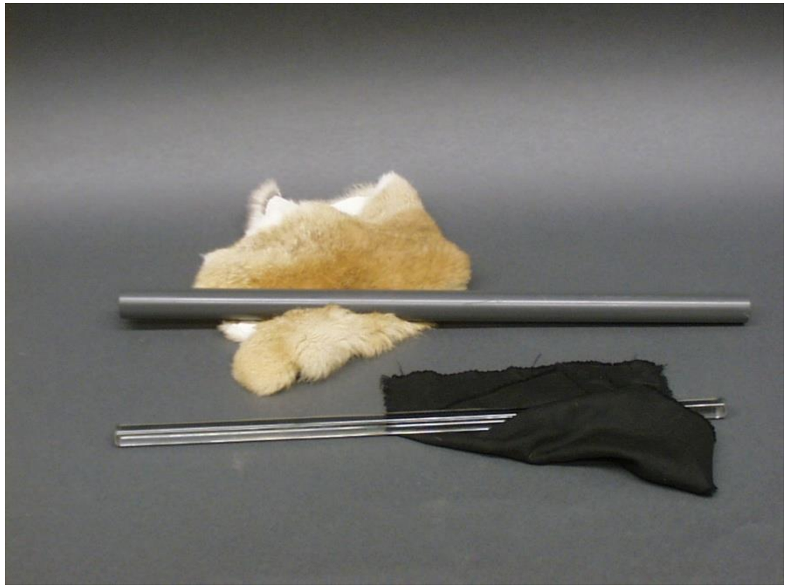
Biofizika és egészségügyi műszaki alapismeretek (GEFIT307B)

2022/2023. tanév, II. félév

7. előadás

Elektrosztatikai jelenségek



Ebonit vagy üvegrudat megdörzsölve az apró tárgyakat magához vonz.

Két selyemmel megdörzsölt üvegrúd között taszítás, üvegrúd és gyapjúval megdörzsölt borostyánkő között vonzás lép fel.

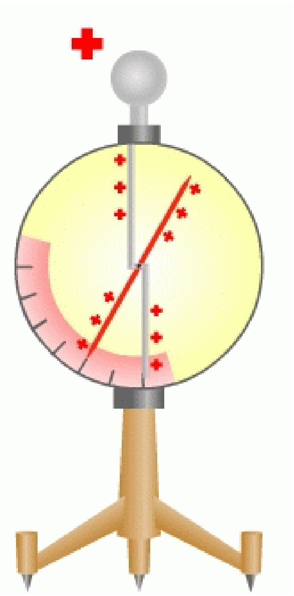
Kétféle elektromos állapot.

Megdörzsölt üvegrúd pozitív.
Borostyán negatív.

Elektromos töltés: milyen mértékben vesz részt egy test az elektromos kölcsönhatásban.
Jele: Q SI mértékegysége: C (coulomb)

Egynemű töltések között taszítás, ellenkező neműek között vonzás.

Elektromos töltések szétválasztása



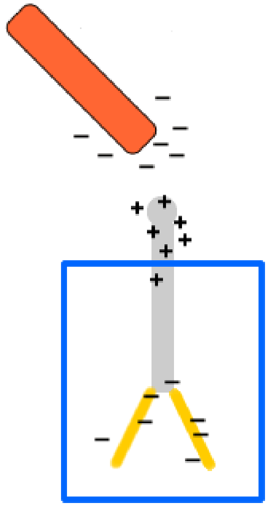
elektroszkóp

Semleges test: pozitív és negatív töltések egyenlő mértékben vannak jelen.

A töltés **megmaradó mennyiség**, viszont szétválasztható. Elektromos megosztás, vagy influencia.

Vezetők: a töltések szabadon elmozdulhatnak.
(pl. fémek; sók, savak, bázisok vizes oldatai)

Szigetelők: a töltések csak néhány nanométert mozdulhatnak el.
(polarizáció). (pl. kvarc, gumi, ebonit, porcelán)



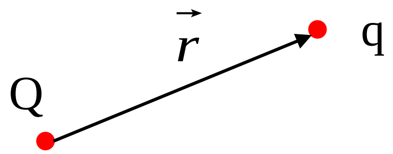
A töltések fizikai kontaktus során átvihetők egyik testről a másikra.
Vezető esetén a töltés szétterjed a test teljes felületére.

Töltött test közelében lévő fémben a töltések megoszlanak.

Coulomb törvény

Inerciarendszerben nyugvó, pontszerű elektromos töltésekre:

q: próbatöltés



$$\vec{F}_q = k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$$

k: Coulomb állandó

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \text{ ahol}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

a vákuum permittivitás, vagy a vákuum dielektromos állandója.

Mivel a q-ra ható erő csak a helytől függ az erőtér konzervatív.

