

Biofizika és egészségügyi műszaki alapismeretek (GEFIT307B)

2024/2025. tanév, II. félév

9. előadás

A hullámok fázissebessége

Az elektrodinamika egyenletei hullámegyenletté is alakíthatóak (bal oldalt):

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Ha ezt összehasonlítjuk az általános hullámegyenlettel egy tetsz. u mennyiségre (jobbra fent), akkor megkapjuk az elektromágneses hullám fázissebességét:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{amely vákuum esetén:} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{(a fény sebessége vákuumban)}$$

Ezt elméletileg Maxwell vezette le és vette észre a levezetett fázissebesség egyezését a megmért fénysebességgel. „Valószínűsíthető, hogy a fény (és a hőszugárzás) is egy a felírt törvények szerint az elektromágneses térben terjedő zavar” (1864).

Valamilyen nem ferromágneses szigetelő közegben:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

Itt n az adott közeg abszolút törésmutatója, ami megadja, hogy hányad részére csökken le a hullám (fény) sebessége a vákuumbeli sebességhez képest.

Monokromatikus síkhullám megoldás

Az előbbi homogén hullámegyenleteknek egyik lehetséges megoldásai a síkhullámok. Ha a **hullám forrásától elegendően messze** vagyunk akkor mindig tekinthetjük a hullámokat síkhullámoknak. Egy z irányba terjedő síkhullámra:

$$E_x = E_{x0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = E_{x0} \sin(\omega t - kz)$$

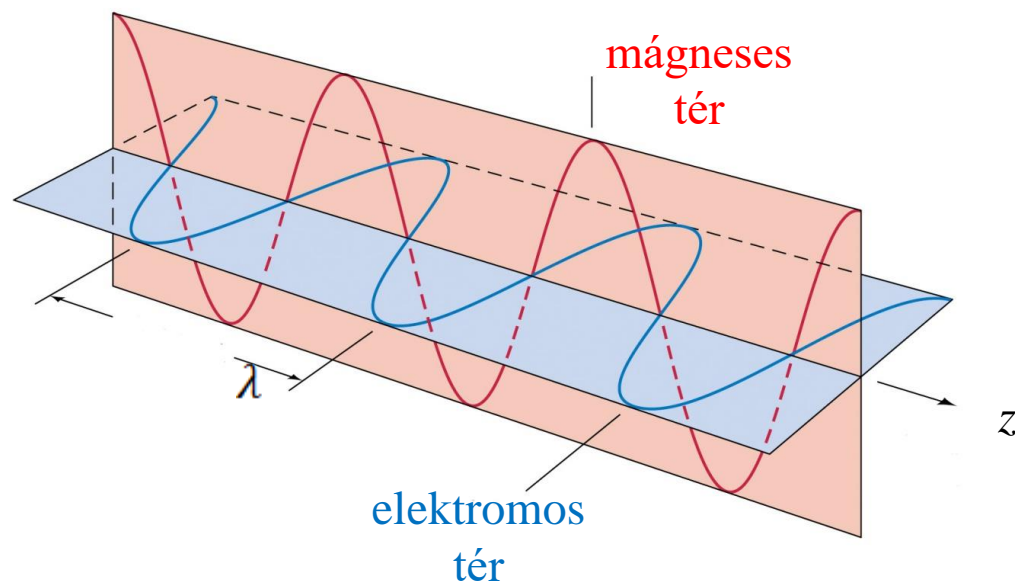
$$H_y = H_{y0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = H_{y0} \sin(\omega t - kz)$$

T : periódusidő λ : hullámhossz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{körfrekvencia}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(kör)hullámszám}$$

Ez a megoldás monokromatikus mivel csak egyféle frekvenciát tartalmaz.



Az elektromágneses hullámban \vec{E} és \vec{H} merőleges,
Továbbá \vec{E} , \vec{H} , és \vec{v} jobbsodrású rendszert alkot (itt x, y, z).

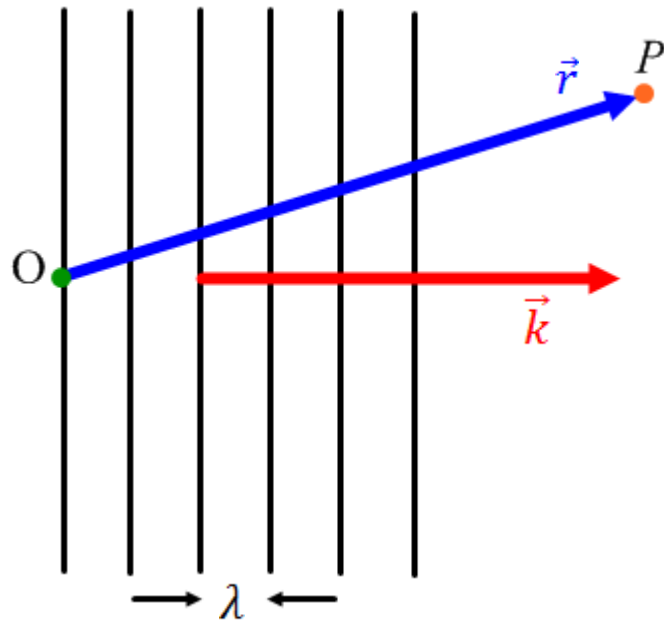
Az elektromágneses hullám **transzverzális**.

Az elektromos és mágneses tér egymással azonos fázisban van.

