1 Kinematika I. – a mozgások leírása általában

A Kinematika a mozgások leírásával foglalkozik, nem firtatja a mozgások (és azok tulajdonságainak) miért-jeit. Ebben a fejezetben a Klasszikus Fizika általános kinematikai fogalmait mutatjuk be, és illusztráljuk azokat a legegyszerűbb mozgások leírásával.

1.1 Elméleti alapok

A jegyzetben a továbbiakban mindenhol **csak tömegpont** mozgásáról lesz szó, vagyis elhanyagoljuk a vizsgált fizikai rendszer kiterjedését, és ezzel együtt természetesen annak forgó mozgása, vagy alakváltozása sem értelmezhető.

1.1.1 Elmozdulás, sebesség, gyorsulás

Egy test egy mozgását egy $\vec{r}(t)$ vektor jellemzi, amely minden egyes t időpontban megadja a tömegpont **helyzet**ét. Azonban mivel a helyvektor csak adott koordinátarendszerben értelmezhető, szükségünk van egy koordináta-rendszer választástól független, vagyis mérhető fizikai mennyiségre. Ez az **elmozdulás vektor**, amely megmondja, hogy a test a t_1 és t_2 időpontok között hogyan mozdul el a pályáján:

$$\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\,.$$

Az elmozdulás-vektort elosztva az idővel (vagyis bevezetve az időegység alatt bekövetkező elmozdulás fogalmát) megkapjuk a **sebességvektor**t. Egészen pontosan ez az átlagsebesség vektor ($\vec{v}_á$). Ha konkrétan a t_1 pillanatbeli sebességre ($\vec{v}(t_1)$) vagyunk kíváncsiak, akkor az időtartamot egészen kicsinek kell választanunk, vagyis

$$\vec{v}_á = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad \vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}\,.$$

Hasonlóan vezethető be az átlagos és a pillanatnyi **gyorsulás vektor**a is, amely a sebesség időbeli megváltozását írja le, vagyis

$$\vec{a}_á = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}, \qquad \vec{a}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}\,.$$

A fenti egyenletekben a határértéket differenciálhányadosként is felírhattuk volna. Ezt azonban nem tettük meg, mert a hallgatóság nem tanulta a felsőbb matematikát. Emiatt aztán azt sem tárgyalhatjuk, hogy általános esetben hogyan kaphatjuk meg a sebességből az elmozdulást és a gyorsulásból a sebességet. Néhány egyszerűbb esetben azonban az elemi matematikával is boldogulhatunk majd.

Fontos még megemlíteni az **átlagos sebességnagyság** fogalmát, ami a vizsgált időtartam alatt megtett út és az idő hányadosa, vagyis nem az elmozdulással áll kapcsolatban.

$$\overline{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}\,.$$

1.1.2 Állandó sebességű eset, az Egyenes vonalú egyenletes mozgás

A fenti általános összefüggések első, legegyszerűbb alkalmazása az **Egyenes vonalú, egyenletes mozgás**, amelynek definíciója, hogy a sebességvektor állandó (iránya és hossza is) $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$. Ebből következik hogy $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$.

Mivel az egyenes vonalú mozgás leírása egyetlen koordinátatengely mentén is lehetséges, egy megfelelően választott koordinátarendszerben, ha a mozgás az x tengely mentén történik, a fenti egyenlet az alábbi lesz:

$$x(t) = v_0 t + x_0 .$$

Fontos kiemelni, hogy ha több, nem ugyanabba az irányba haladó mozgást egyszerre szeretnék leírni, valamilyen koordinátarendszer bevezetésére szükség van, és akkor a korábbi egyenletek érvényesek mindegyik egyenes vonalú egyenletes mozgást végző tömegpontra.