Newton 4. axiómája:
Bármely töltéselrendezés erőtere is konzervatív.

$$\vec{F}_e = \sum_i \vec{F}_i$$

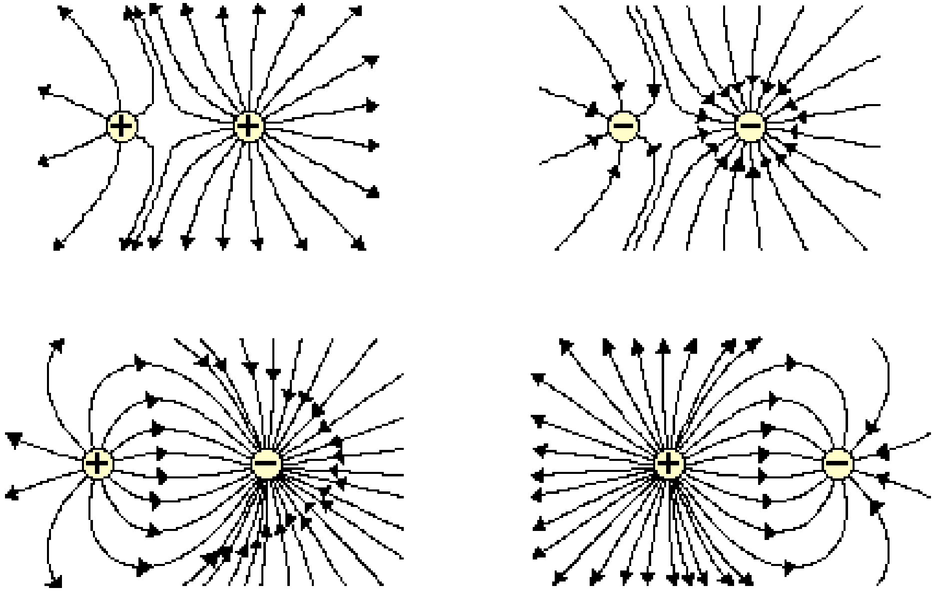
Az elektromos térerősség

Az **elektromos térerősség** a próbatöltéstől független, egy P pontban csak a teret jellemző mennyiség:

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_q(P)}{q} \qquad \text{Mértékegysége: } \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \text{ vagy } \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Térerősség érzékeltetésére az erővonalakat használjuk
- iránya a vonalakkal párhuzamos minden pontban
- nagysága a vonalak sűrűségével van jelölve
- pozitív töltésekről indulnak, negatív töltéseken végződnek

Szuperpozíció: két vagy több töltés esetén a térerősség az egyes töltések által létrehozott térerősségek vektori összege.



A q-ra ható eredő erő :

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$
$$q\vec{E} = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \cdots + q\vec{E}_N$$
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N$$

Elektromos feszültség

Az elektrosztatikus tér munkája a *q* próbatöltésen a $\Delta\vec{r}$ elmozdulás során:

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = q\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

$\Delta\vec{r}$ olyan kicsi, hogy ezalatt az $\vec{F}$ erő nem változik. Nagyobb elmozdulások esetén a kisebb szakaszokon végzett munkákat összegezni kell!

A **feszültség** az egységnyi próbatöltésen végzett munka:

$$U = \frac{W}{q} = \vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

Mértékegysége a volt (V) (=J/C)

Homogén térben, azzal egyirányú *d* elmozdulás esetén: $U = Ed$

Az elektromos feszültség csak a térre és a két pontra jellemző mennyiség.

Konzervatív erőtérben a tér által az *A* és *B* pontok között végzett munka megegyezik a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével:

$$W_{AB} = E_p(A) - \cdot E_p(B)$$

Az egységnyi pozitív töltésre jutó potenciális energia a **potenciál**:

$$U_A = \frac{E_p(A)}{q}$$

Két pontban vett potenciálok különbsége a két pont közötti feszültség: $U_A - U_B = U_{AB}$

Az elektrosztatikus tér I. alaptörvénye

Mivel az elektrosztatikus tér konzervatív, az általa bármely zárt görbe mentén végzett munka nulla:

$$W_O = \sum_{\text{zárt}} \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

q-val végigosztva:

$$\sum_{\text{zárt}} \vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

Bármely zárt görbén végighaladva a feszültségek ($\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}$) előjeles összege nulla.

Ez az **elektrosztatikai tér I. alaptörvénye.** Az elektrosztatikus tér örvénymentességét fejezi ki.

Később ezt a törvényt áramköri hurokra alkalmazva kapjuk majd a Kirchhoff-féle huroktörvényt. Bármely zárt áramhurkon végighaladva a potenciálváltozások (feszültségek) előjeles összege nulla.

