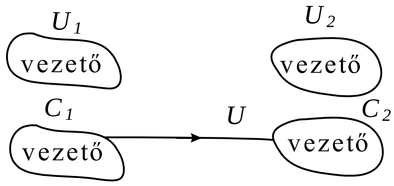
Az elektromos áramlás

Az elektromos áramlás:
Tekintsünk két feltöltött vezetőt. Legyen $U_1 > U_2$.



Ha a két feltöltött fémtestet vezetővel összekötjük, akkor a magasabb potenciálú test, töltést veszít, a másik pedig töltést vesz fel. A töltésáramlás addig tart, ameddig az egyesített vezető test potenciálja ki nem egyenlítődik. A folyamatban a potenciál (intenzív mennyiség) kiegyenlítődése következik be töltés áramlás (extenzív mennyiség) révén. A potenciálkülönbség, a töltések mozgását részben rendezetté teszi, s a rendezetlen hő mozgásra egy rendezett mozgás szuperponálódik. Az elektromos áramlás a töltéshordozók rendezett mozgását jelenti: Az elektromos áramlás létrejöttének feltételei:

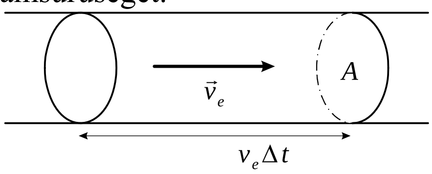
1. legyenek szabad töltéshordozók, és
2. legyen jelen elektromos mező.

Megállapodás szerint az elektromos áramlás iránya a pozitív töltéshordozók (valóságos vagy elképzelt) áramlásának irányával egyezik meg.

Elektromos áramsűrűség:
Az elektromos áramsűrűség abszolút értéke megmutatja, hogy az áramlási irányra merőleges egységnyi keresztmetszeten időegység alatt mennyi töltés áramlik át. Iránya megegyezik a pozitív töltéshordozók áramlási irányával. Mértékegysége: $\left[J\right] = 1\frac{C}{sm^2} = 1\frac{A}{m^2}$. Az elektromos áramsűrűség vektornak két összetevője van:

$$\vec{J} = \rho\vec{v} + \vec{j}$$

A konvektív vagy szállítási áramsűrűség $\rho\vec{v}$, míg a konduktív vagy vezetési áramsűrűség $\vec{j}$.
Tekintsünk nyugvó kristályos vezetőt, $\rho = 0$, így abban csak konduktív áram lép fel.
Származtassuk le a vezetési áramsűrűséget.



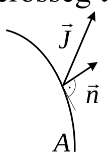
Δt idő alatt $v_e \Delta t\, A$ nagyságú térfogatból jutnak át az elektronok a vezető *A* keresztmetszetén. Így az átjuttatott töltés nagysága $\left|-e\right| n_e v_e \Delta t\, A$, ahol $-e$ az elektron töltése, n_e a vezetési elektronok számsűrűsége, és $\vec{v}_e$ az elektronok átlagos driftsebessége. A definíció alapján:

$$\left|\vec{j}\right| = \frac{\left|-e\right| n_e v_e \Delta t\, A}{\Delta t\, A} = \left|-e\right| n_e v_e \text{, illetve vektoriálisan:}$$

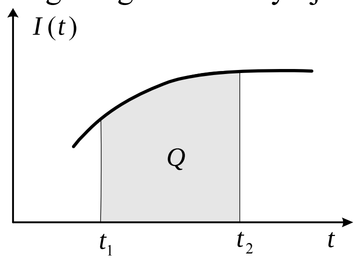
$$\vec{j} = -e\, n_e \vec{v}_e \,.$$

Az elektromos áram iránya a negatív töltések áramlási sebességével ellentétes, a pozitív töltések (képzelt) áramlásának irányával megegyező.

Az elektromos áramerősség irányított felületre vonatkozó mennyiség. Megmutatja, hogy az illető felületen időegység alatt mennyi töltés áramlik át. Ha a + töltések a normális irányában áramlanak akkor az áram pozitív. Az áramerősség tehát előjeles mennyiség.



Mértékegysége $[I] = 1\frac{C}{s} = 1\,amper = 1A$. A t_1, t_2 időközben az A felületen átáramló töltés, az áramerősség integrálásával nyerjük a kérdéses időközre.



$$Q_A = \int_{t_1}^{t_2} I_A dt$$

Töltésmegmaradás törvénye:
Mivel az elektromos töltés éppúgy extenzív és megmaradó mennyiség, mint a tömeg, ezért a töltésmegmaradás törvényét formailag ugyanolyan egyenlet írja le mint a tömegmegmaradásét. Ennek integrális alakja

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_A \vec{J} d\vec{A}.$$

ρ: térfogati töltéssűrűség, $\vec{J} = \rho\vec{v} + \vec{j}$ pedig áramsűrűség, A pedig a rögzített V térfogat zárt burkolófelülete.

