# Lineáris csillapítatlan szabad rezgés. Lineáris csillapított szabad rezgés. Gyenge csillapítás. Gerjesztett rezgés. Amplitúdó rezonancia.

**Lineáris csillapítatlan szabad rezgés:**
Tételezzük fel, hogy a tömegpontra a kvázielasztikus vagy közel rugalmas erő hat, ez a kitéréssel arányos, de azzal ellentétes irányú:

$$F_x = -Dx, \quad D > 0$$

Ekkor a tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -Dx$$

Oldjuk meg ezt a másodrendű differenciálegyenletet az *x(t)* függvényre:

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

Ekkor az egyenlet:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x\,,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ez egy másodrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatójú, és közönséges differenciálegyenlet. Az általános megoldás a két független partikuláris megoldás lineáris kombinációja.
A partikuláris megoldások:

$$x_1 = \sin\omega_0 t\,,$$

$$x_2 = \cos\omega_0 t\,.$$

Lineáris kombinációjuk:

$$x(t) = C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t\,,$$

vagy más alakban:

$$x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \delta\right)$$

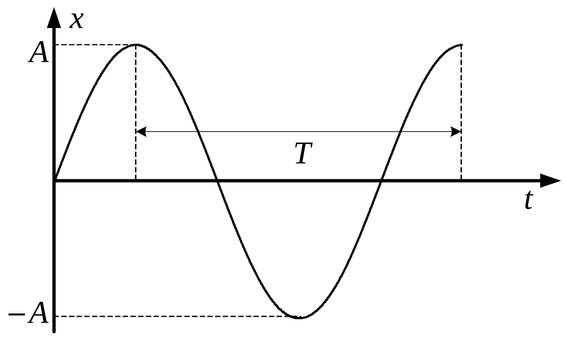
Az első megoldásban $C_1$, és $C_2$, a másodikban pedig $A$, és $\delta$ integrációs állandók. A kitérés maximális értéke az amplitúdó $A$, $\delta$ pedig a kezdőfázis, $\omega_0$ a körfrekvencia. A rezgés periódusideje *T*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

A rezgés frekvenciája:

$$f_0 = \frac{1}{T}\,.$$

A kitérés idő függvény látható a következő ábrán:




A rugalmas erő konzervatív erő, ekkor igaz, hogy:

$$\vec{F} = -\nabla V$$

$V$ a potenciális energia. Egy dimenzióban:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

a rugalmas erő pedig:

$$F_x = -Dx$$

$$-Dx = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Így a potenciális energia:

$$V = \frac{1}{2}Dx^2 + C$$

Válasszuk nullának a potenciális energiát az egyensúlyi helyzetben, így $C = 0$.
A rugalmas potenciális energia tehát:

$$V(x) = \frac{1}{2}Dx^2 .$$

**Lineáris csillapított szabad rezgés:**
A tömegpontra a már ismert rugalmas erő hat $F_x = -Dx$, valamint egy (folyadék) súrlódási vagy csillapító erő, amely kis sebesség esetén a sebességgel arányos, de vele ellentétes irányú:

$$S_x = -\kappa \dot{x} ,$$

$\kappa > 0$ csillapítási tényező.

$$m\ddot{x} = -Dx - \kappa \dot{x} ,$$

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 .$$

Bevezetve a két szokásos jelölést:

$$\alpha = \frac{\kappa}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

A homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

A megoldást keressük az alábbi formában:

$$x_p = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \text{, de } e^{\lambda t} \neq 0 ,$$

így a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 .$$

Ennek a gyökei:

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\ .$$

A három lehetséges eset:

Ha $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, akkor gyenge csillapítás, ha $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$, akkor kritikus csillapítás, ha pedig $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, akkor erős csillapítás esete valósul meg. Amennyiben a gyökök különböznek, akkor a két egymástól független partikuláris megoldás lineáris kombinációját kell venni:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}\ .$$

