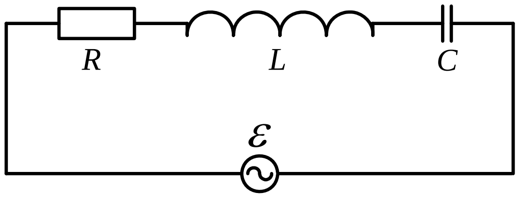
Soros áramkör gerjesztett elektromágneses rezgései

Tekintsük az alábbi áramkört:



Az általánosított hurok törvény:

$$L\dot{I}+RI+\frac{Q}{C}=\mathcal{E}$$

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{Q}{C}=\mathcal{E}\,.$$

Legyen a gerjesztő elektromotoros erő egy harmonikus függvény $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cos\omega t$, $\mathcal{E}_0$ a gerjesztő elektromotoros erő amplitúdója, ω pedig a körfrekvenciája.

Emlék: gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}+\kappa\dot{x}+Dx=F_0\cdot\cos\omega t$$

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{Q}{C}=\mathcal{E}_0\cos\omega t$$

az analóg mennyiségek:

$$m\to L\,,\ \kappa\to R\,,\ D\to\frac{1}{C}\,,\ x\to Q\,,\ F_0\to\mathcal{E}_0$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}\to\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha=\frac{\kappa}{2m}\to\frac{R}{2L}$$

A megoldás:

$$Q_{inh.ált.}=Q_{hom.ált.}+Q_{inh.part.}$$

A homogén egyenlet általános megoldása időben lecseng. Elegendően hosszú idő után, a tranziens jelenségeket követően, a megoldást az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása szolgáltatja. Ezt a megoldást keressük, jelölje a továbbiakban Q az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását.

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=\mathcal{E}_0\cos\omega t$$

A részletek mellőzésével felírhatjuk a megoldást rögtön a létrejövő áramra:

$$I=I_0\cos\left(\omega t-\varphi\right),\ \text{ahol}\ I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,.$$

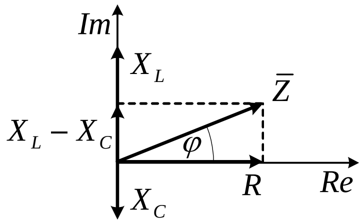
A nevezőben található kifejezés a soros RLC kör impedanciája. Röviden $I_0=\dfrac{\mathcal{E}_0}{Z}$.

$$Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$x_L=L\omega$ induktív reaktancia

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{kapacitív reaktancia}$$

Az impedancia vektorábra:



$$tg\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

A megoldásba szereplő φ adja meg az áram fázisát az elektromotoros erőhöz képest. Ha $\varphi >$ 0 akkor I késik $\mathcal{E}$ -hoz képest, ha $\varphi < 0$ akkor I siet $\mathcal{E}$ -hoz képest.

Az egyes kapcsolási elemek pólusain mérhető feszültségek:

$$U_R(t) = U_{R0}\cos(\omega t - \varphi), \text{ ahol } U_{R0} = I_0 R$$

Az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel fázisban van!

$$U_C(t) = U_{C0}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \text{ ahol } U_{C0} = I_0 X_C$$

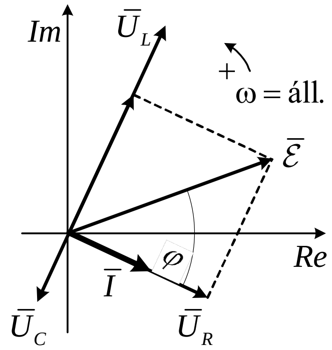
A kondenzátor feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel késik az áramhoz képest!

$$U_L(t) = U_{L0}\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \text{ ahol } \quad U_{L0} = I_0 X_L$$

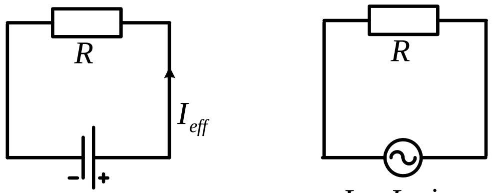
Az ideális tekercs feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel siet az áramerősséghez képest!

Fázisábra, vagy feszültség vektorábra:

$$\overline{U}_L + \overline{U}_R + \overline{U}_C = \overline{\mathcal{E}}$$



Váltakozó áram jellemzése effektív értékekkel:
A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius áram erősségét jelenti.
Akár a vizsgált váltakozó áram folyik át egy fogyasztón, akár egy I_{eff} erősségű stacionárius áram, egy periódus alatt az elektromos munkavégzés megegyezik.



$$I = I_0 \sin \omega t$$

$$W = I_{eff}^2 RT, \qquad W = \int_0^T I^2(t) R dt$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t) dt = \frac{I_0^2}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\right]_0^T = \frac{I_0^2}{2}$$

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \text{ analóg módon } \mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

Teljesítmény soros váltakozó áramú körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye:

$$P(t) = \mathcal{E} I = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \; I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Jelölje $T = \frac{2\pi}{\omega}$ a periódusidejét a gerjesztő elektromos erőnek. A koszinuszok szorzatát alakítsuk át összeggé:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

Legyen $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$.

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right] = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)$$

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right]$$

Mivel a periodikus függvény időátlaga zérus:

$$\overline{P} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi = \mathcal{E}_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$

$$\overline{P} = \mathcal{E}_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$