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = \int_V \nabla\vec{J} dV$$

Mivel a V térfogat rögzített ezért a hely szerinti integrálás és az idő szerinti differenciálás sorrendje felcserélhető. A jobb oldalon pedig a Gauss - Osztogradszkij tételt alkalmaztuk.

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{J}\right) dV = 0$$

Mivel az integrál bármely V térfogatra eltűnik, a differenciális, vagy lokális alak:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{J} = 0.$$

Áramforrások:
Ha a töltésekre egyedül az elektromos mező hat, akkor a kezdeti potenciál különbségek hamar kiegyenlítődnek és az áramlás véget ér. A töltésáramlás fenntartásához szükség van olyan idegen (nem elektromos) erőre, amely a pozitív töltéshordozókat visszakényszeríti az eredetileg magasabb potenciálú helyre és ezzel megteremti a folyamatos áramlás lehetőségét. Az olyan berendezéseket, amelyekben ilyen idegen erők működnek áramforrásoknak nevezzük. Kémiai természeti erők működnek a galvánelemben és az akkumulátorban. Mágneses természetű erők a generátorokban és a dinamóban. Legyen $\vec{F}^*$ a q töltésre ható idegen erő, akkor az idegen térerősség $\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q}$. Az elektromotoros erő pedig:

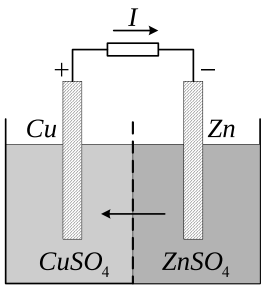
$$\mathcal{E}_{\overset{\frown}{+-}} = \int_{\overset{\frown}{+-}} \vec{E}^* d\vec{r} \text{ , mértékegysége } [\mathcal{E}] = 1V .$$

Az elektromotoros erő megmutatja, hogy mennyi munkát végez az idegen erő a pozitív egységtöltésen, míg ez a töltés az áramforrás belsejében a negatív pólustól elmozdul a pozitív pólusig.

$$W^*_{\overset{\frown}{-+}} = \int_{\overset{\frown}{-+}} \vec{F}^* d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{-+}} q\vec{E}^* d\vec{r} \, ,$$

$$\mathcal{E}_{\overset{\frown}{-+}} = \frac{W^*_{\overset{\frown}{-+}}}{q} = \int_{\overset{\frown}{-+}} \vec{E}^* d\vec{r} \, .$$

Feltételezhetjük, hogy az elektromotoros erő független attól, milyen pályán mozog a töltés az áramforrás belsejében. Az olyan vezetőt, amelyben nincsenek idegen erők, fogyasztóknak nevezzük. $\left(\vec{E}^* = 0\right)$ A fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú ponttól az alacsonyabb potenciálú pont felé folyik. Az áramforrásban pedig a – pólustól a $\oplus$ pólus felé folyik az áram.



Stacionárius elektromos áramlási tér:

Az összes fizikai mennyiség idő független, (csak a helytől függenek) de a töltések időben állandósult módon áramlanak. A stacionárius elektromos mező konzervatív, örvénymentes mező. Az ezt leíró alaptörvény integrális-, és differenciális alakja már ismert:

$$\oint_g \vec{E} d\vec{r} = 0 \text{, illetve } \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \text{, ilyenkor } \vec{E} = -\nabla U \, .$$

Stacionárius áramlás esetén a töltésmérlegből a baloldal eltűnik, mivel a V térfogatban a töltés már nem változhat, így $\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0$. Ekkor kaphatjuk a stacionárius áramlás a második alaptörvényének integrális-, és differenciális alakját.

$$\oint_A \vec{J} \, d\vec{A} = 0 \text{, illetve } \nabla \vec{J} = 0 \, .$$

A peremfeltételek két közeg határán: $E_{t1} = E_{t2}$, az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonos, illetve mivel $\vec{J}$ divergenciája nulla, azaz nincsenek forrásai, így $J_{n1} = J_{n2}$ tehát a *J* normális összetevője szintén folytonos.

Kapcsolat az elektromos térerősség és a létrejövő áramsűrűség között, kristályos vezetőben, differenciális Ohm-törvény:

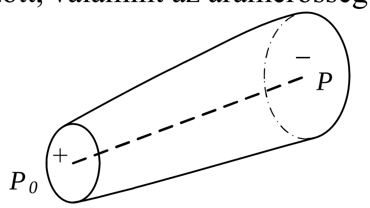
Kristályos vezetőben nyerhetjük a differenciális Ohm-törvényt:

$$\vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right).$$

γ a fajlagos vezetőképesség az anyagi minőségre jellemző. A fajlagos vezetőképesség reciproka a fajlagos ellenállás $\rho = \frac{1}{\gamma}$, ekkor $\rho\vec{j} = \vec{E} + \vec{E}^*$. A differenciális Ohm-törvény vagy Ohm féle anyagi egyenlet nem egy szigorú arányosság $\vec{j}$ *és* $\vec{E}$ között, mivel a γ nem független $\vec{j}$ -től. Például fémekben ha nő a $\vec{j}$ akkor a hőmérséklet is növekszik és γ lecsökken.