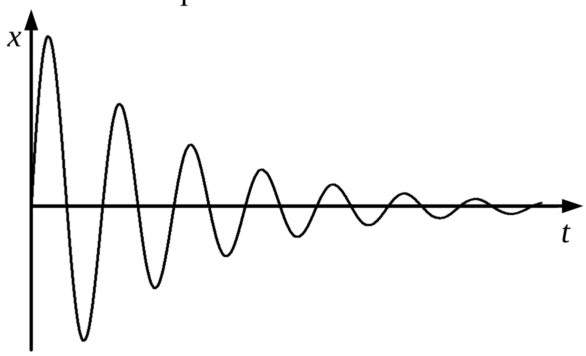
Gyenge csillapítás esetén vezessük be a következő jelölést:

$$\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\ .$$

Ilyenkor a megoldás:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A\cos\gamma t + B\sin\gamma t\right] = Ce^{-\alpha t}\sin(\gamma t + \delta),$$

A folyamatot a csillapodás miatt kváziperiódikusnak nevezzük. A kitérés idő függvény pedig:




Megjegyzés:

Ha $\alpha = \omega_0$ tejesül, akkor a kritikus csillapításnak megfelelő megoldás:

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{-\alpha t}\ .$$

Ha $\alpha > \omega_0$, akkor erős csillapítás van, ilyenkor:

$$x(t) = \left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right)e^{-\alpha t}, \text{ ahol } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

**Gerjesztett lineáris rezgés, rezonancia:**

Tekintsünk egy olyan mozgást, ahol a tömegpontra a már ismert két erőn kívül egy periodikus gerjesztő erő hat melynek $\omega$ a körfrekvenciája.

$$F_x = -Dx \text{ kvázielasztikus erő,}$$

$$S_x = -\kappa \dot{x} \text{ közegellenállás,}$$

$$F_x = F_0 \cos\omega t \text{ gerjesztő erő.}$$

A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -Dx - \kappa\dot{x} + F_0\cos\omega t$$

A jelölések:

$$2\alpha = \frac{\kappa}{m},\quad \omega_0^2 = \frac{D}{m},\quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t\ .$$

Ez egy másodrendű, lineáris, állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet, melynek általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege:

$$x_{\text{inh.ált}} = x_{\text{hom.ált}} + x_{\text{inh.part}}.$$

Mivel $x_{\text{hom.ált}}$ időben exponenciálisan csökken, ezért elegendő idő után elhanyagolhatóvá válik. Az állandósult állapotban $x_{\text{inh.ált}} = x_{\text{inh.part}}$. A rezgés megindulását követő tranziens jelenségtől eltekintünk és az állandósult megoldást keressük. Ezt jelöljük *x*-szel.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$$

A keresett megoldás:

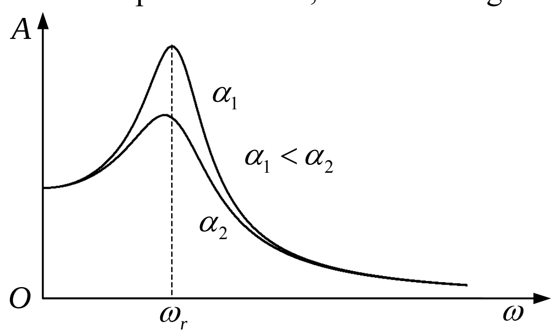
$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

ahol

$$\tan\delta = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \text{és}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}.$$

A stacionárius megoldás tehát egy egyszerű harmonikus rezgés. A létrejövő rezgés körfrekvenciája megegyezik a gerjesztő erő körfrekvenciájával és azt $\delta$ fáziskéséssel követi. A rezgés amplitúdója függ a gerjesztő erő amplitúdójától és körfrekvenciájától. A következő ábra azt mutatja, hogy a létrejövő rezgés amplitúdója maximális értéket vesz fel egy bizonyos frekvencián. Ezt rezonancia frekvenciának nevezzük. A két különböző görbe különböző csillapításokhoz tartozik. Ha a csillapítás csökken, a rezonanciagörbe élesebbé válik.




Ez a megoldás, amit korábban alkalmaztunk csak a tranziens folyamat lejátszódása után írja le a rezgést. Ha a tranziensre is kíváncsiak vagyunk, akkor más módszerrel kell a differenciál egyenletet megoldani.