Tetszőleges irányba terjedő síkhullám

Általánosan a hullám terjedési irányát a körhullámszám vektor iránya jelöli ki (a sebesség iránya is ugyanaz). Az elektromos és mágneses térerősség a hely és idő függvényében:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$



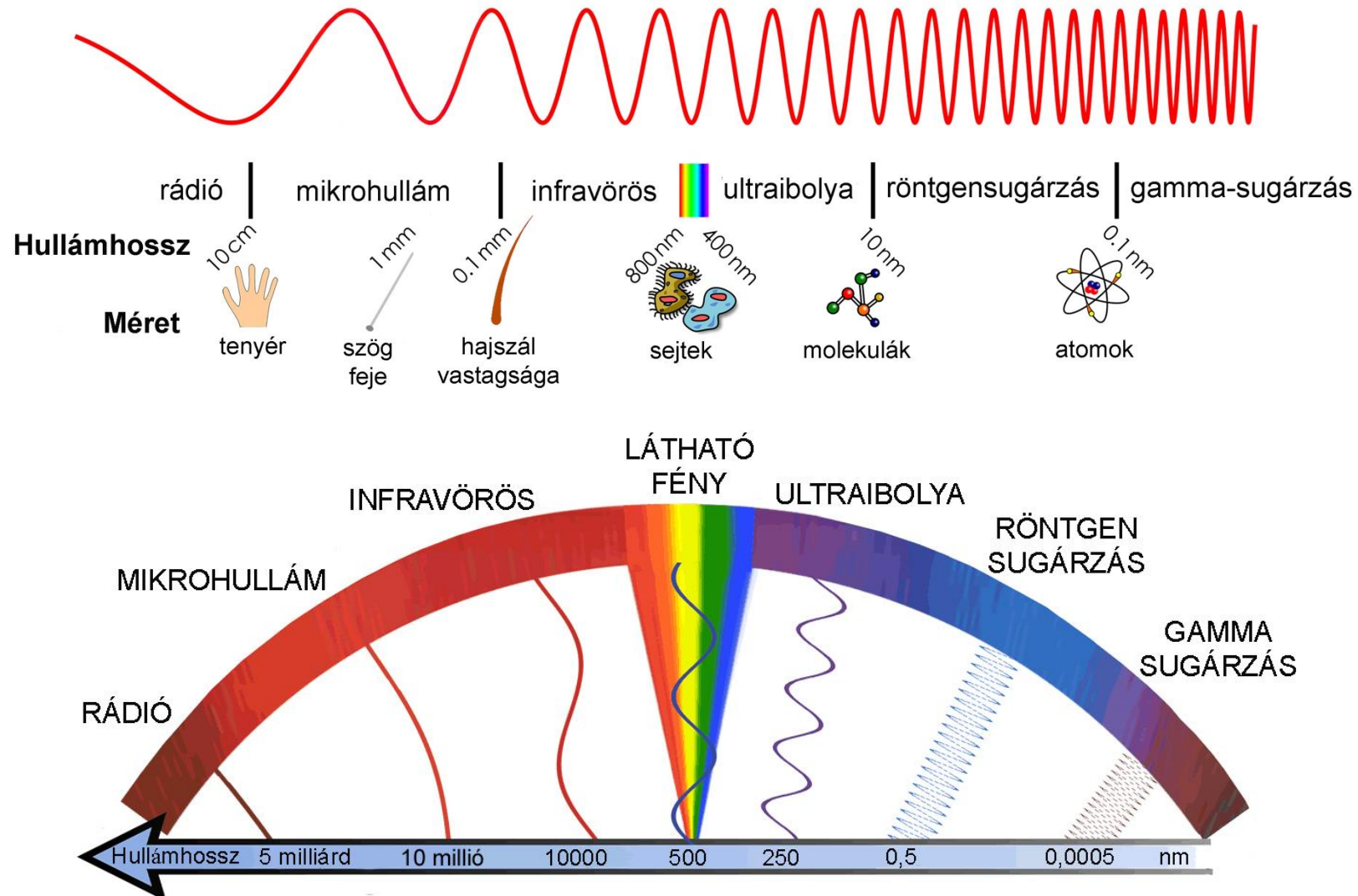
Térben az azonos fázisban lévő pontok halmaza egymást hullámhossznyi távolságonként követő síkok.

Általában az elektromágneses hullám sok különböző frekvenciájú hullámból tevődik össze. A különböző frekvenciák arányát mutatja az elektromágneses hullám spektruma (színképe).

Ha a hullámhossz nagyjából 400 és 800 nm között van, akkor a hullám a látható tartományba esik.

A teljes elektromágneses színekép

Az elektromágneses hullám hullámhossza (frekvenciája, vagy energiája) több nagyságrenden keresztül változhat. A látható tartomány (fény) ennek csak nagyon kis része:



Energiaterjedés az elektromágneses hullámban

Az elektromágneses hullám terjedése során energia is áramlik. Az energiatervedés iránya ugyanaz mint a hullám iránya, és a pillanatnyi energia-áramsűrűséget egy pontban a **Poynting-vektor** adja meg:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\vec{S}] = \frac{\text{V A}}{\text{m m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Egy tetszőleges felületen átáramló pillanatnyi teljesítmény tehát: $P(t) = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{A}$

Az elektromágneses tér energiasűrűsége: $w_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

Az elektromos és mágneses tér fázisa megegyezik, és az általuk tárolt energia is:

$$\frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad \rightarrow \quad \text{a csúcsértékekre: } \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \quad \rightarrow \quad H_0^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} E_0^2$$

Tehát a Poynting-vektor kifejezhető csak az egyik térerősséggel:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = EH\vec{e} = \vec{e}E_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) H_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \\ & \vec{e}E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{e} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{a hullám terjedési} \\ \vec{e} \text{ irányába mutató} \\ \text{egységvektor} \end{array}$$

$$\text{Emellett írható még: } \vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \vec{e} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu}} \varepsilon E^2 \vec{e} = v \varepsilon E^2 \vec{e} = v w_{EM} \vec{e} = w_{EM} \vec{v}$$