1.1.3 Állandó gyorsulású eset

Hasonlóan kiszámolhatóak az állandó gyorsulású $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$ mozgás egyenletei is, ahol a sebességvektor

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \cdot t + \vec{v}_0 ,$$

az elmozdulás-vektor pedig

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0}{2} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0 \text{ lesz.}$$

1.1.4 Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Az állandó gyorsulású mozgások egyik speciális esete az **egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás**, amely abban különbözik a fenti, általánosabb esettől, hogy az $\vec{a}_0$ gyorsulás és a $\vec{v}_0$ kezdeti sebességek párhuzamosak. Ebben az esetben, ha csak egyetlen tömegpont mozgását vizsgáljuk, ismét elegendő egyetlen koordinátatengely bevezetése a mozgás leírására, ez ismét legyen az x tengely. Ekkor a sebesség

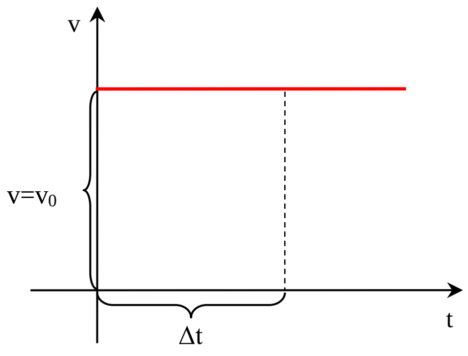
$$v_x(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

lesz, a koordináta pedig

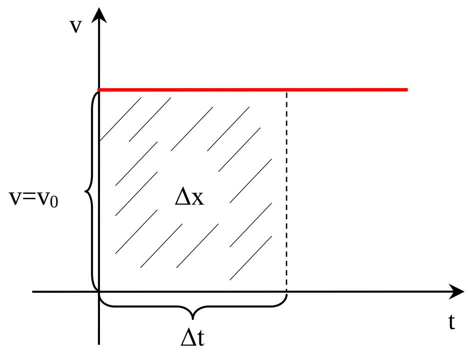
$$x(t) = \frac{a_0}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 .$$

1.1.5 Elmozdulás számítása a sebességből

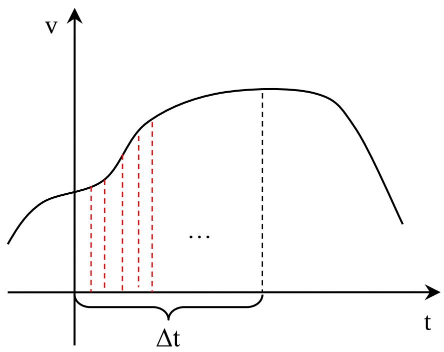
Ennek módszeréhez ismét visszatérünk az **egyenes vonalú egyenletes mozgás**hoz. Ennél a mozgásnál a sebesség értéke állandó, és így a sebesség-idő diagram az alábbi módon rajzolható fel:



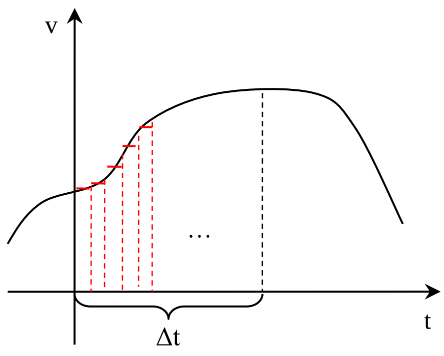
Az egyenletek szintjén a korábbiaknak megfelelően $v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, amiből a $\Delta x = v_0 \cdot \Delta t$ összefüggéssel számolható az elmozdulás. Ez a fenti ábrát tekintve a piros görbe alatti területnek felel meg, ahol a függőleges oldal v_0, a vízszintes oldal pedig Δt hosszúságú.



Általános esetben a következőképpen járunk el. Tekintjük a v(t) görbét, és a 't' tengely irányában a kérdéses szakaszt felbontjuk kis darabokra.



Ha elegendően kis darabokra bontjuk, akkor az egyes időszakokban majdnem állandónak tekinthető a sebesség.



