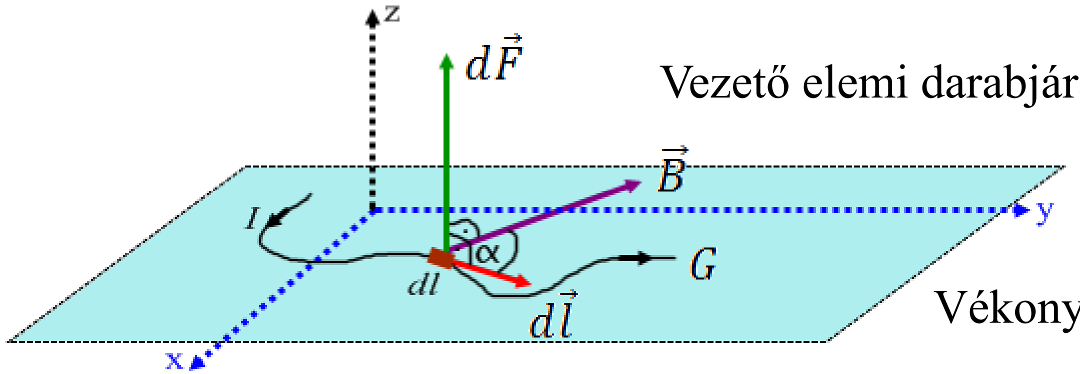
A **mágneses indukció** nagyságát tehát definiálhatjuk mint: $B = \dfrac{F}{Il\sin\alpha}$

Iránya párhuzamos a vezetővel az F = 0 esetben, és úgy mutat, hogy az $\{\vec{l}, \vec{B}, \vec{F}\}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkossanak.

Homogén térben lévő egyenes vezetőre: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

Az indukció mértékegysége: $[B] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}} = \dfrac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{Am^2}} = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{Am^2}} = \dfrac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{Am^2}} = \dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{T(tesla)}$

Ampere- és Lorentz-erő általánosan

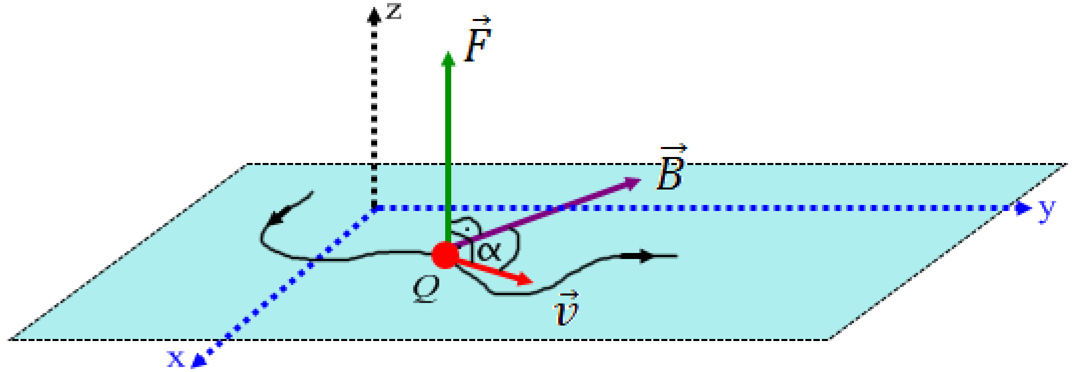


Vezető elemi darabjára ható erő: $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$

Vékony vonalas vezetőre: $\vec{F} = I \int_G (d\vec{l} \times \vec{B})$

Az Ampere-erőt egy darabka egyenes vezetőre felírva:

$$\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{l} \times \vec{B} = \frac{Nq}{\Delta t}(\vec{v}\Delta t) \times \vec{B}$$

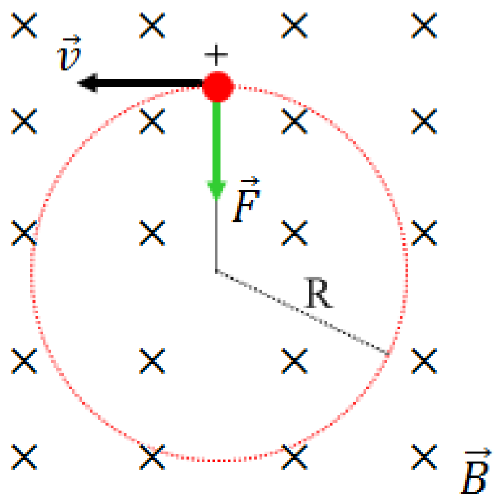


Innen egy töltött részecskére a Lorentz erő: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{F} \perp \vec{v}$ tehát a Lorentz-erő munkája nulla. A töltött részecske sebességének nagysága homogén mágneses térben állandó.

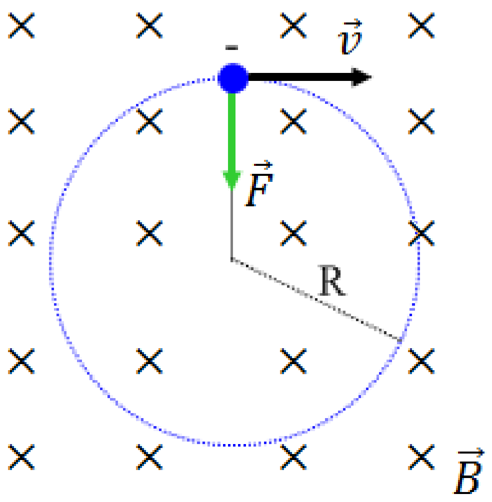
Töltött részecske mozgása homogén mágneses térben

Amennyiben $\vec{v} \perp \vec{B}$, a részecske körmozgást végez állandó sebességgel.



$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

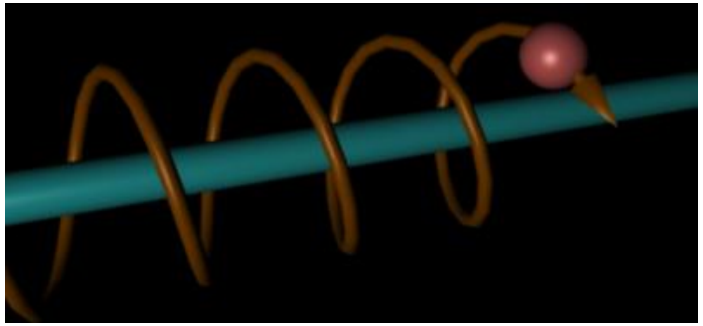


Ha a sebesség nem merőleges a térre, akkor felbontjuk a térrel párhuzamos és arra merőleges részekre:

$v_{\parallel}$ állandó

$v_{\perp}$ nagysága állandó, körmozgás

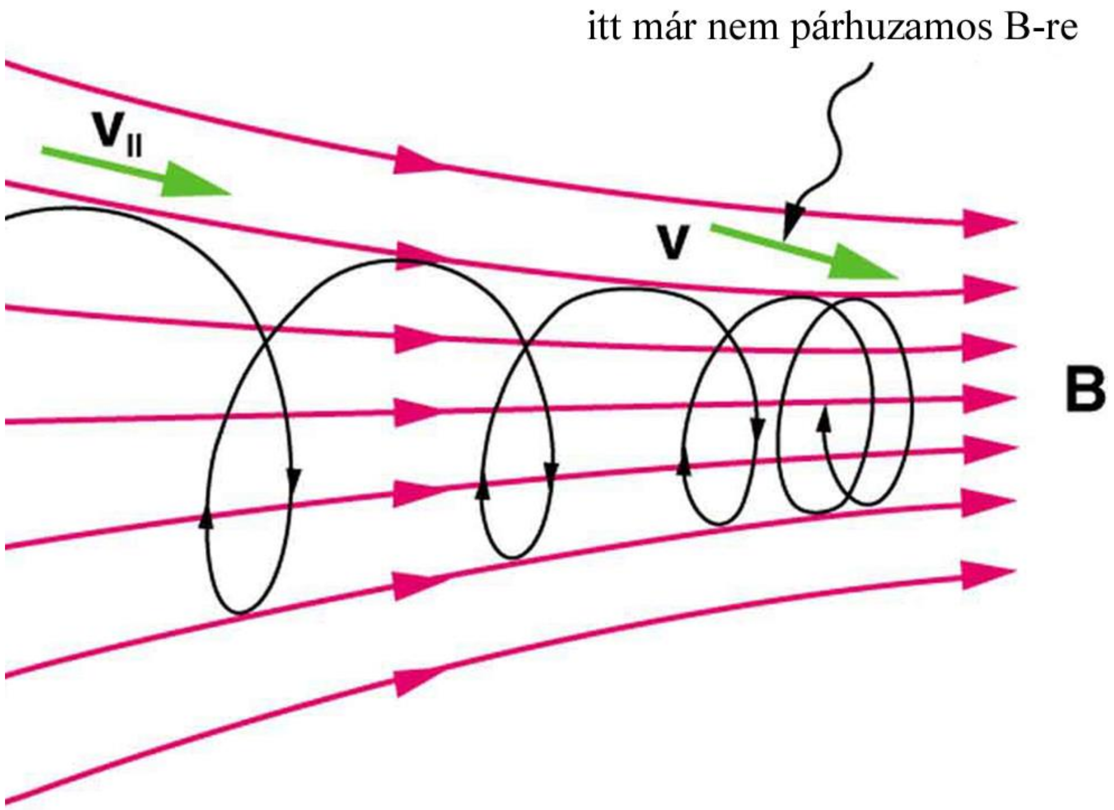
Eredmény: spirális mozgás a mágneses tér indukcióvonalai körül.



Mágneses palack

Inhomogén mágneses térben spirálalakban mozgó töltött részecskére a csökkenő tér irányába mutató komponense is van az erőnek.

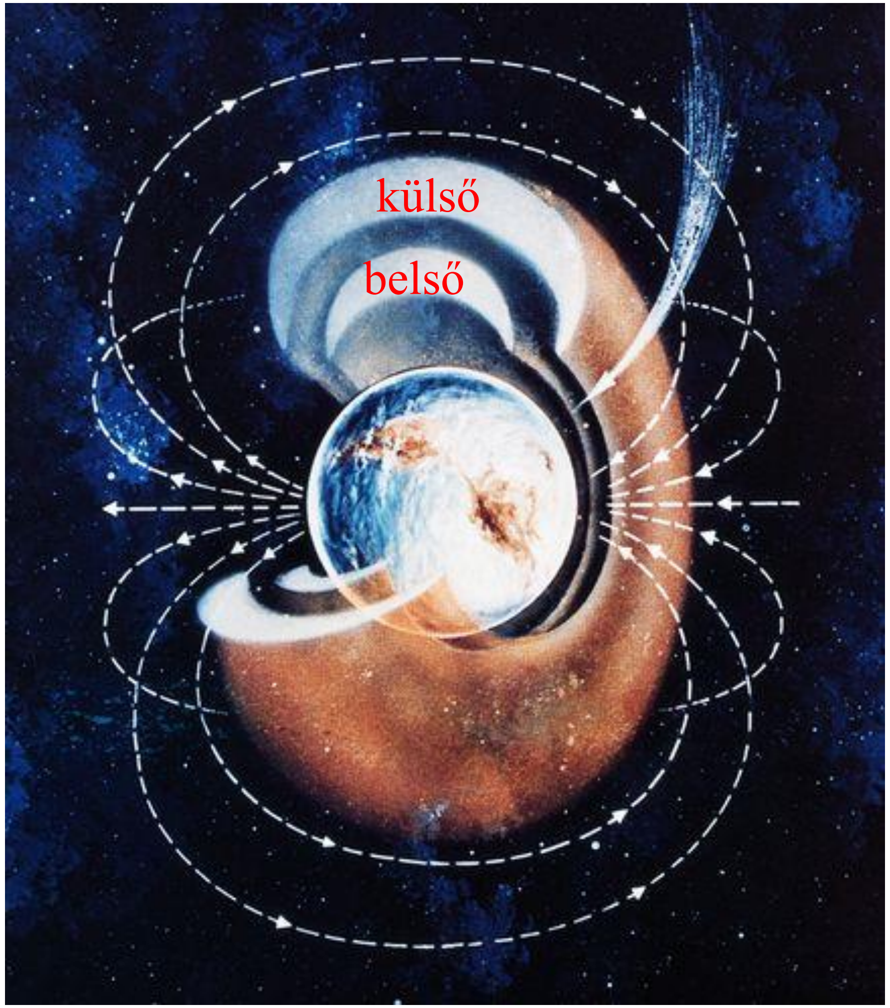
A töltött részecskék csapdába ejthetők egy térrészben melyet erősebb tér zár be mindkét irányból. Ilyen pl. a Föld mágneses tere bizonyos helyeken.

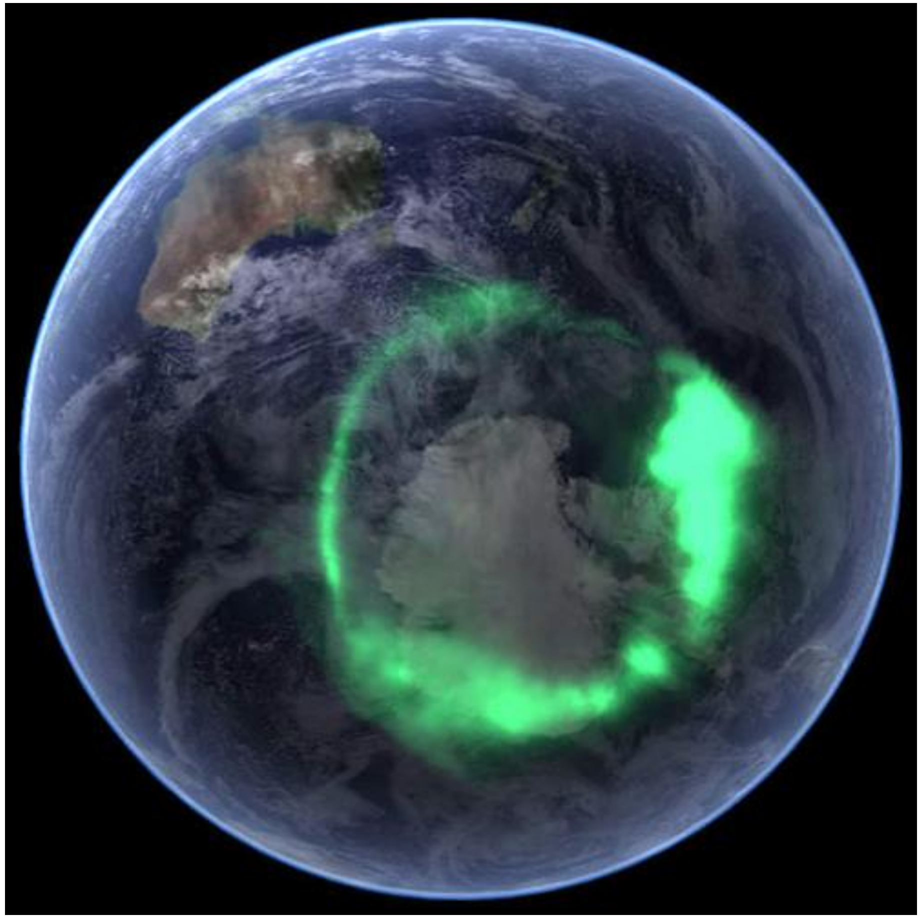


Van Allen övek

A Napból érkező töltött részecskék a Föld mágneses terében spirál mozgást végeznek és nagyrészük a sarkok közelében lép be a Föld légkörébe jellegzetes **sarki fény**t okozva.