Energiaterjedés az elektromágneses hullámban/2

Tekintsük az

$$\vec{S} = w_{EM} \vec{v} \quad \text{összefüggést!}$$

Tűző napon (délben, nyáron) a Föld felszínén legyen a Nap fényének intenzitása $I=1200\text{W/m}^2$

Ebből kiszámítható, hogy $w_{EM} = I/c = 1200/(3 \cdot 10^8) = 4\mu\text{J/m}^3$. Megjegyzendő, hogy ez számértékileg egyezik a fény nyomásával $p_f = 4\mu\text{Pa}$ (fekete felület esetén) ($\text{J/m}^3 = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$)

Az elektromágneses tér energiasűrűsége: $w_{EM} = \varepsilon E^2$ alapján igaz-e az, hogy a napfényben az elektromos térerősség átlagértéke $E = (w_{EM}/\varepsilon) = ((4 \cdot 10^{-6})/(8,85 \cdot 10^{-12}))^{1/2} = 672 \text{ V/m}$?

Természetesen nem, mert a napfényben a fotonok térerőssége „össze-vissza” áll, az átlaguk ezért nulla!

A számítás viszont igaz a koherens lézerfényre!

Koherens hullámok interferenciája

Az energia-áramsűrűség nagyságának időátlagát a hullám intenzitásának nevezzük:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{2}$$

Ha két egyenlő frekvenciájú, egymásra nem merőleges síkokban rezgő hullám a tér egy részében úgy találkozik, hogy a fázisuk közötti különbség huzamosabb ideig állandó akkor abban a térrészben állóhullám jön létre.

Az ilyen hullámokat **koherens** hullámoknak nevezzük, a megfigyelhető jelenség pedig az **interferencia**.

Legyen a két hullám: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$ $\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$

Az eredő térerősség minden pontban és időben a két térerősség vektori összege:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$$

Az eredő térerősség négyzete: $E^2 = \vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

Az interferencia tag

A két koherens hullám által létrehozott intenzitás:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_1^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_2^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{10}^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{20}^2}{2}}_{I_2} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}}$$

Az interferencia tag:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) \rangle \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \end{cases} +$$

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} [\cos(2\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \delta)] \rangle$$

Az első tag időátlaga 0, másodiké önmaga, hisz az időtől független:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - \delta] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[\Delta\varphi] \quad \Delta\varphi: \text{fáziskülönbség}$$

Speciális eset: $\vec{E}_{10} = \vec{E}_{20} = \vec{E}_0$ tehát $I_1 = I_2 = I$ konstruktív és destruktív interferencia:

$$I_k = I + I + 2I = 4I \quad (\Delta\varphi = 0)$$

$$I_d = I + I - 2I = 0 \quad (\Delta\varphi = \pi)$$

Interferencia tehát akkor van, ha az eredő hullám intenzitása nem egyenlő a két rész hullám intenzitásának az összegével

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad \text{ahol } I_{12} \neq 0$$

Az interferencia feltételeinek (koherencia feltételek) összefoglalása:

- 1) $\omega_1 = \omega_2$, azaz a két hullám frekvenciája azonos, Mi van ha csak majdnem egyenlő?
- 2) $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \neq 0$, azaz a két hullám térerősség-vektora nem merőleges egymásra,
- 3) $\varphi_{01} - \varphi_{02} = \text{állandó}$, azaz a hullámvonulatok kezdőfázis-különbségei időben állandók,
- 4) $\Delta s < \sigma_k$, azaz a két úton haladó fényhullám útkülönbsége kisebb, mint a koherenciahossz.

Megjegyzés: hanghullámok esetén csak az 1) feltétel, rádióhullámok esetén 1) és 2) feltétel kell, a fény esetében bonyolódik el a helyzet!

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \cdot \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cdot \cos \delta$$

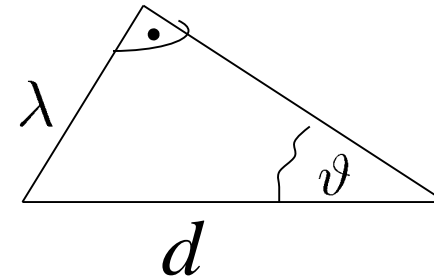
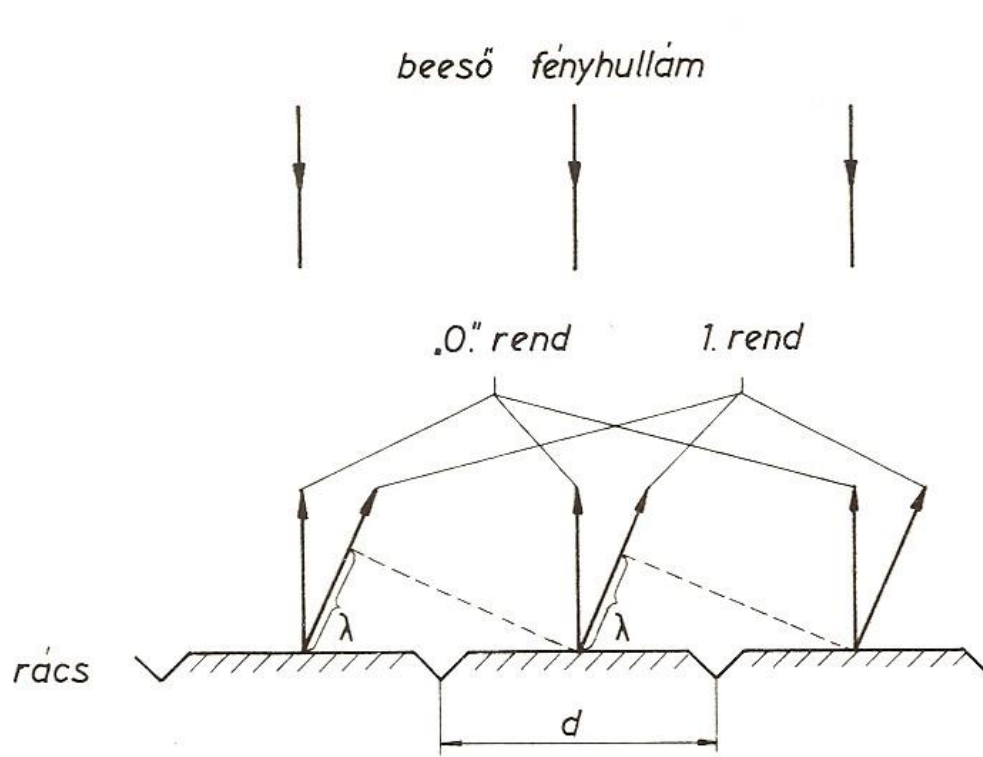
A fentiek a hullámhossz segítségével is megfogalmazhatók: a fáziskülönbség $\delta = k_2 x_2 - k_1 x_1 + \delta_{01} - \delta_{02}$, ha $\delta_{01} = \delta_{02}$ és $k_1 = k_2 = k$, akkor: $\delta = k \cdot (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x$. Tehát ha a két hullám között a szétváláskor nem jött létre fáziskülönbség, és szétválás után is azonos közegben haladnak, akkor a fáziskülönbség az útkülönbséggel arányos, az arányossági tényező $\frac{2\pi}{\lambda}$. Ennek megfelelően maximális az erősítés, ha az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse:

