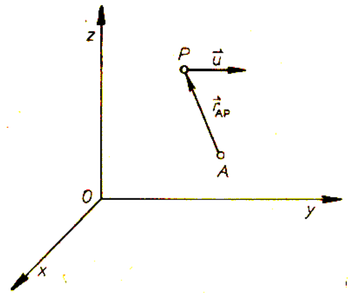
Forgatónyomaték és perdület

Bizonyos erőterekben lejátszódó mozgások – de főleg az összetett mechanikai rendszerek mozgásainak – leírásában fontos szerepet játszik az erő és az impulzus nyomatéka.

Legyen adva általában az $\vec{u}(x, y, z)$ vektortér. Az $\vec{u}$ vektor *A* pontra vonatkozó momentumán (vagy nyomatékán) értjük az $\vec{r}_{AP} \times \vec{u}$ vektori szorzatot, ahol $\vec{r}_{AP} = \overrightarrow{AP}$.



Legyen $\vec{u} = \vec{F}$. *A* P *pontban ható erő origóra vonatkoztatott momentuma (azaz a forgatónyomaték) az* $\vec{r}$ *helyvektornak és az* $\vec{F}$ *erőnek a vektori szorzata:*

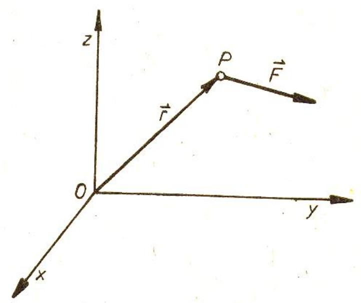
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

A definícióból következik, hogy az forgatónyomaték SI-egysége 1 mN.

Hasonlóképpen értelmezzük az anyagi pont impulzusának az O pontra vonatkozó $\vec{N}$ nyomatékát:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

(Az impulzusnyomatékot perdületnek is nevezik.)



Az anyagi pont impulzusmomentuma és a rá ható erők eredőjének momentuma kapcsolatban vannak egymással.

$$\frac{\Delta \vec{N}}{\Delta t} = \vec{M}.$$

A tömegpont O pontra vonatkozó impulzusmomentumának egységnyi idő alatti megváltozása egyenlő a rá ható erők eredőjének az O pontra vonatkozó momentumával. Az egyenlőséget *impulzusmomentum-tételnek* (vagy perdületi tételnek) nevezzük.

Centrális erők; felületi tétel

Centrális erőtérnek mondjuk az olyan erőteret, amelynek bármely pontjában ható erő tartó egyenese az inerciarendszer egy fix pontján megy át. Ilyen erőtér pl. a gravitációs erőtér vagy a rugalmas erőtér. (Centrális erőtér az elektrosztatikus erőtér is.) Az erők tartó egyenesének metszéspontját az erőtér centrumának, röviden *erőcentrumnak* nevezzük. Válasszuk a továbbiakban az erőcentrumot a vonatkoztatási rendszer origójául. Akkor az $\vec{r}$ rádiuszvektor a ható erővel egy egyenesbe esik. Tehát

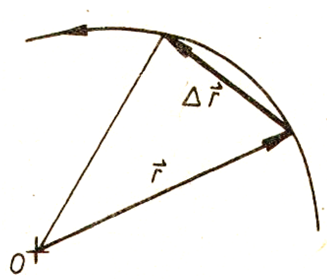
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Centrális erőtérben a ható erőnek az erőcentrumra vonatkoztatott momentuma zérus. Az impulzusmomentum-tételből következik tehát, hogy *a centrális erőtérben mozgó anyagi pontnak az erőcentrumra vonatkoztatott impulzusmomentuma állandó (vektor):*

$$\vec{N} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \overrightarrow{\text{konst}}.$$

Az egyenlőségből következik, hogy az $\vec{r}$ és $\vec{v}$ vektor mindig ugyanazon síkban marad, vagyis, hogy a *centrális erőtérben mozgó anyagi pont pályája síkgörbe*. Az egyenlőségből következik, hogy $\vec{r} \times \vec{v} =$ konstans. E vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentés adható.