A részecskék egy része felhalmozódik az úgynevezett Van Allen övekben.

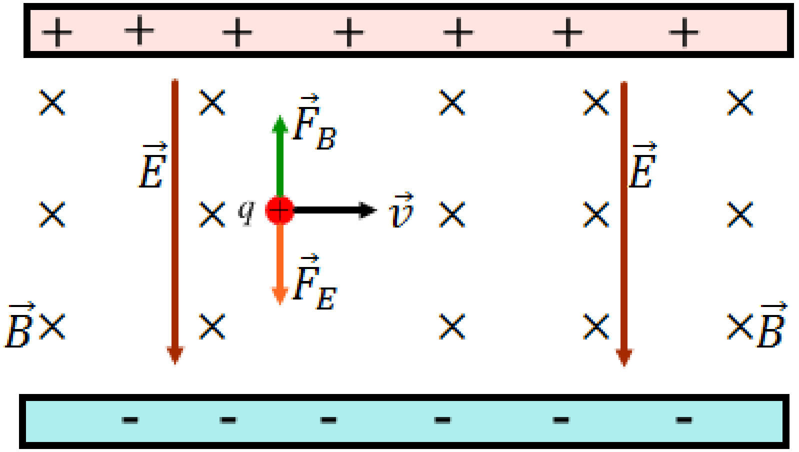




Részecske elektromos és mágneses térben

Amennyiben elektromos és mágneses tér is jelen van: $\vec{F}_e = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$

Speciális eset: $\vec{B} \perp \vec{E}$ ekkor a Coulomb- és a Lorentz-erő kiejtheti egymást.



$\vec{v} \perp \vec{E}$ és $\vec{v} \perp \vec{B}$

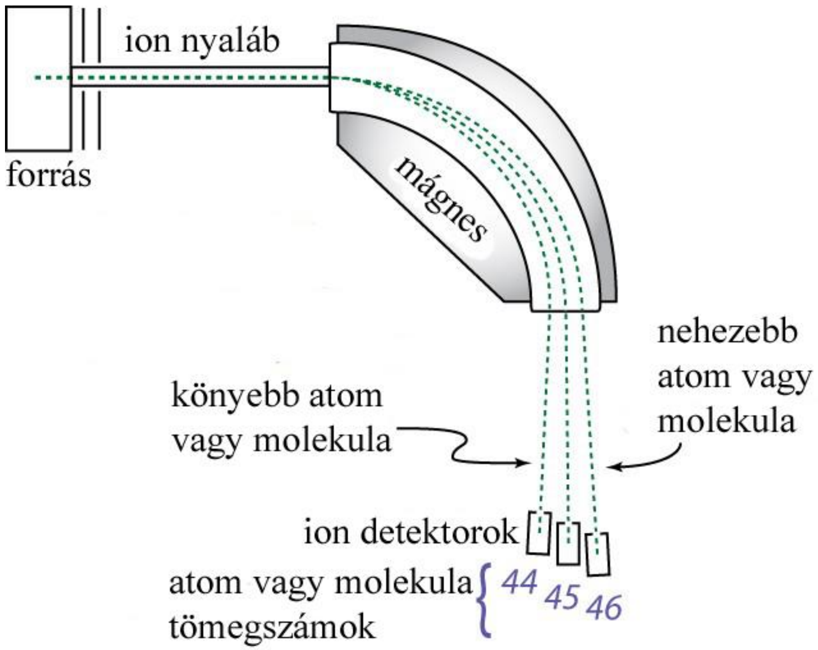
Sebességkiválasztó: csak azok a részecskék tudnak eltérülés nélkül keresztülmenni amelyekre

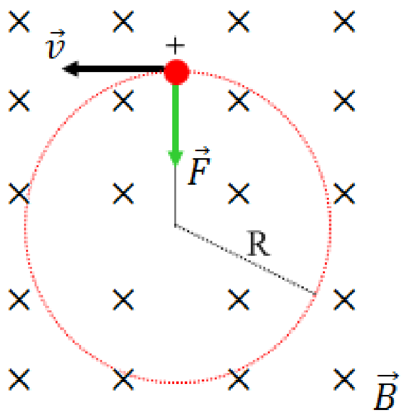
$$qvB = qE$$

Tehát: $v = \dfrac{E}{B}$

Az eltérülő részecskéket egy lemezzel felfogják, ezért csak a kiválasztott sebességű részecskék maradnak a nyalábban. *E* és *B* állításával bármilyen sebességű részecskék kiválaszthatók.

Tömegspektrométer



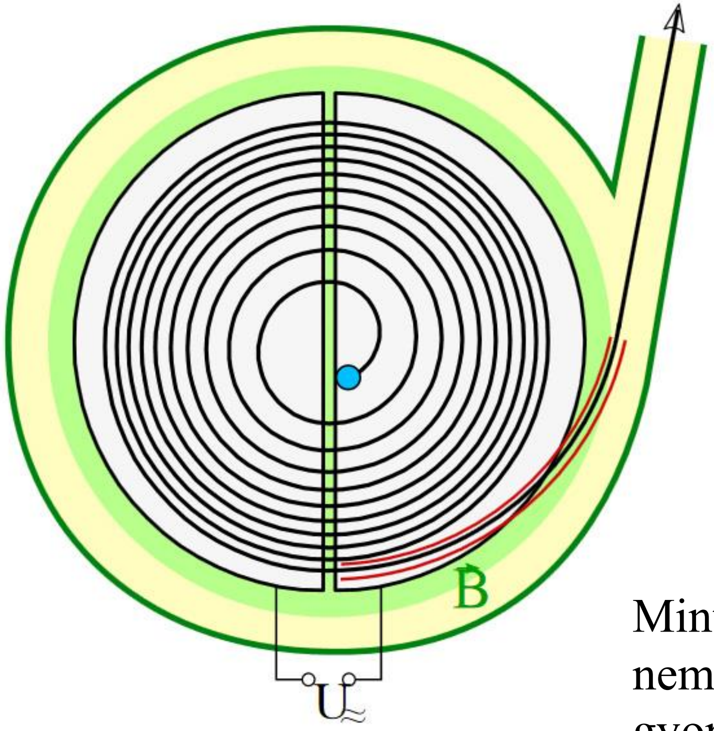


$$R = \frac{mv}{qB}$$

Amennyiben az ionok töltése és sebessége azonos (sebesség kiválasztás után), akkor az eltérülésük mértéke csak tömegüktől függ. Minden egyes atomtömeg eltérülési helyére tett ion detektorok jele megmondja a vizsgált anyag összetevőinek arányát (spektrum).

Ciklotron

A duánsok közötti feszültség minden áthaladáskor gyorsítja a töltött részecskét.
Ahogy nő a részecske sebessége (energiája), úgy nő a körpálya sugara.
Végül a felgyorsított részecske kilép a ciklotronból néhányszor 10 MeV energiával.



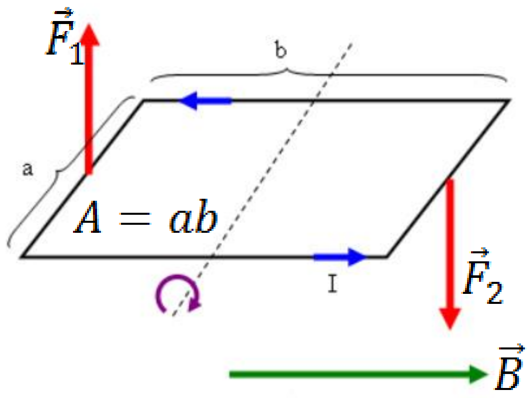
$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

A periódusidő: $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

Mint látható a periódusidő állandó, tehát
nem kell változtatni a feszültség frekvenciáját
gyorsítás közben.