Az Ohm-törvény integrális alakja vezetőben:

Fogyasztóban nincs idegen tér: $\vec{E}^* = 0$ Tekintsük az alábbi fogyasztót, és írjuk fel a potenciálkülönbséget P_0 és P között, valamint az áramerősséget.



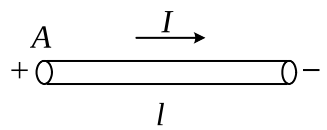
$$U = \int_{+}^{-} \vec{E}\, d\vec{r}\text{ , illetve } I = \int_A \vec{J}\, d\vec{A}$$

Homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) a tapasztalat szerint arányos a vezető két vége közötti feszültséggel. Hányadosukat a vezető két vége közötti ellenállásnak nevezzük, jele R.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_{+}^{-} \vec{E}\, d\vec{r}}{\int_A \vec{J}\, d\vec{A}}$$

Az ellenállás mértékegysége $[R] = 1\frac{V}{A} = 1ohm = 1\Omega$.

Számoljuk ki a vékony, állandó keresztmetszetű vezető ellenállását. Vékony vonalas vezetőről akkor beszélhetünk, ha a vezető keresztmetszetét jellemző méret elhanyagolható a vezető hosszához képest. (ilyenkor vékony áramcsőnek tekinthető).



$U = \int_{+}^{-} \vec{E}\, d\vec{r} = \int_{+}^{-} E\, dr = E\int_{+}^{-} dr = E\, l$, a differenciális Ohm-törvény segítségével: $U = E\, l = \rho J\, l$,

$$I = \int_A \vec{J}\, d\vec{A} = J\, A$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E\, l}{J\, A} = \frac{\rho\, J\, l}{J\, A} = \rho\frac{l}{A}.$$

$$R = \rho\frac{l}{A}.$$

Ha a vezetőszál mentén a fajlagos ellenállás vagy a keresztmetszet változik, akkor

$$R = \int_g \rho(s)\frac{ds}{A(s)}.$$

Az ellenállást befolyásoló tényezők:

1. anyagi minőség
2. mechanikai igénybevétel (összenyomáskor általában csökken, nyújtáskor nő) nyúlásmérő bélyeg
3. hőmérséklet

Tapasztalat szerint növekvő hőmérséklettel a fémek és a legtöbb fémötvözet ellenállása nő, a szén, a konstantán ötvözet, a félvezetők (és elektrolitok) ellenállása csökken.
A fémek, az ötvözetek és a szén fajlagos ellenállásának hőmérsékletfüggését leíró hatványsor:

$$\rho_T = \rho_0\left(1+\alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + ...\right), \text{ ahol}$$

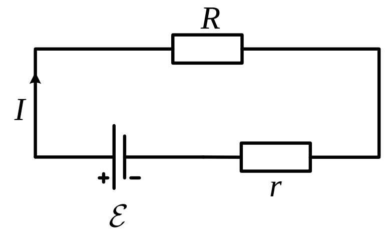
$\rho_T = \rho(T)$, és $\rho_0 = \rho(T_0)$, ami általában 0 °C-hoz vagy 20 °C-hoz tartozik, $\Delta T = T - T_0$.
Néhány száz °C-os tartomány esetén a hőmérsékletfüggés lineárisnak tekinthető:

$$\rho_T = \rho_0\left(1+\alpha\Delta T\right)$$

α a lineáris hőtágulás együtthatója, ha $\alpha > 0$ akkor PTK, ha $\alpha < 0$ NTK ellenállásról beszélünk. Ha a vezeték hőtágulásától eltekintünk, akkor

$$R_T = R_0\left(1+\alpha\Delta T\right)$$

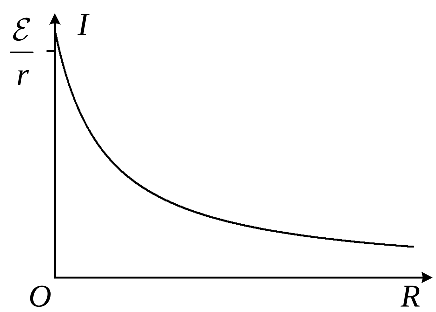
Integrális Ohm-törvény teljes áramkörre:
Tekintsünk egy vékony vonalas vezetőkből és áramforrásból álló zárt áramkört. A vékony vonalas vezetők ellenállását koncentrált paraméterrel szemléltetjük, és *R*-rel jelöljük. Az áramforrásnak, mint vezetőtestnek az ellenállását jelölje *r*, −ezt belső ellenállásnak nevezzük −, elektromotoros erejét pedig $\mathcal{E}$. Határozzuk meg, hogyan függ az áramerősség az áramforrás, és az áramkör adataitól. Ha integráljuk a differenciális Ohm-törvényt erre a zárt hurokra, akkor kaphatjuk meg az Ohm-törvényét teljes áramkörre:



$$\mathcal{E} = I(R+r), \text{ illetve } I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