Az $\frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \Delta\vec{r}\right|$ mennyiség annak a háromszögnek a területével egyenlő, melyet az $\vec{r}$ és a $\Delta\vec{r}$ vektorok kifeszítenek.



Az $\frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$ mennyiség tehát közelítőleg a rádiusz-vektor által időegység alatt átlagban súrolt terület. Az előbbiek szerint centrális erőtérben az $\frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|$ *területi sebesség állandó. Tehát centrális erőtérben az erőcentrumból a mozgó anyagi ponthoz húzott rádiusz-vektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket súrol.* Ez bolygómozgásra Kepler második törvénye. Ez az ún. *területi tétel,* tehát általánosabban érvényes: minden *centrális erőtérben*.

A pontrendszer fogalma. Külső és belső erők

Egy tömegpontra ható erő nem származhat magától a tömegponttól, hanem a környezetében lévő több test van rá olyan hatással, melyet erőnek nevezünk. Vagyis csak két vagy több tömegpont, ill. test között fellépő erőhatásnak (kölcsönhatásnak) van értelme. (Ezt az erőhatást az erőtér közvetíti.)

Az egymással kölcsönhatásban lévő anyagi pontok összességét *pontrendszernek* nevezzük. Több-kevesebb önkénnyel állapodunk meg abban, hogy melyik anyagi pontot tekintjük a pontrendszerhez tartozónak, melyiket nem. Általában valamilyen fizikai körülmény elkülöníti a szemügyre vett anyagi pontokat a többitől. Néhány példa. A Naprendszer bolygóit a Nap körüli keringésük vizsgálatakor anyagi pontrendszernek tekintjük; e pontrendszer tagjai egymásra gravitációs erőt fejtenek ki és természetesen ezen kívül a Nap is erőt gyakorol rájuk. Pontrendszert alkotnak egy edénybe zárt gázmolekulák, ha a molekulákat pontszerűeknek tekintjük. (Mind az előbbi, mind az utóbbi példában le kell ilyenkor mondanunk a bolygók, ill. a molekulák forgásának a leírásáról; az anyagi pont forgásának nincsen értelme.)

Ha a pontrendszer tagjainak mozgását le akarjuk írni, ismernünk kell a rájuk ható erőket. Mindenekelőtt számozzuk meg a pontrendszerhez tartozó anyagi pontokat: $1, 2, \ldots n-1, n$ $(n \geq 2)$. Az egyes anyagi pontokra vonatkozó fizikai mennyiségeket (tömeg, impulzus stb.) az anyagi pont sorszámával megegyező indexszel látjuk el.

Azokat az erőket, amelyeket a rendszer többi tagja fejt ki a kiszemelt tömegpontra, *belső erőknek* nevezzük, és $\vec{F}_{ik}$-val jelöljük ezek közül azt, amelyet a *k*-adik tömegpont fejt ki az *i*-edikre. Azokat az erőket, amelyeknek a forrása nem tartozik a pontrendszerhez, *külső erőknek* mondjuk. Az *i*-edik tömegpont mozgásegyenletét tehát így írjuk:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik}, \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ahol $\vec{F}_i$-vel jelöltük az i-edik tömegpontra ható *külső* erők eredőjét. A belső erők között az $\vec{F}_{ii}$ nem szerepel, vagy másként: $\vec{F}_{ii} \equiv \vec{0},$ minthogy az egyes tömegpontok önmagukra nem fejtenek ki erőt.

A vektori mozgásegyenletek száma egyenlő a pontrendszer tagjainak a számával, összegezzük az egyenlet két oldalán álló mennyiségeket:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} .$$

Minthogy Newton harmadik axiómája szerint

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} , \text{ ezért}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} = \vec{0},$$

vagyis a *belső erők vektori összege zérus*. A külső erők összegét jelöljük $\vec{F}$-fel, akkor az egyenlet így alakul:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{a}_i) = \vec{F} .$$

A bal oldalon álló összeg a pontrendszer tagjai impulzusának vektori összege; neve: *a pontrendszer impulzusa (lendülete),* jele: $\vec{p}.$ A egyenlet tömör írásmódja tehát:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}.$$

A pontrendszerre vonatkozó egyenlet formailag pontosan megegyezik az anyagi pontra vonatkozó egyenlettel. Míg azonban az egyetlen tömegpont esetén $\vec{F}$ az egy pontban ható erők eredőjét jelenti, itt az $\vec{F}$ a pontrendszer egyes tagjaira (tehát különböző pontokban ható) külső erők vektori összege.

