

# Hullámokról általában: alapösszefüggések a harmonikus hullámra. A Doppler-effektus

## A harmonikus rezgés

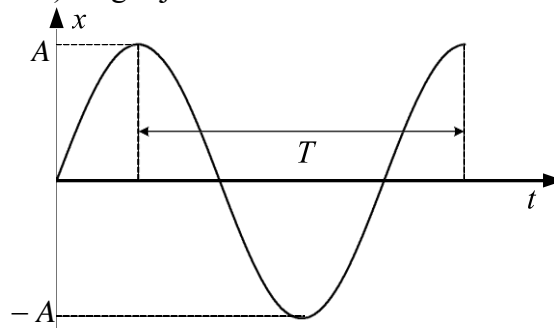
Rezgések és hullámok a fizikának és a műszaki tudományoknak nagyon sok ágában előfordulnak, pl. a hangtanban. Ha egy gitár egyik húrját festékpöttyel megjelöljük, a festett pont is rezgést végez. A legegyszerűbb rezgés a (szinuszos) harmonikus rezgés. Ilyet végeznek pl. szilárd test atomjai egyensúlyi helyzetük körül.

Akkor végez egy tömegpont **harmonikus rezgést**, ha rá egy erő hat, a rugalmas erő törvénye:  $F_x = -Dx$ , ahol  $x$  az egyensúlyi helyzettől való kitérés (ill. ha az erők eredője a fenti rugalmas erő). Tehát ez egy visszahúzó erő, ami arányos a kitéréssel, csak ellentétes irányú. (Ebből kapjuk a mozgásegyenletet:  $m \cdot d^2x/dt^2 = -Dx$ . Ez egy másodrendű közönséges differenciál-egyenlet, az általános megoldása, a **mozgástörvény**:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

ahol  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ , továbbá  $A$  az amplitúdó (a kitérés maximális értéke),  $\delta$  pedig a kezdőfázis.

Tehát szinuszos (harmonikus) rezgés jön létre.



A periódusidő a legkisebb olyan  $T$  idő, amelyre  $x(t) = x(t+T)$  bármely  $t$ -re. A körmozgáshoz hasonlóan

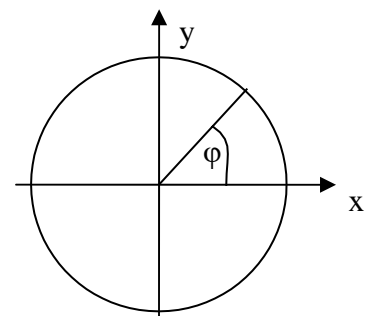
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

## Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgés kapcsolata

Induljunk ki abból, hogy egyenletes körmozgásnál a szögsebesség állandó:  $\varphi = \omega t$ . Ekkor az  $x$  koordinátát az  $r \cos \varphi$ , az  $y$ -t pedig az  $r \sin \varphi$  formula adja meg. Beírva  $\varphi$  helyére  $\omega t$  -t, kapjuk, hogy  $x(t) = r \cdot \cos(\omega t)$  és  $y(t) = r \cdot \sin(\omega t)$ , tehát mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.

Más szavakkal, az egyenletes körmozgás felbontható két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgásra, amelyek fáziskülönbsége  $\pi/2$  (hisz  $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$ ).

Emiatt a hasonlóan jelölt mennyiségek nemcsak formailag hasonlóak, hanem tartalmilag is megfelelnek egymásnak:  $T$  a keringési vagy periódusidő,  $\omega$  a szögsebesség vagy a körfrekvencia.