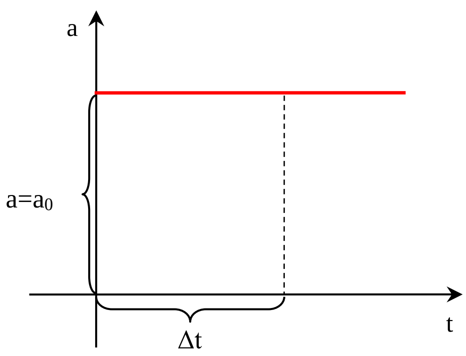
Ezeken a kis szakaszokon az elmozdulások a téglalapok területeivel lesznek egyelőek, a teljes Δt időszakra vonatkozó elmozdulás az összes ilyen kis téglalap területének összege lesz. Ha ezeket a kicsi időintervallumokat elegendően kicsinek választjuk, akkor bár nagyon pici téglalapokat kapunk, de ezek összege pontosan megadják a mozgás során bekövetkező elmozdulást. Röviden ez lesz a függvény alatti terület.

Vagyis **általánosságban** elmondható, hogy egydimenziós mozgás esetén az elmozdulás megegyezik a sebesség-idő diagramra rajzolt v(t) függvény alatti területével.

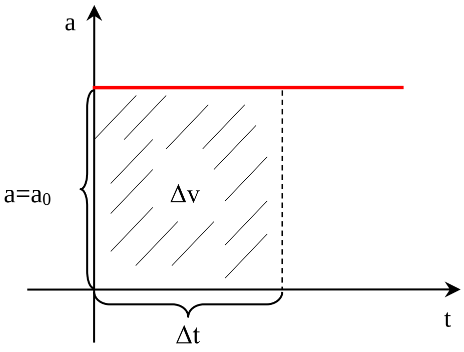
Megjegyzés: Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a **görbe alatti terület**, még akkor is, ha ebben a jegyzetben csak egyenesek alatti területeket számolunk ki, a ténylegesen görbe vonalak alatti terület kiszámításához ugyanis integrálni kellene.

1.1.6 Sebességváltozás számítása a gyorsulásból

Nagyon hasonlóan fogjuk a módszert felvázolni, mint tettük az elmozdulás sebességből történő kiszámítása során. Jelen esetben viszont ismét az **egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás**hoz térünk vissza. Ennél a mozgásnál a gyorsulás értéke állandó, és így a gyorsulás-idő diagram az alábbi módon rajzolható fel:



Az egyenletek szintjén a korábbiaknak megfelelően $a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, amiből a $\Delta v = a_0 \cdot \Delta t$ összefüggéssel számolható a sebesség-változás. Ez a fenti ábrát tekintve a piros görbe alatti területnek felel meg, ahol a függőleges oldal a_0, a vízszintes oldal pedig Δt hosszúságú.



Általános esetben ugyanúgy járunk el, mint az elmozdulás számításakor tettük. Vesszük az a(t) görbét, és a ’t’ tengely irányában a kérdéses szakaszt felbontjuk kis darabokra. Ha ezt elegendően finoman tesszük, akkor az egyes időszakokban majdnem állandónak tekinthető a gyorsulás. Ezeken a kis szakaszokon az sebesség-változások a téglalapok területeivel lesznek egyenlőek, a teljes Δt időszakra vonatkozó sebesség-változás az összes ilyen kis téglalap területének összege lesz. Ha ezeket a kicsi időintervallumokat elegendően kicsinek választjuk, akkor a sebesség-változást megkapjuk, mint az a(t) függvény alatti területe.

Vagyis **általánosságban** elmondható, hogy egydimenziós mozgás esetén a sebesség-változás megegyezik a gyorsulás-idő diagramra rajzolt a(t) függvény alatti területével.

1.2 Bevezető elemi feladatok

1. feladat Egy egyenletesen mozgó autó sebessége 72 km/h. Mennyi utat tesz meg 10 s alatt?

Megoldás:

- Adatok: v=72 km/h, Δt=10 s.
- Az autó sebességének átváltása m/s-ra: 72 km/h = 72/3,6 m/s = 20 m/s.
- Az út kiszámítása: s = v Δt = <u>200 m</u>

2. feladat Egy farkas üldözőbe vesz egy őzgidát. Tegyük fel, hogy mindketten ugyanazon egyenes mentén mozognak, a farkas sebessége 36 km/h, a gidáé 21,6 km/h, és utóbbinak 100m előnye van. Mennyi idő múlva éri utol a farkas és mennyit kell futnia?