Tehát *a pontrendszer lendületének időegység alatti megváltozása egyenlő a pontrendszer tagjaira ható külső erők összegével.* (A belső erők a lendület változásában nem játszanak szerepet.) Ha tehát a pontrendszerre ható külső erők összege zérus, akkor a pontrendszer ledülete nem változik, állandó. Az ilyen pontrendszert mechanikailag zárt rendszernek mondjuk. Tehát: *mechanikailag zárt pontrendszer lendülete időben állandó.* Ezt a tételt a pontrendszerre vonatkozó *lendülettételnek* (*impulzustételnek)* szokás nevezni; főleg részecskék ütközésének leírásában van nagy fontossága.

A tömegközéppont mozgására vonatkozó tétel

Egy pontrendszer *tömegközéppontjának* nevezzük azt a pontot, amelynek helyvektora:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} .$$

(A fenti definíciós egyenlet alapján belátható, hogy két tömegpontból álló pontrendszer tömegközéppontja az őket összekötő egyenesen van, és távolságukat a tömegükkel fordított arányban osztja.) Jelöljük a tömegpontok tömegének összegét M-mel: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, neve: *a pontrendszer tömege*.

A fenti egyenletek alapján adódik:

$$M \, \vec{a}_s = \vec{F} ;$$

szavakban: *egy pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a pontrendszer tömege oda volna koncentrálva és a pontrendszerre ható külső erők összege ott hatna*. A tömegpont mozgását tehát a belső erők nem befolyásolják. *Ha* tehát *a pontrendszerre ható külső erők összege zérus, akkor a pontrendszer tömegközéppontja (az inerciarendszerben) vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ez a tömegközéppont mozgására vonatkozó tétel*. (A tömegközéppontot néha súlypontnak, az előző tételt súlyponttételnek nevezik.)

A pontrendszerre vonatkozó impulzusnyomatéki tétel

A pontrendszer mozgásának általános jellemzésében – az impulzustétel mellett – fontos szerepe van az *impulzusnyomatéki* tételnek is; ezt a tételt néha *perdületi tételnek* is nevezzük.
Matematikailag levezethető, hogy

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times \vec{F}_i),$$

vagy tömörebb írásmóddal $\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}$.

Szavakban: *a pontrendszer teljes perdületének időegység alatti megváltozása egyenlő a pontrendszerre ható külső erők (ugyanazon pontra vonatkoztatott) nyomatékainak összegével, feltéve, hogy a belső erők centrálisak,* azaz ha $\vec{r}_i - \vec{r}_k \parallel \vec{F}_{ik}$. Az előzőekből következik, hogy *ha a pontrendszerre külső erők nem hatnak, vagy ha a külső erők nyomatékainak az összege zérus, akkor a rendszer teljes impulzusmomentuma állandó. Ez a teljes impulzusmomentum (perdület) megmaradásának a tétele*.

Merev testek egyensúlya

A merev testek mozgás közben megtartják az alakjukat, tehát bármely két pontjuk távolsága nem változik. Ezen testek egyensúlyának a fentiek szerint két feltétele van:

1, A testre ható külső erő eredője nulla legyen: $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0$. Ekkor a test tömegközéppontja nem gyorsul.

2, A testre ható forgatónyomatékok eredője nulla legyen: $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = 0$. Ekkor a test nem perdül, azaz a szögsebessége nem változik.

Az egyensúly nem jelent föltétlenül nyugalmat. Egy állandó sebességgel mozgó és állandó szögsebességgel forgó test is egyensúlyban van.