Áramhurokra ható forgatónyomaték

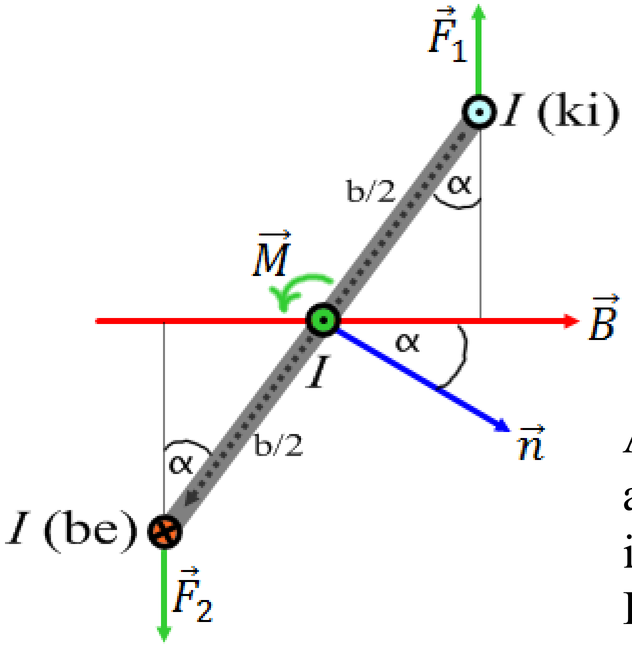


Homogén mágneses térben lévő egyenes vezetőre, amikor a tér a hurok síkjában van: $F_1 = F_2 = F = IaB$

Az eredő erő nulla, de a forgatónyomaték nem.

$$M = 2F\frac{b}{2} = IaBb = IAB$$

Tetszőleges orientáció esetén a forgatónyomaték: $M = F_1\frac{b}{2}\sin\alpha + F_2\frac{b}{2}\sin\alpha$



$$F_1 = F_2 = F = IaB$$

$$M = Fb\sin\alpha = IaBb\sin\alpha = IAB\sin\alpha$$

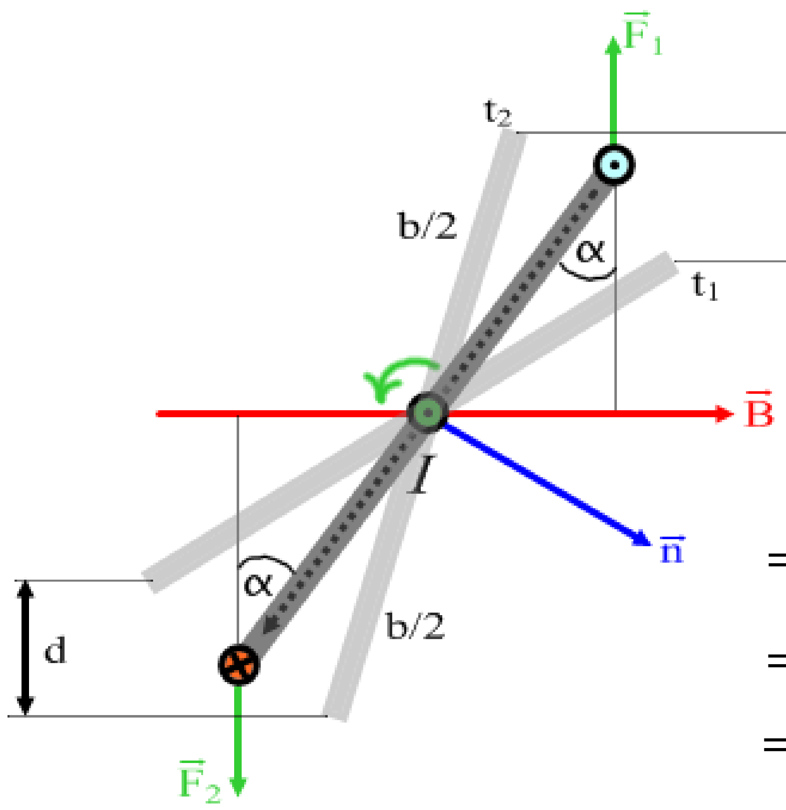
Az irányokat is figyelembe véve:

$$\vec{M} = IA\vec{n} \times \vec{B} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$\vec{m} = I\vec{A}$ a **mágneses dipólmomentum** $[m] = \mathrm{Am}^2$

A forgatónyomaték akkor szűnik meg ha a dipól befordult a mágneses indukció irányába (stabil egyensúly, ellenkező irányban pedig labilis egyensúly!).
Iránytűként használható egy áramjárta hurok is.

Áramhurok potenciális energiája



Számítsuk ki a kereten végzett munkát a t_1 és t_2 időpontok között, miközben a normális és a mágneses indukció közötti szög α_1-ről α_2-re változik (csökken):

$$F = F_1 = F_2 = IaB$$

$$W_{12} = 2Fd = 2IaB\left(\frac{b}{2}\cos\alpha_2 - \frac{b}{2}\cos\alpha_1\right) =$$

$$= 2IaB\frac{b}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = IabB(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) =$$

$$= IAB(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = mB(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) =$$

$$= -mB\cos\alpha_1 + mB\cos\alpha_2$$

Látható, hogy amennyiben: $E_P = -mB\cos\alpha = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

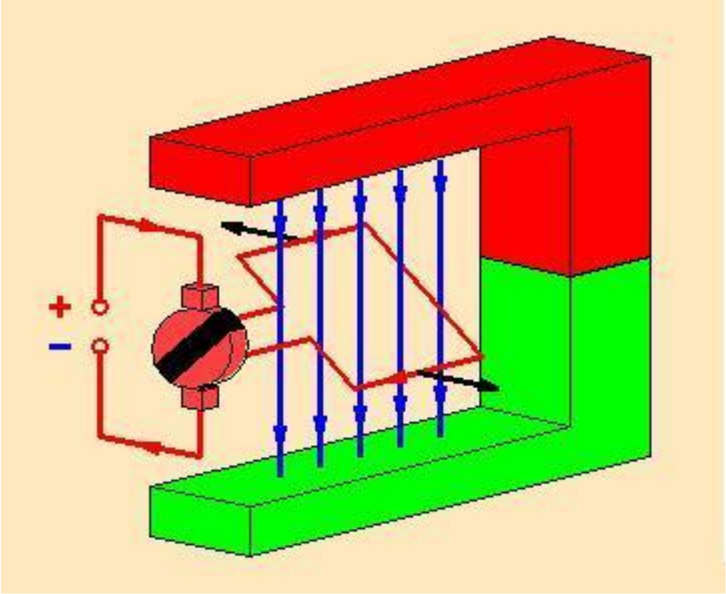
akkor a végzett munka felírható a konzervatív erőterekre jellemző formában:

$$W_{12} = E_{P1} - E_{P2}$$

Kétfázisú elektromotor

A forgó hurok két kivezetése a szigetelővel elválasztott fél-hengerhez csatlakozik.

Az egyenfeszültség alá helyezett kefék minden félfordulatnál a másik fél-hengerhez csatlakoznak.



A homogén mágneses tér az áramjárta hurkot a stabil egyensúlyi helyzetbe igyekszik beforgatni.

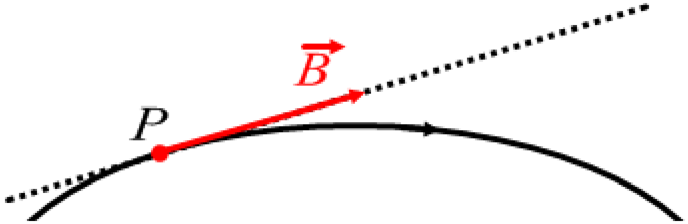
Amire azonban a hurok elérné a stabil egyensúlyi helyzetet a polaritás megfordul.

Mivel az áram ellenkező irányba folyik, a stabil egyensúlyi helyzet a labilis egyensúlyi helyzetté válik.