Megoldás:

- Adatok: v_f = 36 km/h=10 m/s, v_g=21,6 km/h=6 m/s, Δs=100m.
- Az egyenes vonalú mozgások leírása: $s_f = v_f\,\Delta t$; $s_g = v_g\,\Delta t$.
- A megoldandó egyenlet: $s_f = s_g + \Delta s$.
- Az idő kiszámítása: $v_f \cdot \Delta t = v_g \cdot \Delta t + \Delta s \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \dfrac{\Delta s}{v_f - v_g} = \dfrac{100\mathrm{m}}{10\mathrm{m/s} - 6\mathrm{m/s}} = \underline{25\mathrm{s}}$.
- A farkas által megtett út kiszámítása: $s_f = v_f \cdot \Delta t = 10\mathrm{m/s} \cdot 25\mathrm{s} = \underline{250\mathrm{m}}$.

3. feladat Egy kerékpáros sebessége 5 s alatt 7 m/s-ról egyenletesen 12 m/s-ra növekszik. Mekkora a gyorsulása? Mennyi utat tesz meg a gyorsuló szakaszon?

Megoldás:

- Adatok: v_0=7 m/s, v_1=12 m/s, Δt=5 s.
- Az autó gyorsulásának kiszámítása: $a = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{12m/s - 7m/s}{5s} = \underline{1\frac{m}{s^2}}$.
- A megtett út kiszámítása: $s = \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t = \frac{1m/s^2}{2} \cdot (5s)^2 + 5m/s \cdot 5s = \underline{37,5m}$

4. feladat Egy hajó északra halad 20km/h sebességgel, egy másik keletre 15km/h-val. Milyen távol lesznek egymástól 4 óra múlva?

Megoldás:
- Adatok: v_1=20 km/h, v_2=15 km/h, Δt=4 h.
- A megtett utak kiszámítása: $s_1 = v_1\,\Delta t$ = 80 km; $s_2 = v_2\,\Delta t$ = 60 km.
- A hajók távolsága, mivel egymásra merőlegesen haladnak, a Pitagorasz-tétel segítségével számolható ki, vagyis

$s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \underline{100km}$.

2 Dinamika I. – Newton-törvények

A testek mozgásának miért-jeire a Dinamika ad választ. Ennek első szakasza a Newton-törvényeket, és az ahhoz kapcsolódó erő-törvényeket tartalmazza, és a test mozgás-egyenleteinek származtatása a cél. Az egyenletek megoldása már a kinematika tárgykörébe tartozik.

2.1 Elméleti alapok

A Newton-törvények:

1. Minden test megőrzi egyenes vonalú egyenletes mozgását, vagy nyugalmi állapotát addig, amíg annak megváltoztatására egy másik test nem kényszeríti.
   - Megjegyzés: a feladatmegoldásokban ez úgy jelenik meg, hogy ha egy tömegpontra ható erők eredője zérus (ebbe beleértendő az is, ha nem hat rá erő), akkor nem gyorsul, vagyis a sebessége állandó.
   - Megjegyzés: a fenti Newton-törvény modernebb változata az úgynevezett *kiválasztási axióma*, viszont a munkafüzetben található feladatok megoldásához arra nincs szükség.

2. A test gyorsulása és a rá ható erő arányos, vagyis szabatosabban:

   $$\vec{F} = m\vec{a},$$

   ahol az arányossági tényező a **tehetetlen tömeg**, mértékegysége a kg.

3. Ha egy A test egy B testre $\vec{F}_{AB}$ erőt fejt ki, akkor a B test is erőt fejt ki az A-ra. Ezen $\vec{F}_{BA}$ erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az eredeti $\vec{F}_{AB}$ erővel, vagyis:

   $$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

   Ezt nevezik **erő-ellenerő**, vagy **hatás-ellenhatás törvényé**nek is.

4. Ha egy tömegpontra egyidejűleg több erő is hat, akkor együttes hatásuk helyettesíthető egy úgynevezett **eredő erő**vel. Az eredő erő az egyes erők vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

A második és negyedik törvény összevetésének segítségével adhatjuk meg a tömegpont **mozgásegyenlet**ét

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a},$$

amelynek $\vec{r}(t)$ megoldásait nevezzük **mozgástörvény**nek; a megoldáshoz természetesen szükség van a $\vec{v}(t_0)$ és $\vec{r}(t_0)$ kezdeti feltételekre is.