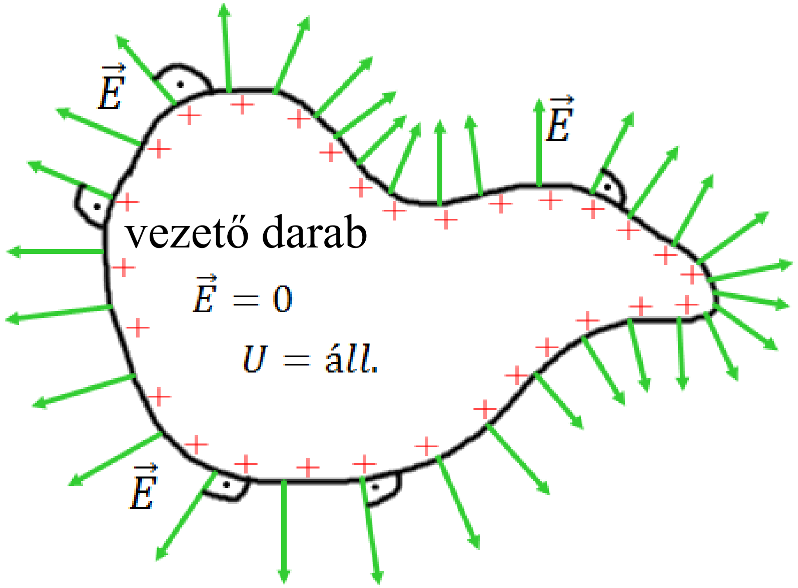
$$\sum_i U_i = 0$$

Vezetők elektrosztatikus térben

Vezető: a töltések szabadon elmozdulhatnak

Ha a vezető belsejében a térerősség nem lenne nulla akkor áram folyna.

Ha a felületen a térerősségnek lenne tangenciális (párhuzamos) komponense
akkor a felület mentén áram folyna.



<u>Egyensúly esetén (elektrosztatika)</u>

- vezetőben a térerősség nulla
- a vezető egész térfogata ugyanolyan potenciálon van (ekvipotenciális)
- a vezető felületén a térerősség merőleges a vezető felületére
- a többlettöltés a vezető felülete mentén oszlik el
- minél hegyesebb egy felületdarab annál nagyobb ott a töltéssűrűség - térerősség

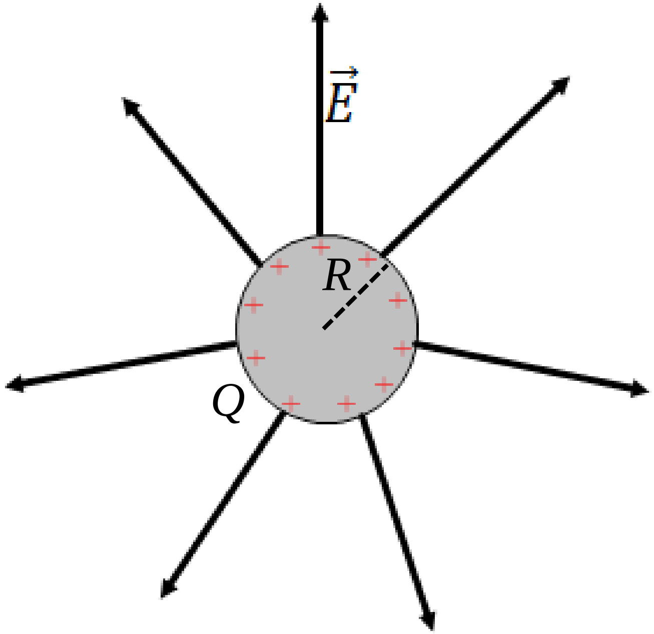
<u>Csúcshatás</u>: kellően hegyes ponton olyan nagy lehet a térerősség, hogy a töltések kilépnek a fémből.

Kapacitás

<u>Kapacitás:</u> az a mennyiség amely jellemzi, hogy egy bizonyos Q töltés szétválasztása mekkora potenciálkülönbséget (feszültség) eredményez a $+Q$ és $-Q$ között.

Vezetőt körülvevő tér erőssége egyenesen arányos a rajta lévő töltéssel.
Emiatt a vezető potenciálja is arányos a töltéssel, az arányossági tényező a kapacitás:

$$C = \frac{Q}{U} \qquad [C] = F\,(\text{farad})$$



<u>Magányos gömb kapacitása:</u>

gömbszimmetria miatt – ponttöltésre érvényes képlet használható U-ra

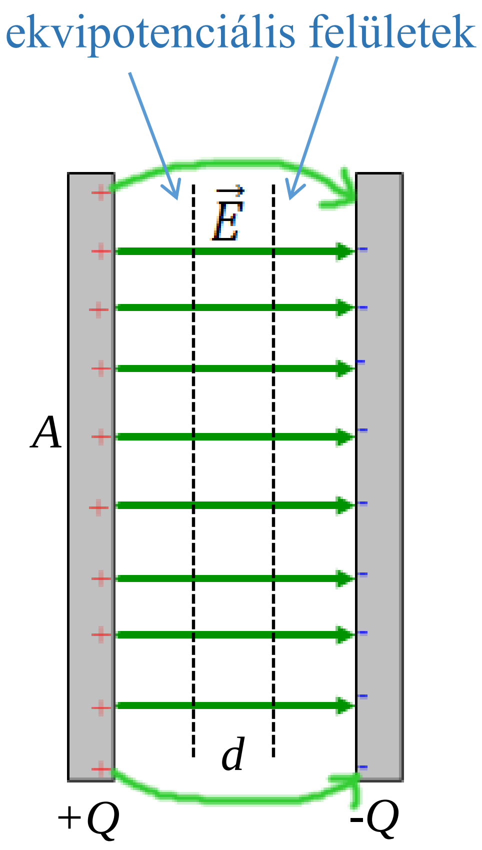
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{k\frac{Q}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Ez nagyon pici, de ha az ellentétes töltést nem visszük a végtelenbe hanem közel marad akkor sokkal nagyobb lesz a kapacitás, mivel a feszültség így sokkal kisebb!

Kondenzátor

A szétválasztott töltések tárolása egymáshoz közel történik – kis feszültség – nagy kapacitás.

- párhuzamos lemezek (síkkondenzátor)
- koncentrikus gömbök
- koaxiális hengerek



<u>Síkkondenzátor</u>

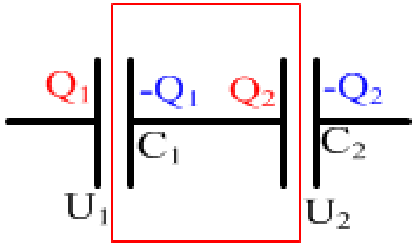
- A fegyverzetek mérete sokkal nagyobb mint a köztük lévő távolság (*d*).

- végtelen síkoknak tekinthetők
- a térerősség a lemezek között homogén és azokra merőleges.
- az ekvipotenciális felületek a lemezekkel párhuzamosak.

$$C = \frac{Q}{U} \qquad\qquad Q = CU = CEd$$

Kondenzátorok kapcsolásai*

soros kapcsolás eredő kapacitása C_{12}



Jobbról és balról szakadás - középen lévő darab ösztöltése feltöltés előtt és után is nulla (piros téglalap) $Q_2 - Q_1 = 0$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

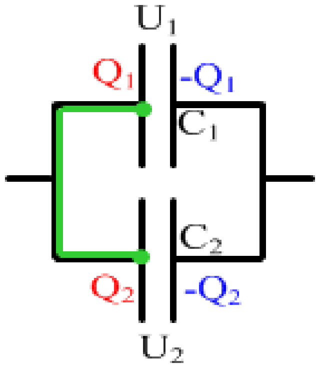
A feszültség összeadódik:

$$U = U_1 + U_2$$

$$\frac{Q}{C_{12}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

párhuzamos kapcsolás eredő kapacitása C_{12}



A kondenzátor megfelelő lemezei vezetővel vannak összekötve. (zöld vonal, de a másik két lemez is) Ezért azonos potenciálon vannak és

$$U_2 = U_1 = U$$

A töltés összeadódik:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

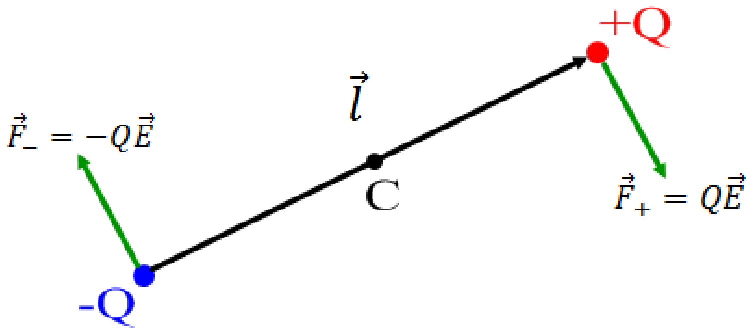
$$C_{12}U = C_1U + C_2U$$

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

Elektromos dipólus

Egy pozitív és egy negatív töltésből áll melyek egymástól *l* távolságra vannak rögzítve.