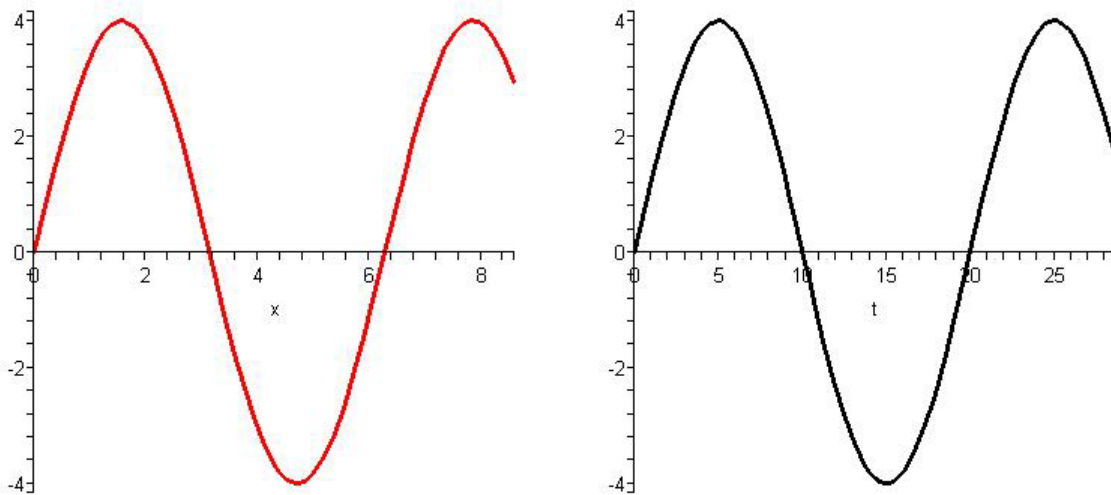


## Hullámok

Tekintsünk egy haladó hullámot, pl. víz hullámot, a hullám forrásától elég távol. Ha egy konkrét időpillanatban lefényképeznénk, azt látnánk, hogy térben (megközelítőleg) periodikus, a terjedés irányában. Ha viszont egy adott pontban vizsgáljuk az időbeli viselkedést, akkor láthatjuk, hogy hullámvölgyek és hullámhegyek haladnak át az adott ponton, időben periodikusan. Legyen  $A$  az a mennyiség, amelyik hullámszerűen változik, víz hullámoknál pl. a vízfelszín nyugalmi helyzetéhez képesti magassága. Tegyük fel, hogy a hullám  $x$  irányban terjed, a többi iránnyal nem foglalkozunk. A legegyszerűbb **hullámfüggvény** pl. az  $y$  tengely irányába terjedő egy dimenziós hullámra:

$$x = A \sin(\omega t - ky), \quad (1)$$

ahol  $k$  a hullámszám,  $\omega$  a körfrekvencia. Rögzített  $y$ -re  $x$  idő szerint periodikus, pontosabban harmonikus rezgőmozgást végez  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  periódusidővel. Hasonlóan, rögzített  $t$ -re pedig a térben periodikus a függvényalak.



Vizsgáljuk meg a térbeli periodicitást. Tegyük fel, hogy egy adott  $y_1$ -hez van olyan  $y_2$ , hogy  $x_1 = x_2$  bármely időpillanatban, azaz

$$A \sin(\omega t - ky_1) = A \sin(\omega t - ky_2)$$

Ebből következik, hogy az argumentumok egymástól  $2\pi$  többszörösével térnek el. Ebből minket az érdekel, hol van az  $y_1$ -hez legközelebbi  $y_2$ , ahol  $x_1 = x_2$ , tehát az argumentumok

legkisebb különbségét vesszük:  $ky_1 + 2\pi = ky_2$ , amiből  $y_2 = y_1 + \frac{2\pi}{k}$ .

Tehát az  $x$  változása  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  szerint periodikus, a  $\lambda$  mennyiség neve: hullámhossz,

mértékegysége a méter. Ezeket beírva kapjuk:

$$x = A \sin 2\pi(t/T - y/\lambda) \quad (2)$$

Az ábrán látható példán  $\lambda=2\pi$ , ebből kapjuk, hogy  $k=1$ . A második ábráról  $T=20$ , vagyis  $f=1/20$  és  $\omega=\pi/10$ . A függőleges tengelyen a kitérés van, ennek maximális értéke, az amplitúdó  $A=4$ , ez mindkét ábrából leolvasható.

Ez a hullám az  $y$  tengely pozitív irányába terjed, kérdés, milyen sebességgel. Ha  $dy$  távolságot megteszünk a haladás irányában (jobbra), ott  $dt$ -vel később zajlik le minden (pl. ugyanaz a hullámvölgy  $dt$  idővel később ér oda), vagyis ha  $y$ -hez hozzáadunk  $dy$ -et és  $t$ -hez hozzáadunk  $dt$ -t, az argumentum nem változik:

$$f\left(t - \frac{y}{\lambda}\right) = f\left(t + dt - \frac{y + dy}{\lambda}\right),$$

ebből  $dy/\lambda = f dt$ , azaz  $dy/dt = f \lambda$ , vagyis kaptunk egy fontos összefüggést a hullám terjedési

sebességének nagyságára (**a hullámmozgás alapösszefüggése**):

$$c = f \lambda$$

Ezzel

$$x = A \sin(2\pi/\lambda)(y - ct) \quad (3)$$

A hullámfüggvény (1), (2) és (3) alakja ekvivalens, de míg az első két alak az általa leírt fizikai mennyiség idő- és hely szerinti periodicitását hangsúlyozza, a (3) alak inkább a fázis  $c$  sebességű mozgását. (A (3) alakban a zárójeles rész előjelét megfordítottuk.) Hanghullám esetén  $c$  a hangsebesség, fényhullám esetén a fénysebesség. Ismeretes, hogy az emberi fül számára (közelítően, kortól is függően) a 20Hz és 20kHz közötti frekvenciájú hangok hallhatóak. Az alacsonyabb frekvenciájú hangokat infrahangnak, a magasabbat ultrahangnak nevezzük.