A labilis egyensúlyi helyzeten a lendület miatt túlfordulva a hurok igyekszik tovább-fordulni a stabil egyensúlyi helyzetbe, azonban ott ismét felcserélődik a polaritás…

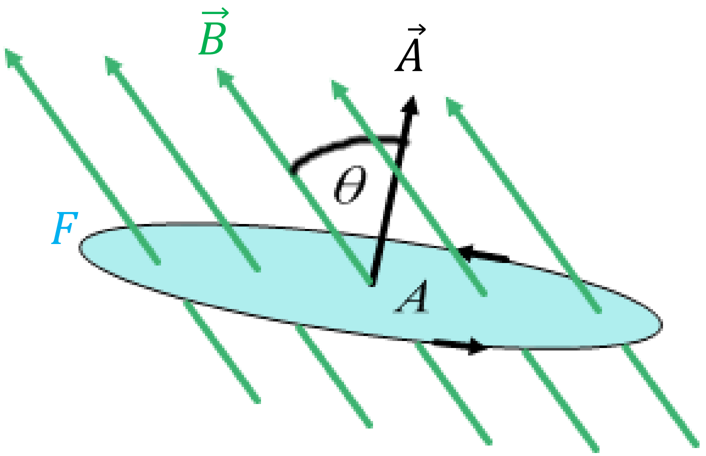
Mágneses-indukciófluxus

A mágneses mező szemléltetésére a mágneses indukcióvonalakat használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintője egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral.



A mágneses indukció nagyságát az indukcióvonalak sűrűsége jellemzi.
A vonalakra merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal halad át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

<u>Mágneses-indkciófluxus:</u> Megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát.



Ha az indukció a felület mentén homogén:

$$\Phi = BA\cos\theta = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Mértékegysége: $\dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{m}^2 = \mathrm{Vs} = \mathrm{Wb}$ (weber)

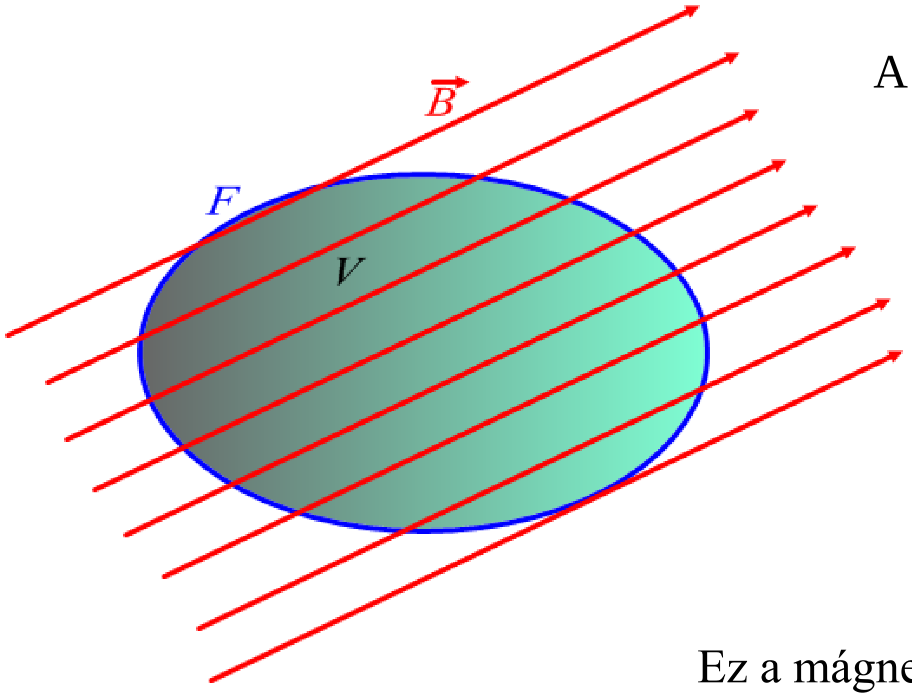
Ha nem homogén az indukció, és/vagy nem sík a felület, akkor a felületet kicsi darabokra bontjuk és a járulékokat összegezzük:

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Mágneses Gauss-törvény

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek (a térnek nincsenek forrásai), így a zárt felületre számított mágneses-indukciófluxus zérus. A térfogatba bemenő indukcióvonalak száma megegyezik a kijövő vonalak számával.

A mágneses Gauss-törvény integrális alakja: $$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



A Gauss-Osztogradszkíj tétel alkalmazásával:

$$0 = \oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{B}\right) dV$$

Mivel ez egy tetszőleges *P* pont körüli tetszőlegesen kicsi térfogatra igaz, csak úgy teljesülhet, ha a tetszőleges *P* pontban:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ez a mágneses Gauss-tétel differenciális (lokális) alakja. A mágneses tér forráserőssége bármely pontban nulla.

A mágneses indukcióvonalaknak nincs kezdetük és nincs végük, önmagukba záródnak. A mágneses tér forrásmentes, viszont örvényes.

Mágnesezettség és mágneses térerősség

Az anyagok mágneses tulajdonságai túlnyomó részben az elektronok mágneses dipól-momentumára vezethetők vissza:

1. Az atommag körül mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető
2. Saját mágneses momentuma is van ami a spinből adódik

A mágneses polarizáció során ezek az atomi dipólmomentumok igyekeznek egy irányba (külső tér irányába) beállni és ezáltal erősíteni egymás hatását.

A **mágnesezettség** vektor a *P* pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses dipólmomentumot:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i}{\Delta V} \qquad [M] = \frac{\mathrm{Am}^2}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

A **mágneses térerősség** a $\vec{B}$ és az $\vec{M}$ vektorok lineáris kombinációjaként definiált:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad [H] = [M] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ a vákuum permeabilitása.

Anyagegyenlet

Az anyagegyenlet megadja az $\vec{M}$ mágnesezettség és a mágnesező tér $\vec{B}$ indukciója közötti kapcsolatot. Első közelítésben lineáris kapcsolatot feltételezünk.

Amennyiben $\vec{B} \sim \vec{M}$ akkor $\vec{H} \sim \vec{M}$ is igaz. Legtöbb izotróp közegben a lineáris

anyagegyenlet teljesül, vagyis $\vec{H} \parallel \vec{M}$ és $\vec{H} \sim \vec{M}$

Az arányossági tényező a χ mágneses szuszceptibilitás: $\vec{M} = \chi \vec{H}$

Ezt felhasználva a mágneses indukcióra:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_0 \left(\vec{H} + \chi \vec{H} \right) = \mu_0 (\chi + 1) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Ahol $\mu_r = \chi + 1$ a relatív permeabilitás, és

a $\mu = \mu_0 \mu_r$ az abszolút permeabilitás.

Az elektromágneses tér energiája

Az elektromos tér energiasűrűsége korábbról: $w_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

Hasonlóképpen, a mágneses tér energiája: $w_M = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

A tér egy adott pontjában az elektromos és mágneses terek együttes energiasűrűsége tehát (amennyiben mindkettő jelen van):

$$w_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

A pont egy (elegendően) kicsiny ΔV térfogatú környezetében lévő energia:

$$\Delta W_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)\Delta V$$

Amennyiben az energiasűrűség nem homogén, egy véges térfogatban lévő energiát térfogati integrállal számolhatjuk:

$$W_{EM} = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)dV$$

Az Ampère-féle gerjesztési törvény

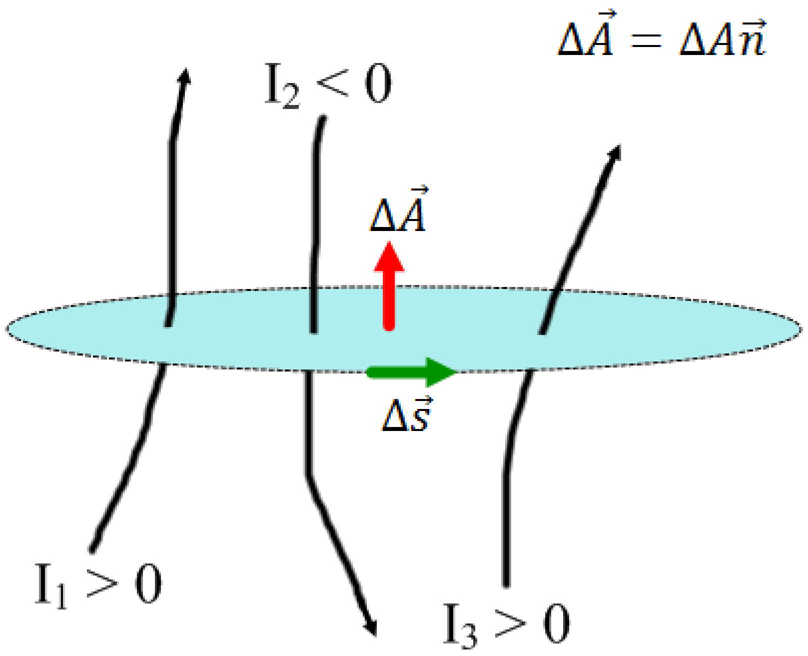
Mozgó töltések (áramok) mágneses teret hoznak létre.