<u>Dipólusmomentum:</u> $\vec{p} = Q\vec{l}$



Dipólusra ható eredő erő homogén térben:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_- + \vec{F}_+ = -Q\vec{E} + Q\vec{E} = 0$$

Dipólusra ható eredő forgatónyomaték (a C pontra) homogén térben:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_{C-} + \vec{M}_{C+} = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = -\frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_- + \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_+$$

$$= -\frac{\vec{l}}{2} \times \left(-Q\vec{E}\right) + \frac{\vec{l}}{2} \times Q\vec{E} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

A dipólust a tér vele egy irányba igyekszik befordítani – stabil egyensúlyi helyzet
Ha a dipólmomentum párhuzamos a térrel, de ellentétes irányú – labilis egyensúly

Polarizáció

Töltés-középpont: $\vec{r}_{tkp} = \frac{\sum Q_i \vec{r}_i}{\sum Q_i}$

Apoláros molekulák: a + és a – tkp. egybeesik
(pl. H_2 és O_2)
Poláros molekulák: a + és a – tkp. nem esik egybe
(pl. HCl és H_2O)

Indukált polarizáció: Az elektromos tér széthúzza a töltés-középpontokat.

Orientációs polarizáció: Az elektromos tér a poláris molekulák által alkotott dipólusokat a tér irányába beforgatja (alacsonyabb hőmérsékleten számottevőbb a hatás).

Az elektromos polarizáció vektor: Egy dielektrikum *A* pontja körüli kicsiny térfogatban található molekulák dipólusnyomatékának eredője.

$$\vec{P}(A) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \qquad [\vec{P}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Az anyagok nagy részére a polarizáció egyenesen arányos a térerősséggel:

$$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$$

κ: elektromos szuszceptibilitás

Elektromos indukcióvektor

<u>Elektromos indukcióvektor:</u> felhasználva a térerősséget és a polarizáció vektort

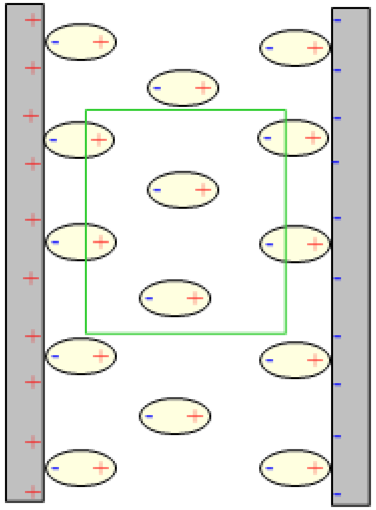
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad [\vec{D}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Lineáris közelítéssel: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\kappa) \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

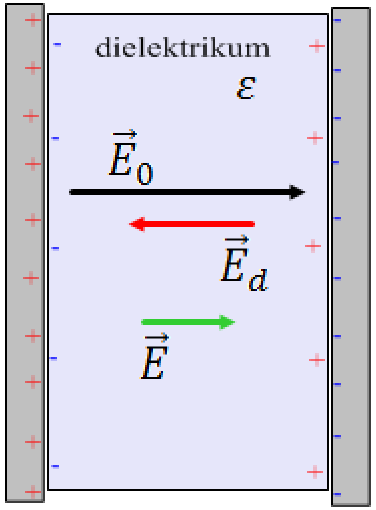
ε_r és ε a relatív, illetve az abszolút permittivitás

<u>Dielektrikumok használata:</u>



$\vec{E}_0$ ilyen tér lenne vákuumban

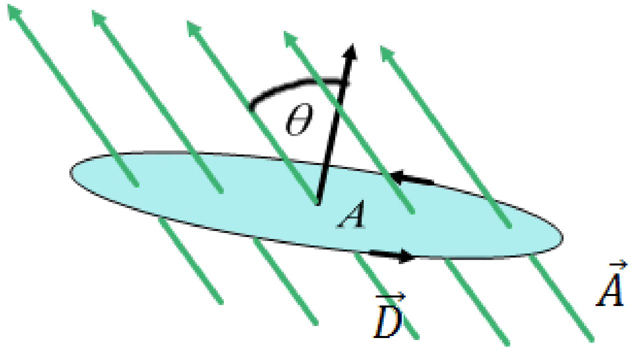
$\vec{E}_d$ ilyen teret okoz a dielektrikum



$\vec{E}$ ez lesz az eredő a dielektrikumban

Elektromos fluxus

<u>Elektromos fluxus:</u> Megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát.



Ha az indukció a felület mentén homogén: $\psi = DA\cos\theta = \vec{D}\cdot\vec{A}$

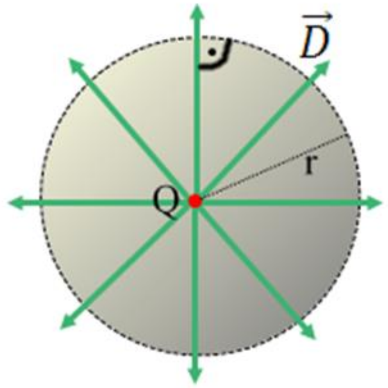
Ha nem homogén az indukció akkor a felületet kicsi darabokra bontjuk és a járulékokat összegezzük.

Az elektrosztatika második alaptörvénye

Számítsuk ki az elektromos fluxust egy gömb felszínére, úgy hogy a Q töltés a gömb közepén van!