$$2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \rightarrow \Delta x = \lambda \cdot m, \quad m - \text{egész szám.}$$

Maximális gyengítés (esetleg kioltás) pedig a hullámhossz felének páratlan számú többszöröseivel

megegyező útkülönbség esetén lesz: $(2m+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \rightarrow \Delta x = (2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$.

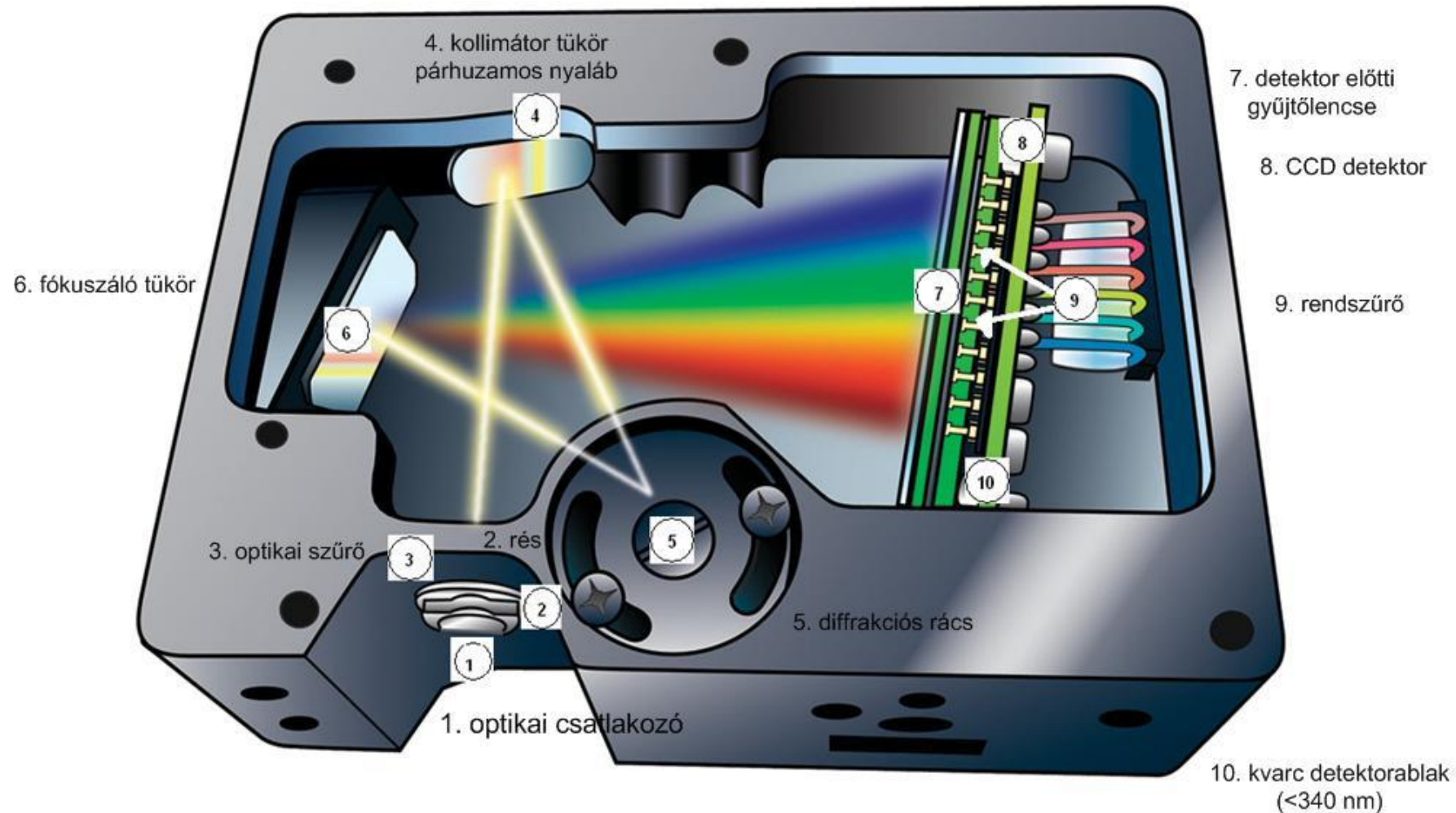
Fontos példa az interferenciára



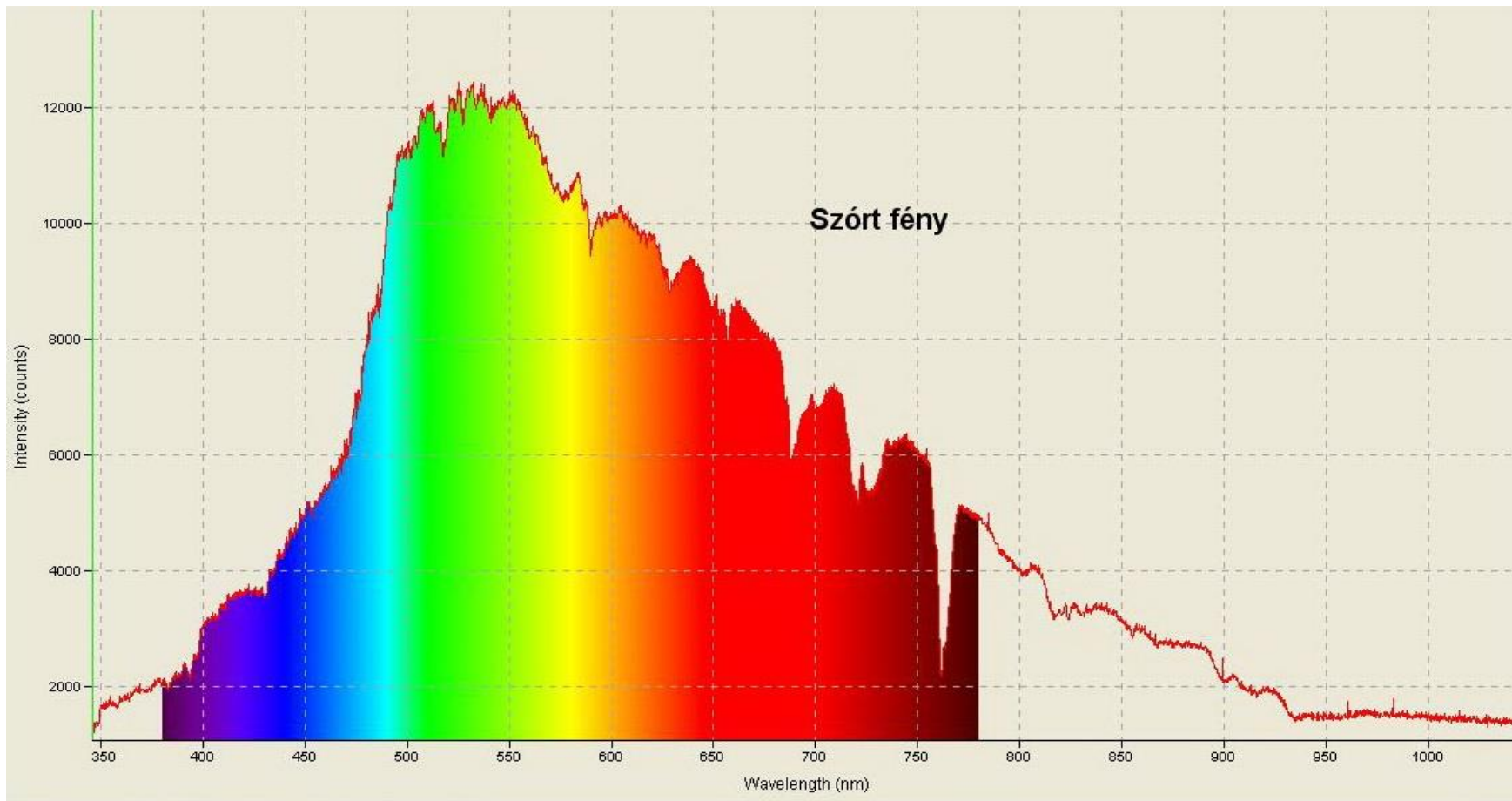
$$\frac{\lambda}{d} = \sin \vartheta$$

A **reflexiós optikai rács** periodikus szerkezetén a fénycsugár elhajlást szenved. (Azaz azokba az irányokba is van reflexió, amelyekre a szomszédos hullámok útkülönbsége λ .)