Vékony vonalas vezetőkre a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok előjeles összegével.

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i$$

A normális irányába átfolyó áram **pozitív**.

$\Delta\vec{s}$ és $\vec{n}$ irányát a jobbcsavar szabály kapcsolja össze.



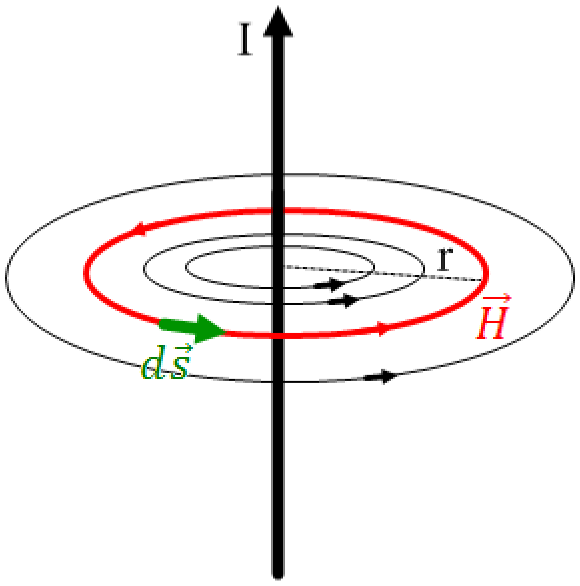
A felületen átfolyó áram általánosan:

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Innen az Ampère-féle gerjesztési törvény differenciális (lokális) alakja:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$$

Alkalmazás: végtelen egyenes vezető tere



$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

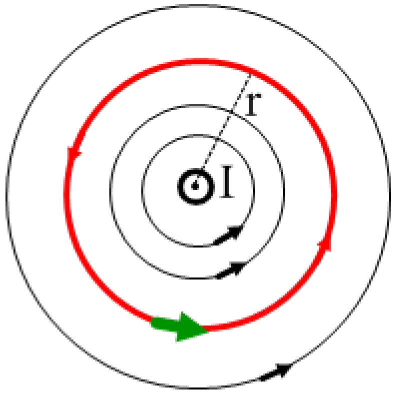
Hengerszimmetria miatt: A térerősség nagysága csak az r távolságtól függ, iránya pedig tangenciális.

$$d\vec{s} \parallel \vec{H}$$

Tehát: $\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \oint_G ds = H2r\pi$

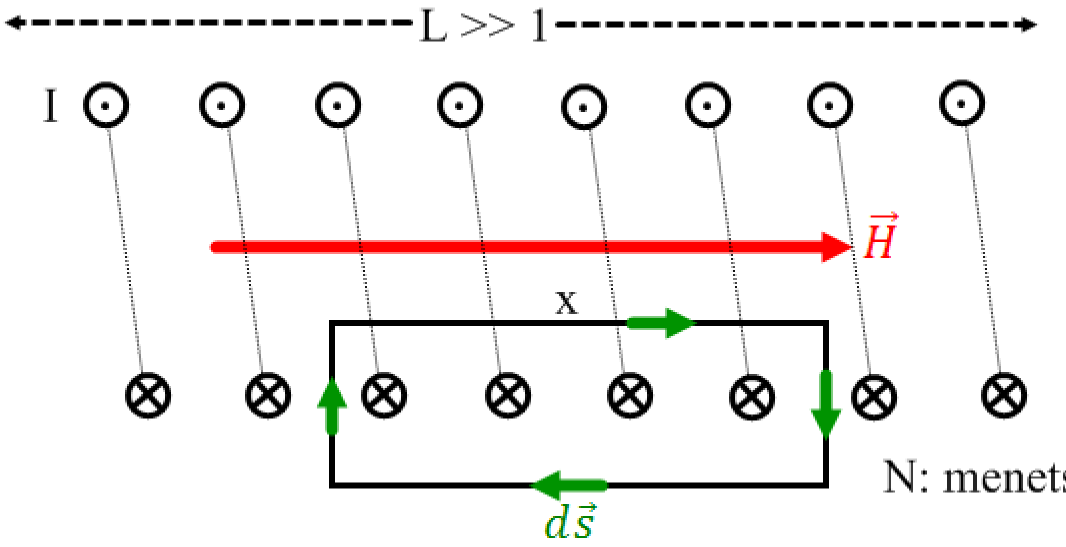
$$H2r\pi = I$$

$$H = \frac{I}{2r\pi}$$



Vákuumban vagy levegőben pedig: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2r\pi}$

Alkalmazás: „végtelen” hosszú egyenes tekercs tere



N: menetszám

Szimmetria miatt: A térerősség a hossztengellyel párhuzamos, és homogén. Kívül nulla.

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = Hx$$

$$\sum_i I_i = \frac{NI}{L} x$$

$$Hx = \frac{NIx}{L} \qquad H = \frac{NI}{L}$$

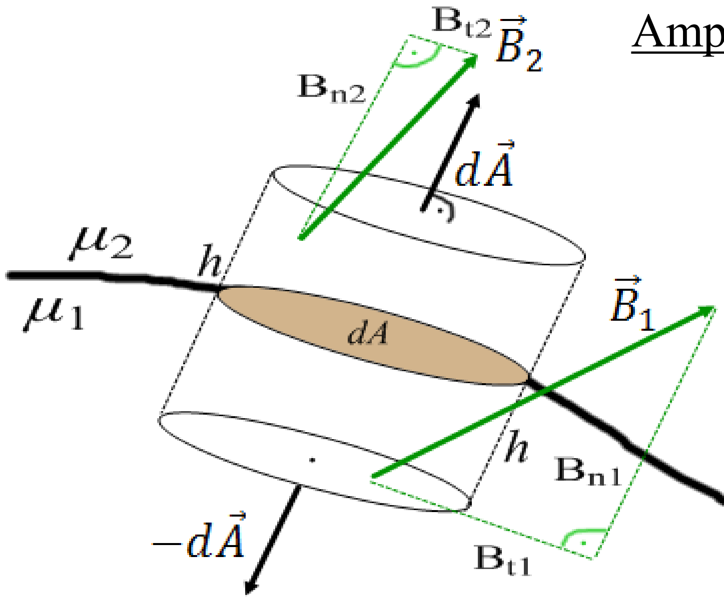
Vákuumban vagy levegőben pedig: $B = \mu_0 \frac{NI}{L}$

Ha a tekercsben valamilyen más anyag van: $B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L}$

Határfeltételek

<u>Ampère-féle gerjesztési törvény:</u> $\oint_G \vec{H}\cdot d\vec{r} \; = 0^*$

(*amennyiben a határfelületen nem folynak áramok)