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \qquad D = \varepsilon_0\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$

Mivel és párhuzamos és a gömb felszíne $4\pi r^2$, ezért a fluxus



$$\Psi = \frac{Q}{4\pi r^2}4\pi r^2 = Q$$

Bármilyen felületre igaz: zárt felületre vett elektromos fluxus egyenlő a felületben foglalt töltéssel. Ez az elektrosztatika II. alaptörvénye

Dielektrikumok esetén is igaz, a kémiai anyag jelenléte az elektromos indukciót nem befolyásolja, mert annak forrásai csak a valódi (szabad) töltések.

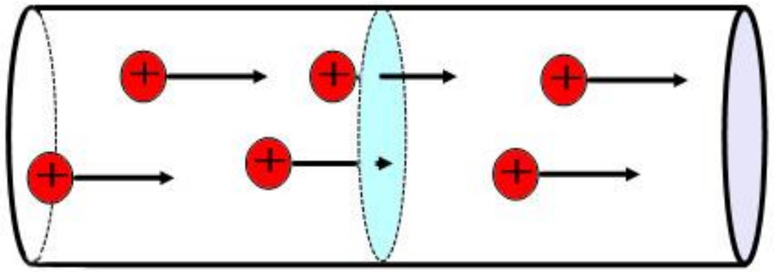
Elektromos áramerősség

Két különböző potenciálon lévő fémet vezetővel összekötve töltések áramlanak amíg a potenciál ki nem egyenlítődik.

Az elektromos áram iránya a pozitív töltéshordozók áramlási iránya.

<u>Áramerősség:</u> Egy vizsgált felület keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltés.

$$[I] = \mathrm{A(amper)} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$



Amennyiben az áramerősség állandó:

$$I = \frac{Q}{t}$$

A t_1 és t_2 között átáramlott töltés megadható mint:

$$\Delta Q = I \cdot \Delta t; \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

Háztartási gépekben néhány tizedtől néhány amper erősségű áram. Halálos: kb. 0,5 A

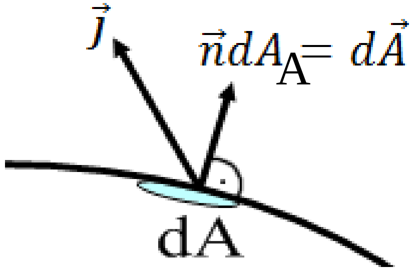
Áramsűrűség vektor

<u>Elektromos áramsűrűség vektor:</u> egy pontban értelmezett, nagysága megegyezik az áramlás irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramló töltéssel. Iránya a pozitív töltések áramlási iránya.

Az áramsűrűség vektor nagysága: $j = \lim\limits_{A \to 0} \frac{I}{A}$ Mértékegysége: $[j] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

Egy bármely felületen átáramló áram erőssége általánosan: $\Delta I = \vec{j} \cdot \Delta\vec{A}$

Ha a két vektor nem párhuzamos, azaz az áramsűrűség nem merőleges a tekintett felületre, akkor a normális (felületre merőleges) komponensét kell venni



$$\vec{j} \cdot d\vec{A} = \vec{j} \cdot \vec{n}dA = j_n dA$$

egy felületelemre számolt elemi áramerősség.

Ha az áramsűrűség vektor a felület minden pontjában ugyanakkora, és minden pontban merőleges a felületre, akkor:

$$I = jA$$

Áramforrások

A folyamatos töltésáramlás fenntartásához szükség van olyan idegen (nem elektromos) erőre amely a pozitív töltéshordozókat visszakényszeríti a magasabb potenciálú helyre.

Áramforrások azok a berendezések, melyekben ilyen erők működnek.

Az elektromos energia forrása az áramforrásokban lehet pl.

- mechanikai energia (generátorok, dinamók)
- kémiai energia (galvánelemek, akkumulátorok)
- hőenergia (termoelem)
- fényenergia (fotocella)