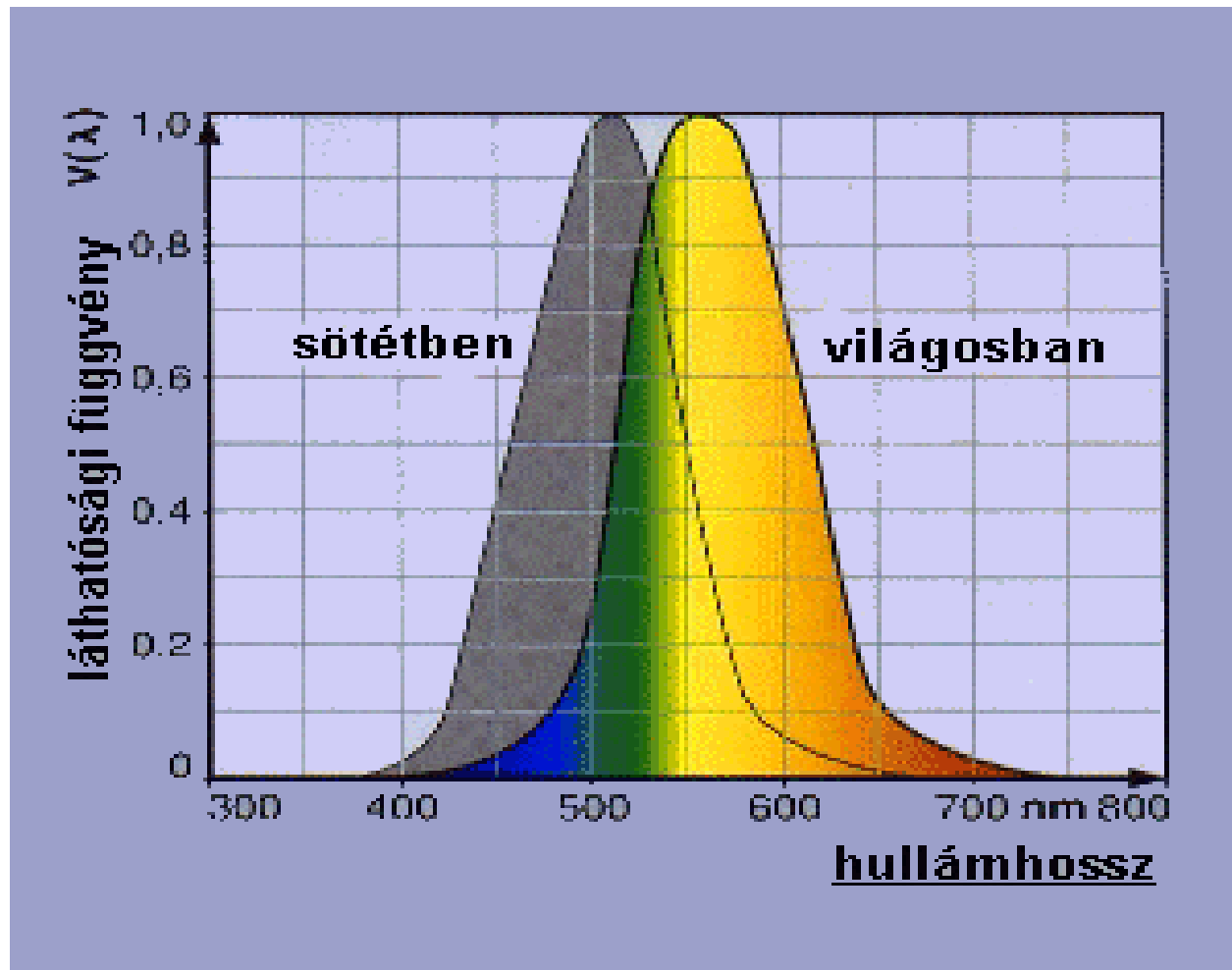
USB4000 száloptikás spektrométer



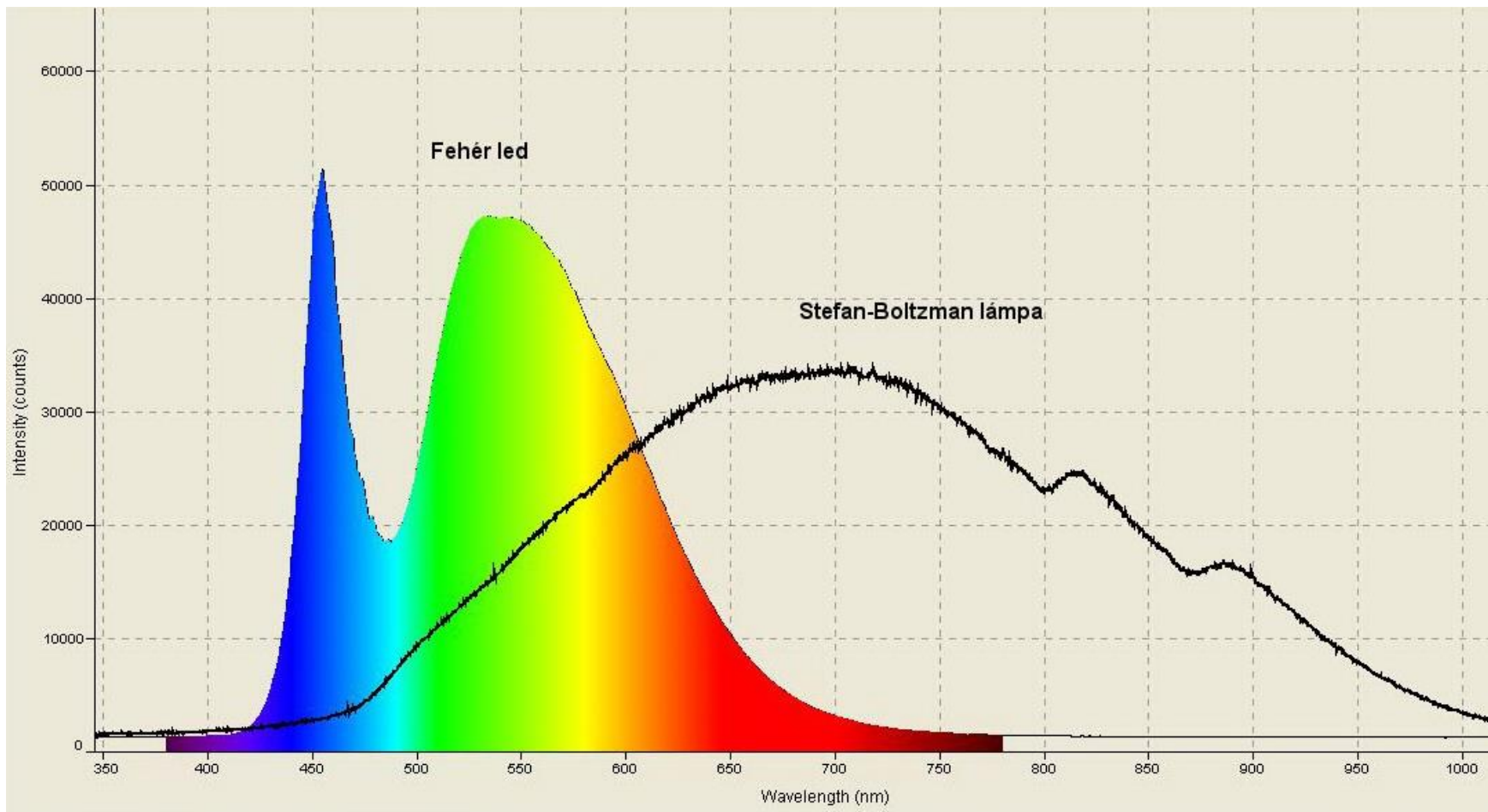
25 mikrométeres rés, 7,5 pixeles felbontás
3648 pixel, 650 nm-es tartomány, 1,336 nm-es felbontás