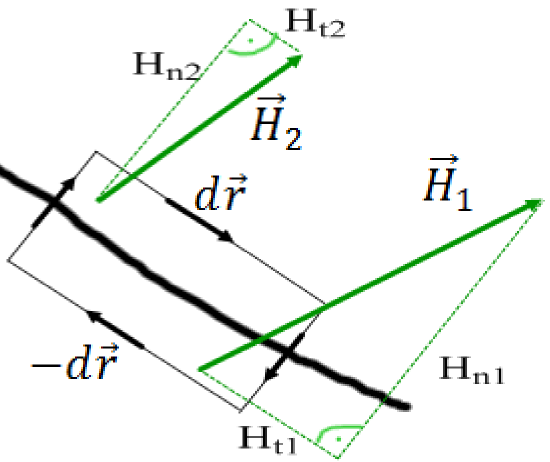
dr nullához tart, *h* még ennél is sokkal gyorsabban tart nullához.

$$\vec{H}_2\cdot d\vec{r} + \vec{H}_1\cdot(-d\vec{r}) = H_{2t}dr - H_{1t}dr = 0$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



<u>Mágneses Gauss-törvény:</u>

$$\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

dA nullához tart, *h* még ennél is sokkal gyorsabban tart nullához.

$$\vec{B}_2\cdot d\vec{A} + \vec{B}_1\cdot\left(-d\vec{A}\right) = B_{2n}dA - B_{1n}dA = 0$$

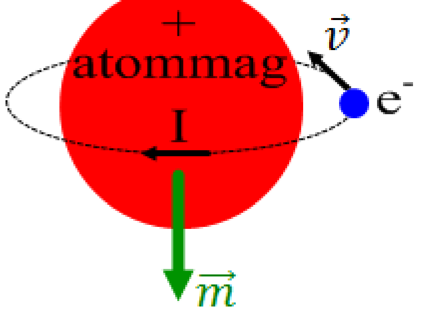
$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

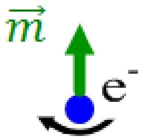
$$B_{1n} = B_{2n} \;\rightarrow\; \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \rightarrow \; \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Anyagok mágneses tulajdonsága

Három fő csoportba sorolhatók:
• diamágnesek
• paramágnesek
• ferromágnesek

Az atomok mágneses tulajdonságaiért főleg az elektronok felelősek:

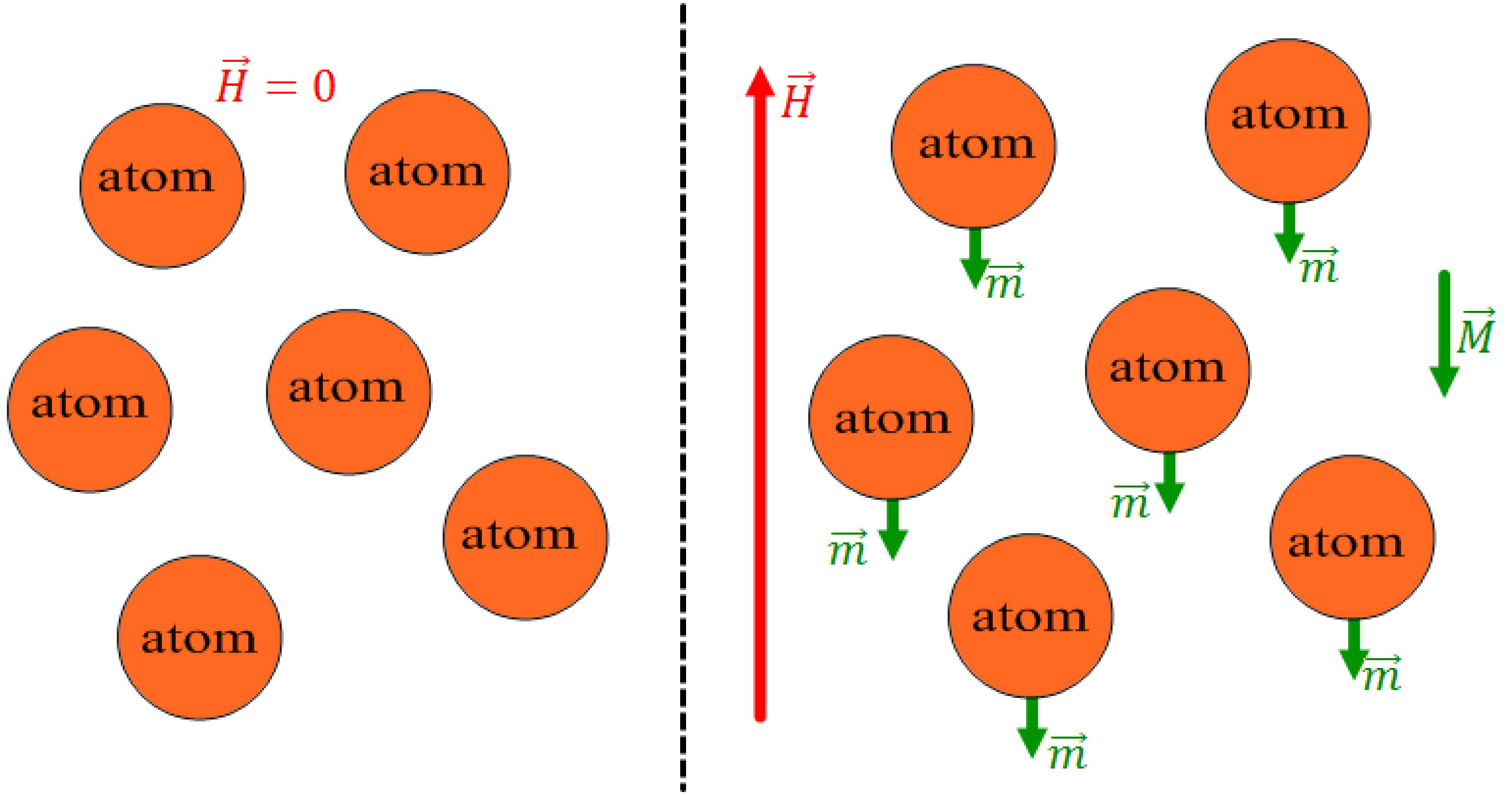




Speciális esetben (zárt elektronhéj esetén) ezek kiejthetik egymást, és ekkor az atom nem rendelkezik saját mágneses momentummal.

Diamágnesek

Diamágneses anyagok atomjai nem rendelkeznek saját mágneses momentummal.