A mozgásegyenletek konkrét felírásához azonban szükség van bizonyos **erőtörvény**ekre, amelyek a tömegpont helyétől, sebességétől, az időtől, anyagi és geometriai paraméterektől függően kiszámíthatóvá teszik az erővektorokat.

A feladatmegoldások során használandó erőtörvények az alábbiak:

- **Súlyerő**: $G = m \cdot g$, ahol g a gravitációs gyorsulás, az erő mindig függőleges.
- **Csúszási súrlódási erő**: $F_S = \mu \cdot F_{ny}$, ahol μ a csúszási súrlódási együttható, F_{ny} a két felület közötti nyomóerő. Az erőhatás mindig a felületekkel párhuzamos.
- **Rugóerő**: $F_x = -D \cdot x$, ahol D a rugóra jellemző direkciós állandó, x a kitérés.
- Kényszererők, mint a **kötélerő** (a kötél végén ébredő erő), vagy a **tartóerő** (a testet „tartó” felületre merőleges erőhatás).

2.2 Bevezető elemi feladatok

1. feladat Mekkora az emelődaru kötelében fellépő F_h húzóerő egy 100 kg tömegű gépalkatrész süllyesztésekor, illetőleg emelésekor, ha a gyorsulás nagysága mindkét esetben 2 m/s^2? A kötél és a végén levő horogszerkezet súlya elhanyagolható.

Megoldás:

- Adatok: m=100kg, a=2 m/ s^2.
- Mozgásegyenlet, és annak megoldása, amikor lefelé mozog:

$$G - F_h = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_h = m \cdot g - m \cdot a = \underline{800N}.$$

- Mozgásegyenlet, és annak megoldása, amikor felfelé mozog:

$$F_h - G = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_h = m \cdot g + m \cdot a = \underline{1200N}.$$

2. feladat Egy m=4kg-os testre a súlyán kívül egy vízszintes, 30N nagyságú erő hat. Mekkora a test gyorsulása?

Megoldás:

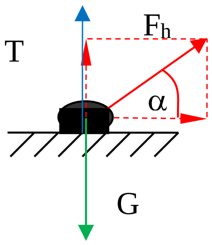
- Adatok: m=4kg, F=30N.
- A két erőhatás (súlyerő és F) merőleges egymásra, így a kettő eredőjének nagyságát a Pitagorasz-tétellel lehet kiszámolni:

$$F_{eredő} = \sqrt{(m \cdot g)^2 + F^2} = \underline{50N}.$$

Ebből a gyorsulás $a = F_{eredő}/m = 12{,}5 m/s^2$.

3. feladat Egy fél mázsás zsák vízszintes, súrlódásmentes talajon hever. Egy munkás elkezdi húzni a vízszintessel 40°-os szöget bezáró, 400N nagyságú erő-vel. Mekkora és milyen irányú a test gyorsulása?

Megoldás:
- Adatok: m=50 kg, F_h=400N, α=40°
- Ábra, előkészítve a húzóerő komponensekre bontását:



- Mivel a húzóerő 400N, a test súlya pedig G=mg=500N, még ha függőlegesen felfelé is húzzuk, nem emelkedik el a talajról a test. Ezért rajzoltuk be a tartóerőt is az ábrán.
- Függőlegesen a tartóerő, a húzóerő függőleges komponense és a súly kiegyenlítik egymást. A gyorsulást a mozgásegyenlet vízszintes komponenséből lehet kiszámolni:

$$F_h \cos\alpha = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_h \cos\alpha}{m} = 6{,}13 \frac{m}{s^2}.$$

3 Dinamika II. – megmaradó mennyiségek

A fizikában fontosak az úgynevezett megmaradó mennyiségek, amelyek fontos alapvető elvekből határozhatóak meg. Az alkalmazások tekintetében ezen mennyiségeknek kettős a haszna. Egyrészt vannak olyan mérnöki kérdések, amelyek egyértelműen a megmaradó mennyiségekre, vagy a kapcsolódó fogalmakra vonatkoznak (például egy rendszer hatásfoka, vagy a működéshez szükséges teljesítmény, befektetendő energia, stb.). Másrészt bizonyos dinamikai feladatok a segítségükkel sokkal könnyebben megoldhatóak.