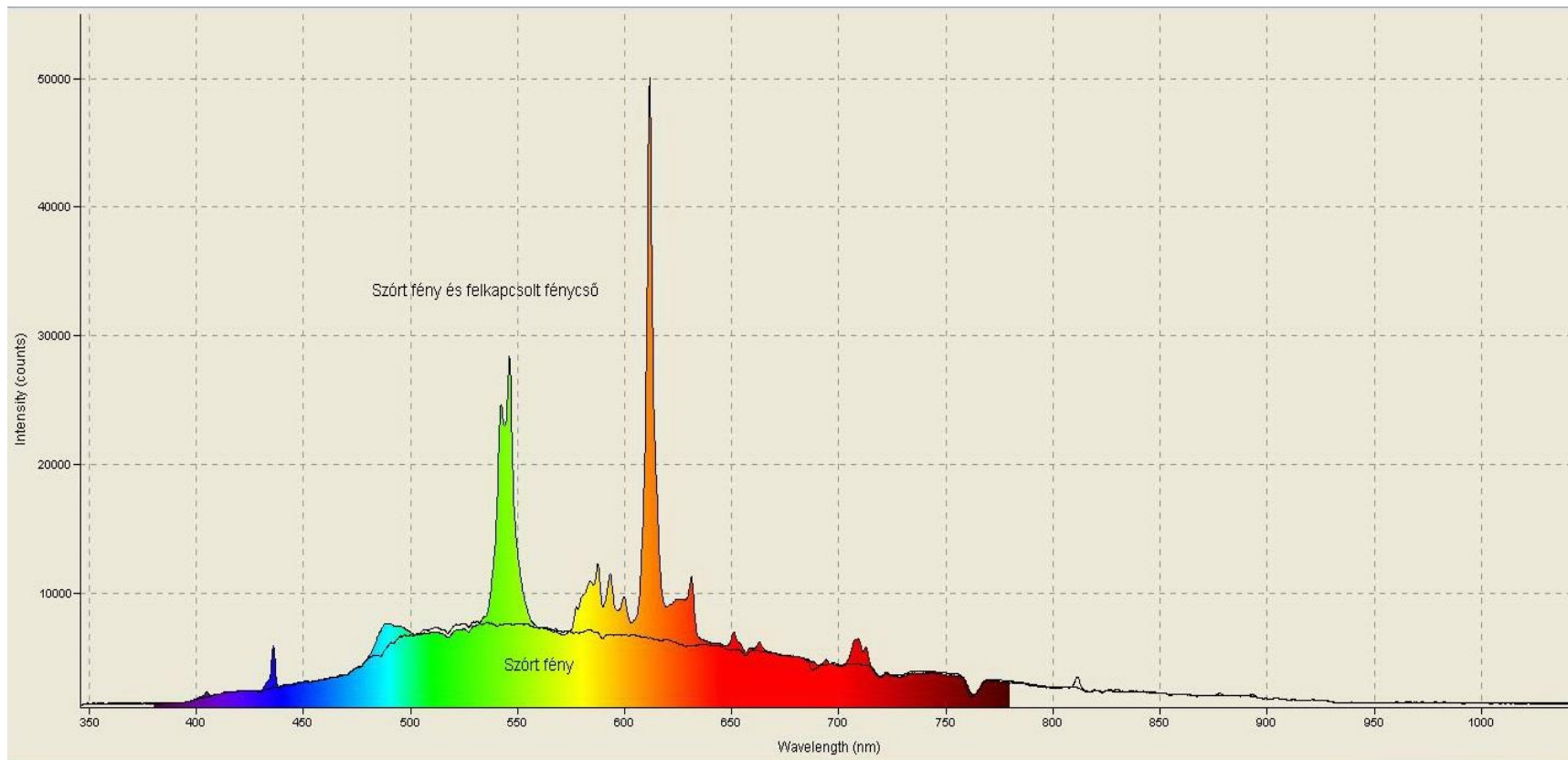
A laboratóriumba az ablakokon át **beszóródott napfény** spektruma.
A spektrum burkolója egy kb. **5800 K-es feketetest sugárzáshoz** tartozó görbe.
De a burkolót megszagatják mind az ún. Fraunhofer vonalak (ezek a Nap felszínét elhagyó sugárzásban megjelenő elnyelési vonalak), valamint a Föld atmoszférájában lévő gázok által okozott abszorpciók.



Az átlagember
szemének relatív
érzékenysége



A **LED-ek spektruma folytonos**, de sokkal keskenyebb az izzó szilárd testek spektrumánál. A LED-ek összetételének, paramétereinek változtatásával megváltoztathatjuk spektrumukat is.