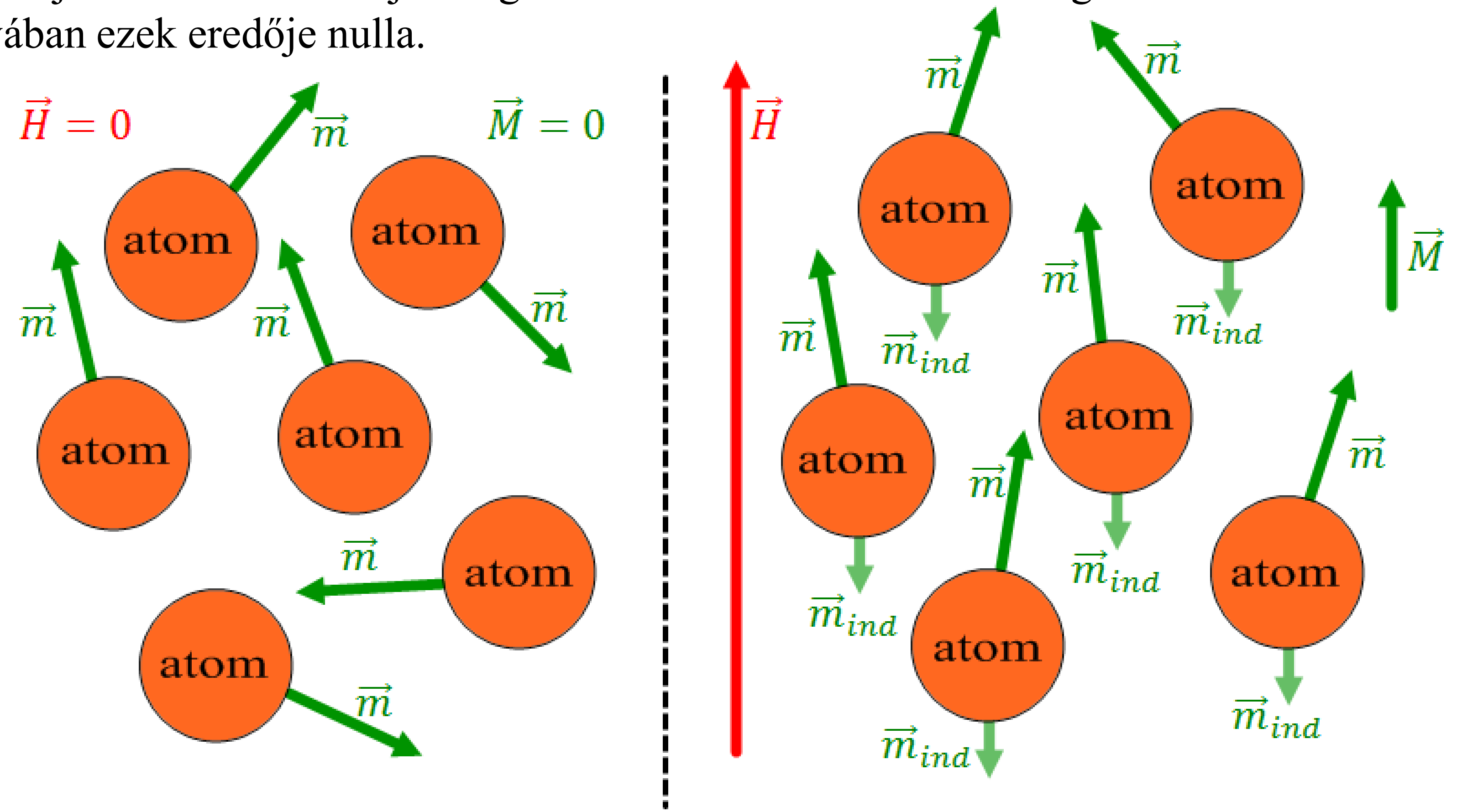
Külső mágneses tér hatására az atomokban mágneses momentum indukálódik.
Ezek iránya ellentétes a külső térrel (annak hatását gyengíteni igyekszik – Lenz törvény)

$\vec{M} = \chi \vec{H}$ $\quad \chi < 0$ $\quad \chi \approx -10^{-4}$ $\quad \mu_r = 1 + \chi \approx 0.9999$

Tehát a közegbeli indukció kisebb, mint a vákuumbeli $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ indukció.

Paramágnesek

Az atomjai rendelkeznek saját mágneses momentummal. A hőmozgásuk miatt külső tér hiányában ezek eredője nulla.



<u>Külső tér két hatás</u>: indukált mágneses momentum; saját momentumokat a tér irányába igyekszik befordítani a hőmozgás ellenében. Magasabb hőmérsékleten kevésbé tudja.

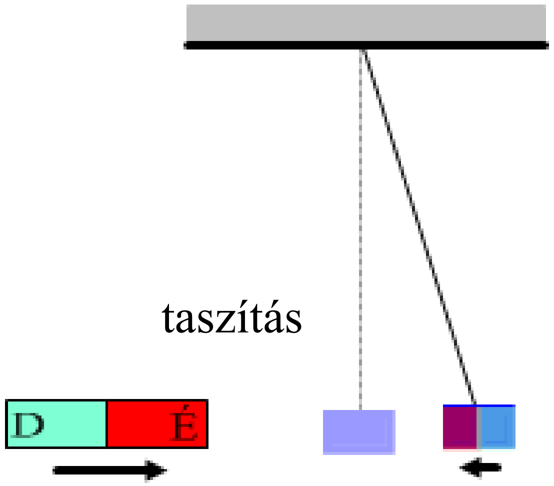
$\chi \approx 10^{-6} - 10^{-3}$

$\mu_r = 1 + \chi \approx 1.000001 - 1.001$

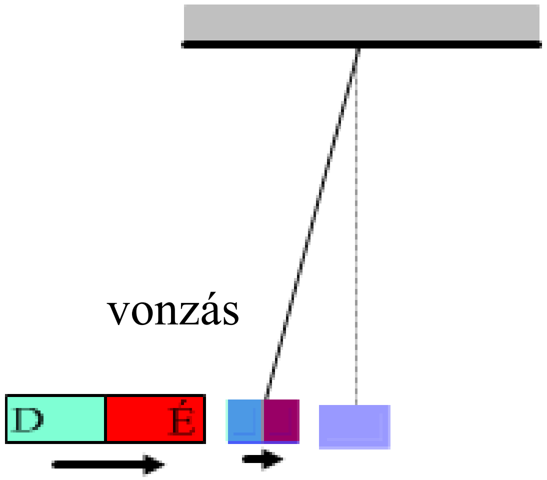
<u>Curie-törvény</u>: $\chi \sim \frac{1}{T}$

Dia- és Paramágnesek

<u>Diamágnesek</u>:
nemesgázok, víz, ezüst, arany, réz



<u>Paramágnesek</u>:
alkálifémek, alumínium, volfrám, oxigén



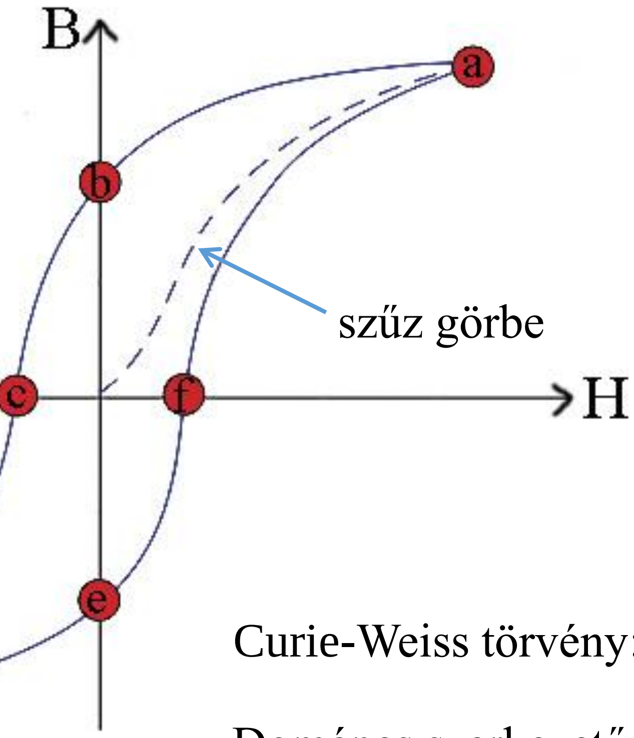
Ferromágnesek

Erősen mágnesezhető anyagok, többé-kevésbé megőrzik mágnesességüket.
pl. vas, kobalt, nikkel
A szuszceptibilitás értéke függ a külső tértől, a lineáris anyagegyenletek nem érvényesek.

$$\mu_r \approx 100 - 1000000$$

Jellemző rájuk a hiszterézis:

a és **d**: telítés
b és **e**: remanencia
c és **f**: koercitív erő



Nagy remanenciájú anyagok (kemény) használhatók permanens mágnesnek.

Kis remanenciájú (lágy) anyagok használhatók elektromágnesben és transzformároban.

A Curie-hőmérséklet fölött a ferromágneses anyagok para-mágnesessé válnak.
Visszahűtve a szuszceptibilitás egyre növekszik.

Curie-Weiss törvény: $\chi \sim \dfrac{1}{T - T_C}$

Doménes szerkezetűek, a **domén**en belül a saját mágneses dipólmomentumok egy irányba állnak.