A q töltésre ható idegen erő: $\vec{F}^*$

Ebből definiáljuk az idegen térerősséget: $\vec{E}^* = \dfrac{\vec{F}^*}{q}$

Az elektromotoros erő definíciója: $\varepsilon = \vec{E}^* \cdot \Delta\vec{r}$

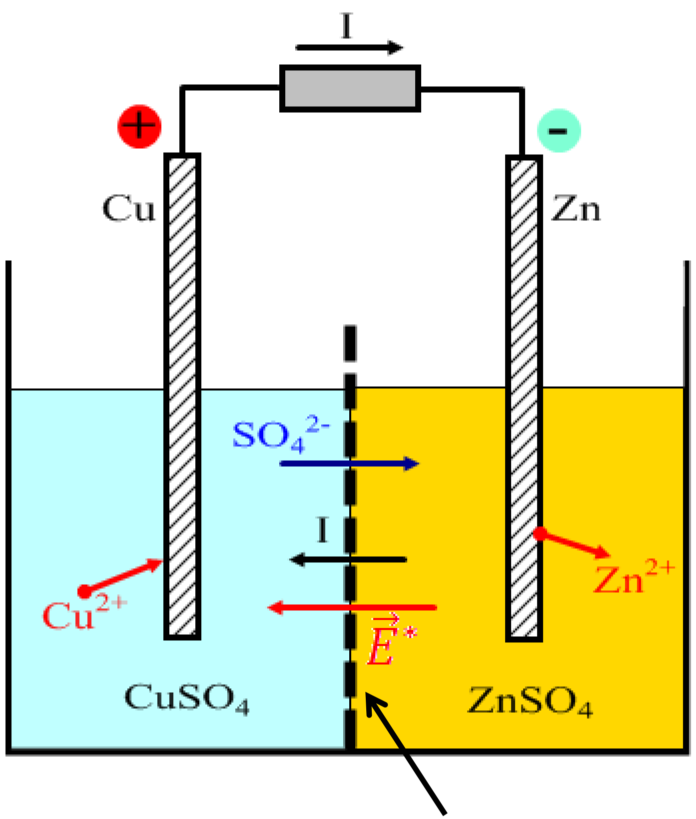
az áramforrás belsejében a $\Delta\vec{r}$ a – pólustól a + pólus felé mutat.

Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Fogyasztó: Olyan vezető amelyben idegen erő nincs jelen. Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Elektromos áram galvánelemben

Daniell-elem



diafragma
(csak szulfát-ionok
jutnak át)

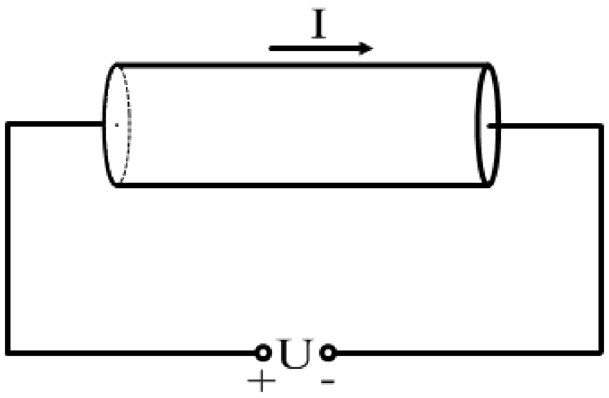
Kémiai energia alakul át elektromos energiává. Porózus anyaggal elválasztott cink-szulfát és réz-szulfát oldatok, bennük fém elektródákkal.
Cink beoldódik, két elektront hátrahagyva.
Ezek a vezetőn keresztül a rézre kerülnek.
A kiváló réz felveszi az elektronokat.

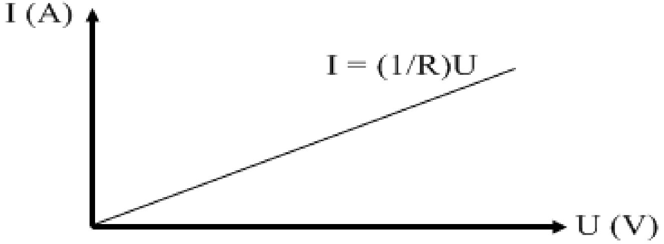
Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Ohm-törvény (integrális alak)

Tapasztalat szerint egy homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) arányos a vezető két vége közötti feszültséggel:





Hányadosuk a vezető két vége közötti **ellenállás**:

$$R = \frac{U}{I} \qquad [R] = \Omega(\mathrm{ohm}) = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Ez a törvény fémekre és ötvözeteikre bizonyos határok között jó közelítéssel igaz, ellentétben például a félvezetőkkel vagy elektrolitokkal.

<u>Fajlagos ellenállás (ρ)</u>: Egységnyi hosszú és egységnyi keresztmetszetű vezető ellenállása.

$$[\rho] = \Omega\mathrm{m} \quad \text{vagy} \quad \frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$

Az ellenállás arányos a hosszal, fordítottan a keresztmetszettel: $R = \rho \dfrac{l}{A}$

Egyenáramú áramkörök

Stacionárius elektromos áram (egyenáram): az összes fizikai mennyiség állandó, és a töltések időben állandósult módon áramlanak.

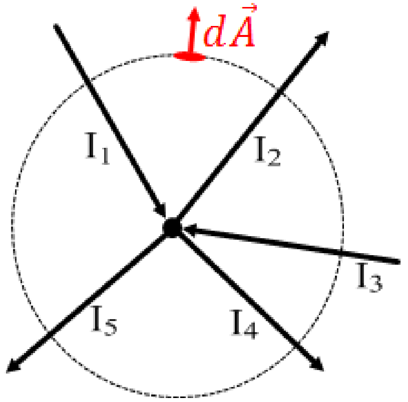
A töltésmegmaradás miatt csak a be- és kiáramlás változtathatja meg a töltést egy rögzített V térfogatban

Stacionárius esetben a baloldal nulla, így a befolyó (-) és kifolyó (+) áramok algebrai (előjeles) összege zérus.

Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény):

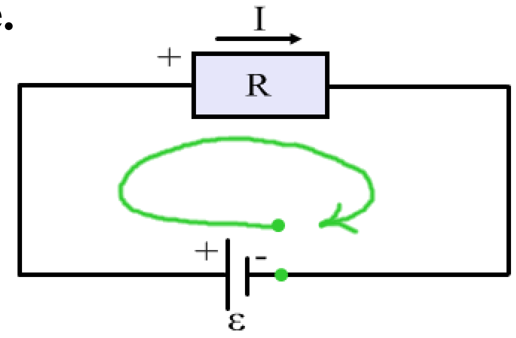
$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

$$I_2 + I_4 + I_5 - I_1 - I_3 = 0$$



Egy zárt hurok mentén a potenciálváltozások előjeles összege nulla.
Ez **Kirchhoff II. törvénye.**

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = 0$$



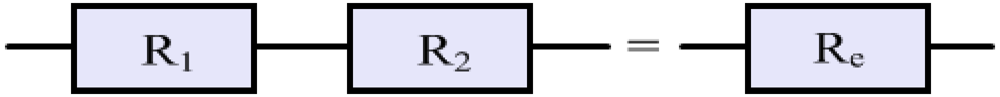
A törvény alkalmazása: felveszünk egy körüljárási irányt, és egy áramirányt.

$$\varepsilon = RI$$

Összetett áramkörök

<u>Csomópont</u>: azon pont ahová kettőnél több vezeték fut be
<u>Ág</u>: két vége csomópont, de benne nincs több csomópont

Az egy ágon belüli elemek **sorosan** vannak kapcsolva és rajtuk ugyanakkora áram folyik keresztül.

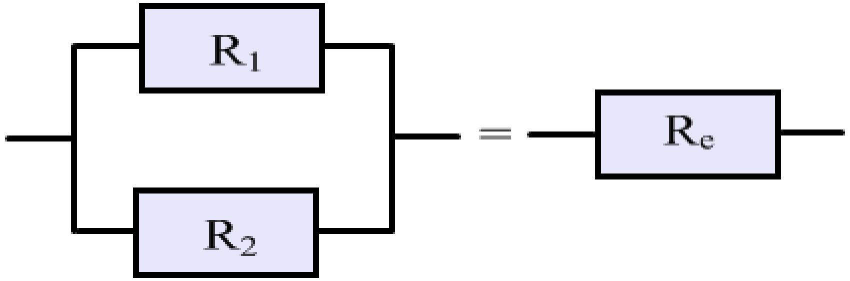


$$U_1 + U_2 = U \qquad I_1 = I_2 = I$$

$$R_1 I + R_2 I = R_e I \quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 = R_e$$

Több ellenállásra: $R_e = \sum_{i=1}^{N} R_i$

Párhuzamos kapcsolásnál az elemek megfelelő pólusai azonos potenciálon vannak.



$$U_1 = U_2 = U \qquad I_1 + I_2 = I$$

$$\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_e} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_e}$$

Több ellenállásra: $\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Differenciális Ohm-törvény

Vékony vezetőre vehetjük az áramsűrűséget állandónak és a vezetővel párhuzamosnak.

$$I = jA$$

A vezető ellenállására így: $R = \frac{U}{I} = \frac{El}{jA}$ illetve $R = \rho \frac{l}{A}$

Innen: $\rho = \frac{E}{j}$ azaz $\rho j = E$ Vektori formában: $\rho \vec{j} = \vec{E}$

Bevezetve a σ = 1/ρ fajlagos vezetőképességet a differenciális Ohm-törvény:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Amennyiben egy áramforrás miatt vagy egyéb oknál fogva $\vec{E}^*$ idegen térerősség is jelen van, akkor azt is számításba kell venni!

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)}$$

Fémeknél állandó hőmérsékleten jó közelítéssel igaz, de pl. félvezető diódák esetében még állandó hőmérsékletre sem teljesül.

A stacionárius áram munkája és teljesítménye

Ha egy fogyasztó kivezetései között a feszültség U és rajta t idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor az elektromos tér által végzett munka:

$$W = QU = ItU$$

Az elektromos energia eközben hővé alakul és a fogyasztót melegíti.

Az ehhez a munkához szükséges energiát általában az áramforrás biztosítja.

Ha a fogyasztó R ellenállása nem nulla, akkor hő mindig keletkezik. Erre az R ellenállásra a munkát a Joule-törvény adja meg:

$$W = ItU = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$$

innen a teljesítmény: $P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$