Igen látványos spektrumot kaphatunk abban az esetben, ha a **szórt napfény mellett felkapcsoljuk a terembeli világítást.**

A kisnyomású Hg-lámpákat gyakran fénycsőnek hívjuk, ezekben a csövekben általában két ultraviolet tartományba eső vonal gerjed a **185 nm-es és 257,3 nm-es**. Ezeket UV-be eső sugárzásokat konvertálja a fénycső belső falára felvitt fénypor a látható tartományba.

Vékonyréteg-interferencia

Konstruktív interferencia: $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ ($m = 0, 1, \dots$)

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (n_3 > n_2 > n_1)$$

$$\varphi_1 = k_1 \overline{AD} + \pi \quad *$$

$$\varphi_2 = k_2(\overline{AB} + \overline{BC}) + \pi \quad *$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_2}(\overline{AB} + \overline{BC}) - \frac{2\pi}{\lambda_1} \overline{AC} \sin \theta_1$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_1 n_1} \left(\frac{2d}{\cos \theta_2} \right) - \frac{2\pi}{\lambda_1} \overline{AC} \sin \theta_1$$

Közelítőleg merőleges beesésnél:

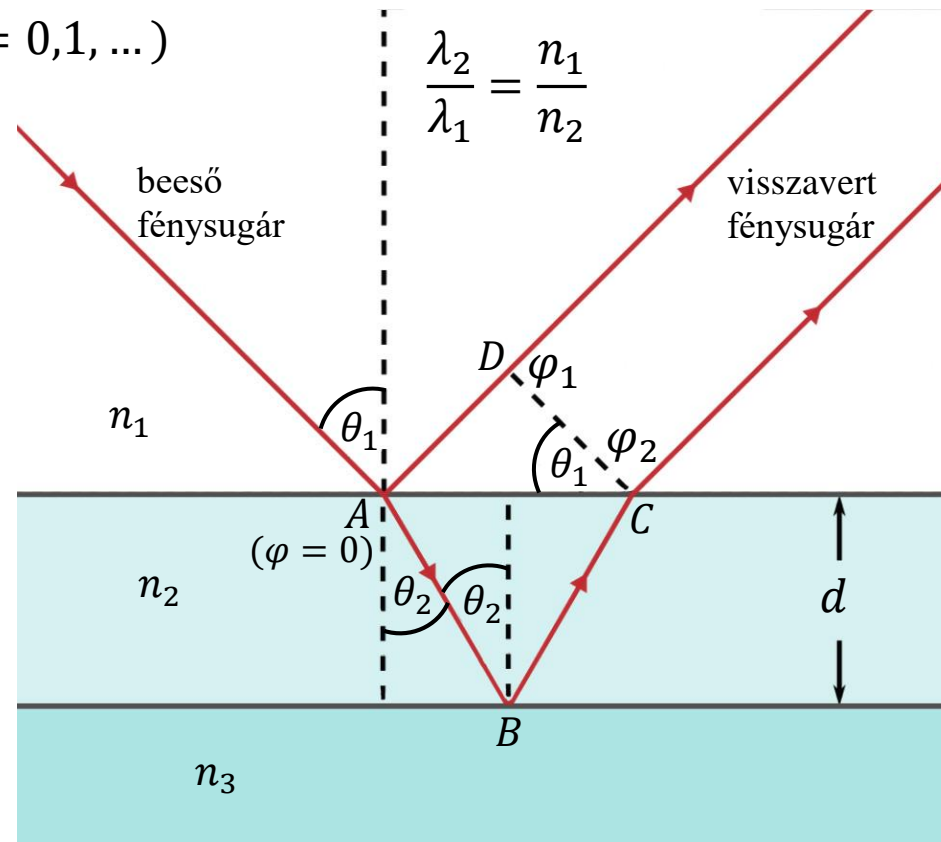
$$\cos \theta_2 \approx 1 \quad \sin \theta_1 \approx 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_1 n_1} \cdot 2d = m \cdot 2\pi$$



$$\frac{n_2}{\lambda_1 n_1} \cdot 2d = m$$

$$\frac{n_2}{n_1} \cdot 2d = m \lambda_1$$



Ha az 1-es közeg levegő: $n_1 \approx 1$, $\lambda_1 \approx \lambda$, $n_2 = n$

$$\boxed{n \cdot 2d = m\lambda} \quad (\text{optikai úthossz: } s_0 = n \cdot l)$$

* Amikor a hullám optikailag **sűrűbb** közegről verődik vissza, akkor π fázisugrást szenved! Ha csak az egyiknél sűrűbb, akkor ez pont a gyengítés feltétele lenne!

Polarizáció

Általános esetben az \vec{E} vektor (és így a rá merőleges \vec{B} vektor is) forog az \vec{n} vektor körül, miközben a vetületei leírhatók a fenti módon. Ilyenkor a térerősség-vektor végpontjának a terjedési irányra merőleges vetülete egy ellipszist ír le. Ezt a fényt szokás elliptikusan polárosnak nevezni. Ez az általános eset, a természetes fény polarizációja általában ilyen. Ennek egy speciális esete a cirkulárisan poláros fény, ekkor a térerősség-vektor végpontjának vetülete egy kört ír le.

Az ellipszis másik elfajulása az egyenes. Ilyenkor a térerősség-vektor végpontjának vetülete egy egyenes mentén mozog (a rezgés síkja állandó). Az ilyen fényt lineárisan polárosnak (vagy síkban polárosnak) nevezzük. Az elliptikusan poláros fényt felfoghatjuk két egymásra merőleges polarizációjú, egymáshoz képest eltolt fázisú lineárisan poláros fény szuperpozíciójának is.

Amikor egyszerűen poláros fényről beszélünk, akkor legtöbbször lineárisan poláros fényre gondolunk. A lézerek többsége poláros fényt bocsájt ki, a többi fényforrás fénye pedig különböző módszerekkel (szórás, visszaverődés, stb.) polárossá tehető.