Ha a hullámfüggvény vektormennyiséget ír le (a képletekben  $A$  helyett  $\vec{A}$  áll), a hullámokat két csoportba oszthatjuk: **transzverzális** hullámnál  $\vec{A}$  merőleges a terjedés irányára (ilyenek pl. a víz hullámok), **longitudinális** hullámnál egy egyenesbe esnek. Utóbbira példa, ha egy vékony rúd végére ráütünk a rúd hossz tengelye irányába mutató sebességgel, ekkor az

$\vec{A}$  mennyiségnek a részecskék egyensúlyi helyzetétől való kitérése felel meg, ez pedig a rúd hossz tengelyének irányába mutat, emellett a hullám is a rúd megütött végétől a másikig terjed, a két irány megegyezik.

Megjegyezzük, hogy léteznek **állóhullámok** is, amelyekre  $c=0$ . Azonban őket nem a fenti síkhullám függvény, hanem pl. a  $\sin(kx)\sin(\omega t)$  függvény írja le, és tipikusan visszaverődéskor keletkeznek. Állóhullámokkal a továbbiakban nem foglalkozunk.

## A Doppler-effektus

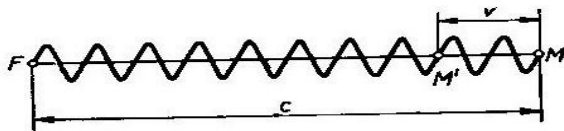
Christian Doppler (1803-1853) osztrák fizikus 1847 és 1849 között a Miskolci Egyetem jogelőd intézményében, a selmecebányai Bányászati és Erdészeti Akadémián a matematika, fizika és mechanika professzora volt.



Ha a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, akkor a megfigyelő a hullám frekvenciáját és hullámhosszát a kibocsátott hullámétól eltérőnek érzékeli. Ez az effektus, amely a felfedezőjéről a Doppler-effektus nevet kapta igen sok műszaki alkalmazásnak (pl. lézeres, radaros vagy ultrahangos sebességmérés) képezi alapját.

Mi itt most az akusztikai Doppler-effektussal foglalkozunk, erre mindenkinek lehet hétköznapi tapasztalata is. Például a közeledő vonat fütyét magasabbnak halljuk, mint amikor már távolodik tőlünk. Tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor a hangforrás, illetve megfigyelő sebessége az őket összekötő egyenesen van.

- a) a közegben nyugvó hullámforráshoz (F) képest  $v$  sebességgel mozgó megfigyelő (M) időegység alatt nemcsak az  $f$  számú rezgést fogja fel, hanem azokat is, amelyek a  $v$  hosszúságú szakaszra esnek ( $v/\lambda$ ).

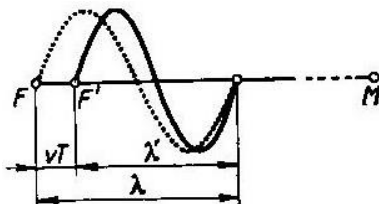


Ennek megfelelően a megfigyelő által észlelt frekvencia

$$f' = f(1 \pm \frac{v}{c})$$

ahol a + jel a közeledő, a – jel a távolodó megfigyelőre vonatkozik.

- b) Ha a hullámforrás mozog a közegben nyugalomban lévő megfigyelőhöz képest, akkor (közeledő forrás esetén) a rezgés első fázisát még távolabb bocsátja ki, mint (T idő múlva) az utolsó fázisát.



Ez az ábrán is mutatott módon a hullámhossz lerövidülését okozza

$$\lambda' = \lambda - v \cdot T,$$

amely a

$$f' = f \frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}$$

módosult frekvenciára vezet. Itt a – előjel a fenti esetre, a + pedig a távolodó forrásra vonatkozik

- c) a mozgó tárgyról visszaverődő hullámot detektálunk az álló hullámforrás mellett, akkor mindkét fenti képletet kell egyszerre alkalmazni. U. i. a mozgó tárgy az a) pont szerint detektálja az  $f'$ -t, majd az általa kibocsátott  $f''$ -t a b) pont szerinti képlettel kell átszámítani a detektált  $f''$  frekvenciát. A végeredmény közeledő visszaverő tárgy esetén:

$$f'' = f \frac{1+v}{1-\frac{v}{c}} \quad (6)$$

Megjegyzendő, hogy 1, a fenti képlet  $v \ll c$  esetén az  $f'' = f(1 + 2\frac{v}{c})$  képlettel közelíthető,

2, elektromágneses hullámok esetén nincs hullámzó közeg, csak relatív mozgás van, tehát az a) és b) eset nem különbözik. Ekkor mindkét esetre a

$$f' = f \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \quad (7)$$

képlet alkalmazandó. A (7) képlet kétszeri alkalmazása a (6) képletre vezet, tehát a  $v$  sebességgel mozgó tárgyról visszaverődő elektromágneses hullámok frekvenciáját a (6) képlet jól adja meg.