3.1 Elméleti alapok

3.1.1 Lendület (impulzus), Impulzus-tétel

A **lendület (** $\vec{p}$ **)**, vagy más néven impulzus **(** $\vec{I}$ **)** meghatározása:

$$\vec{I} = m\vec{v},$$

és az erre vonatkozó tétel az úgynevezett **impulzus-tétel**

$$\frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t} = \sum \vec{F}$$

amelyből állandó tömegű esetben levezethető Newton 2. törvénye.

Azon túl, hogy bizonyos feladatok értelmezésében és megoldásában alkalmazható a tétel, van egy fontos következménye. Ha a testre ható erők eredője zérus, akkor a test impulzusa állandó (nagyság és irány is), vagyis ebben az esetben az impulzus megmarad.

3.1.2 Munka, mozgási energia, munkatétel

Egy adott tömegpontra ható erőhatás, ha a tömegpont $\Delta\vec{r}$ elmozdulást végez, az alábbi **munká**t végzi a testen

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}\,.$$

Vagyis a munka az erővektor és az elmozdulás vektor skaláris szorzata. A képlet alkalmazásának feltétele, hogy az erőtér homogén, vagyis minden pontban ugyanolyan nagyságú és irányú, illetve a test elmozdulása egyenes mentén történik. Ha kifejtjük a skaláris szorzatot, akkor a

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\varphi$$

képlethez jutunk, ahol φ a két vektor által bezárt szög.

Erre a fogalomra épül a **munkatétel**. Ennek kimondásához szükségünk van egy mennyiség bevezetésére, mégpedig a **kinetikus** (vagy mozgási) **energiá**ra, amely

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

alakú. Ezzel a munkatétel

$$W = \Delta E_k\,,$$

vagyis a mechanikában a tömegpontra ható erők eredője által végzett munka a test mozgási energiájának megváltozását okozza.

3.1.3 Teljesítmény, teljesítmény-tétel

A munkavégzéshez, illetve az energiához kapcsolódó fontos fogalom a **teljesítmény**, ami az időegység alatt befektetett munka / befektetett energia / hasznosuló energia, stb. Mivel a mechanikában az alapvető energiamennyiség a végzett munka, ez

$$P = \frac{W}{t}\,.$$

Ez a definíció egészen pontosan a t időtartamra számított **átlagteljesítmény**. A **pillanatnyi teljesítmény** elméletileg a t időtartam lerövidítésével is közelíthető

Mechanikában a pillanatnyi teljesítményre levezethető a

$$P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos\varphi$$

összefüggés, továbbá a munkatétel felhasználásával igazolható az úgynevezett **teljesítmény-tétel**, ami szerint

$$P = \frac{\Delta E_k}{\Delta t}\,.$$

3.2 Bevezető elemi feladatok

1. feladat Egy autó tömege 2000 kg. 36 km/h sebességről 10 másodperc alatt fékeződött le. Mekkora a fékező erő?

Megoldás:

- Adatok: m=2000kg, Δv=36 km/h=10m/s, Δt=10s.

- Megoldás impulzus-tétellel:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \underline{2000N}.$$

2. feladat Mekkora sebességet ér el a nyugalmi helyzetből induló 20 kg tömegű test 40 joule munka árán?

Megoldás:
- Adatok: m=20kg, v_0=0m/s, W=40J.
- Megoldás munka-tétellel:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \underline{2\frac{m}{s}}.$$

3. feladat Függőlegesen feldobunk egy testet 30m/s sebességgel. Milyen magasra jut?

Megoldás:
- Adatok: v_0=30m/s.
- Megoldás mechanikai energia-megmaradással. A potenciális energia nulla szintjét a hajítás kiindulópontjához rögzítjük, ekkor a testnek csak mozgási energiája lesz. A pálya tetőpontján egy pillanatra megáll, akkor a mozgási energiája válik zérus értékűvé. Így a mechanikai energia-megmaradás és annak megoldása az alábbi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2}{2g} = 45m.$$