## A hang, a hallás fizikája

Fizikai értelemben a hang egy rugalmas közeg mechanikai rezgése, ami hullámok formájában tovaterjed. (Ennek nyilvánvalóan nem feltétele az, hogy bárki is legyen ott, aki ezt meghallja.) Elvben bármilyen halmazállapotú közegben terjedhetnek a mechanikai hullámok. Szilárd anyagokban transzverzális és longitudinális hullámok egyaránt lehetségesek. Folyékony és légnemű közegekben azonban – nyírófeszültségek hiányában – csak longitudinális hullámok lehetségesek. Az élőlények hangérzete a tartózkodási közegük – ami csak folyékony vagy légnemű lehet – rezgéseinek érzékelését jelenti. Ebben az értelemben **a hang longitudinális hullám**, a biofizikában így szokás tekinteni.

A fizikai hangteret annak időtartama, frekvenciája (tágabb értelemben a frekvencia spektruma) és intenzitása (hangerő) jellemzi. A longitudinális hullámban a közeget alkotó részecskék a hang terjedési irányában rezegnek, ami a közeg sűrűsödését/ritkulását okozza. Tehát **a hanghullámok** lényegében sűrűség-hullámok ill. ezzel arányos **nyomáshullámok**. Ezekben a hullámok amplitúdója (a légköri nyomáshoz képest) nagyon kicsi, halk beszéd esetén mPa – Pa között van, tehát a légköri nyomásnak alig egymilliomod része.

A hang magasságát annak frekvenciája határozza meg, a mély hangok frekvenciája kisebb, a magasaké nagyobb. Azokat a hangokat, amelyekben csak egy frekvencia van, tiszta hangoknak nevezzük. A gyakorlatban azonban szinte mindig összetett hangokkal találkozunk, amelyek többféle frekvenciát is tartalmaznak. Az ezekben előforduló frekvenciák szétválasztása Fourier-analízissel lehetséges, ennek eredménye a hang frekvencia spektruma.

A **hangintenzitás (hangerősség) (I)** az időegység alatt az egységnyi felületen merőlegesen átáramlott hangenergia mennyiségét jelenti, mértékegysége  $W/m^2$ . Ennek a mérőszáma SI-ben nagyon kicsi, normál beszéd esetén  $10^{-10}$ - $10^{-8}$  körüli érték. Gyakorlatban ezért inkább a **hangintenzitás szintet** használjuk, amelyben a hangintenzitást egy önkényes  $I_0$  alapszinthez viszonyítjuk, majd vesszük a hányados tízes alapú logaritmusának tízszeresét, képlettel:

$$L_I = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}.$$

Ennek mértékegysége a decibel (dB). A logaritmus képzést indokolja az a tapasztalat, hogy az érzékszerveink általában logaritmikusan működnek, tehát adott arányú intenzitás növekedések az agyban adott nagyságú érzetnövekedésként jelennek meg.

Az  $I_0$  alapszintnek  $10^{-12} W/m^2$  értéket szokás választani, mert ez a „hallásküszöb” 1000Hz frekvenciájú hang esetén.

Az emberi hallás anatómiája (dobhártya, hallócsontocskák, ovális ablak, csiga, szőrsejtek) és fiziológiája nem tárgya ennek a tantárgynak. A szőrsejtekben csak akkor képződik ingerület (**hallható hang**), ha a hang frekvenciája **16Hz és 20 kHz közé esik**. Ez alatt a frekvencia alatt infrahangról, felette **ultrahangról** beszélünk.

Az érzékelt hangosságot alapvetően a hang intenzitása szabja meg, de kisebb mértékben függ a hang frekvenciájától is. Az ábrán látható, hogy a **hallásküszöb**, tehát az a legkisebb hangerősség, ami a fülben már hangérzetet kelt, erősen frekvencia függő. Értéke 3kHz környékén a legkisebb. A **fájdalomküszöb**, amely a fülben már fájdalmat okoz, 110dB körül van.