Ez a teljes áramkörre vonatkozó integrális Ohm-törvény. A kör áramának *I* erőssége arányos az áramforrás $\mathcal{E}$ elektromotoros erejével és fordítva arányos a fogyasztó valamint az áramforrás belső ellenállásának összegével. Ha *R* = 0 akkor nyerhetjük a rövidzárási áramot:

$$I_{\text{röv}} = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

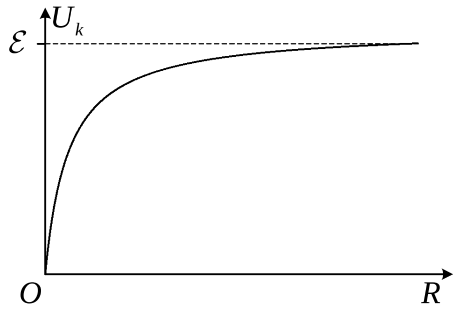


Az R ellenállású fogyasztóra jutó feszültséget kapocsfeszültségnek nevezzük, ez egyben az áramforrás pólusai között mérhető feszültség:

$$U_K = IR = \mathcal{E} - Ir$$

Az áramforrás kapocsfeszültsége $I \neq 0$ esetén mindig kisebb, mint az elektromotoros erő $\mathcal{E}$.

$$U_K = IR = \mathcal{E}\frac{R}{R+r}$$



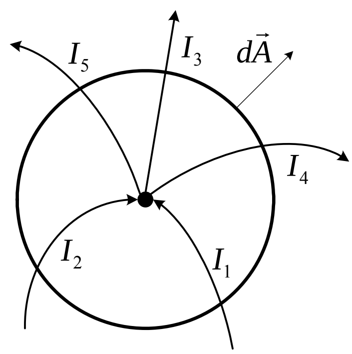
Ha $R \gg r$ akkor $I \approx 0$ és $U_K \approx \mathcal{E}$, ez az üres járási állapot, ha $R \ll r$ akkor $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$ és $U_K \approx 0$, ez a rövidzár állapot.

Összetett áramkörök (vonalas hálózatok):

Tekintsünk a továbbiakban vonalas vezetőkből és áramforrásokból összeállított hálózatokat. **Csomópont** a hálózat azon pontja ahol kettőnél több vezeték fut be. **Ág** a hálózat olyan szakasza, amelynek két vége csomópont a belsejében azonban nincs több csomópont. Egy ágon belül az áramerősség mindenütt megegyezik. Az egy ágon belüli elemeket **sorosan kapcsolt**ak nevezzük. A **hurok** a hálózat olyan zárt irányított vonala, amely a hálózat ágaiból épül fel. **Párhuzamos**nak nevezzük a fogyasztók kapcsolását akkor, ha a megfelelő sarkaik azonos potenciában vannak.

Kirchoff I. törvénye (csomóponti törvény):

Stacionárius esetben a töltésmegmaradás törvénye: $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$. Ha ezt vékony vonalas vezetőkben folyó áramokra alkalmazzuk, akkor $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$ egyenletet nyerhetjük. Egy csomópontba befolyó és onnan kifolyó áramok algebrai (előjeles) összege zérus. Az előjelezés az alábbiak szerint történik: $I > 0$ ha $\vec{J} \cdot d\vec{A} > 0$, és $I < 0$ ha $\vec{J} \cdot d\vec{A} < 0$



Pl.: $I_3 + I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0$

Kirchoff II. törvénye (hurok törvény):

Egy hurok mentén a feszültségek algebrai összege zérus.

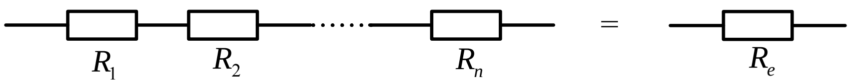
$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

A hálózatszámítás menete:

- az egyes ágakban tetszés szerinti áramirányokat vesszük fel,
- felírjuk az egymástól független csomóponti törvényeket,
- megfelelő számú hurokban tetszőleges körüljárási irányt veszünk fel,
- felírjuk a hurok törvényeket, ellenálláson áthaladva megegyező áramirány és körüljárás esetén *+IR* egyéként *–IR,* ideális áramforráson áthaladva előbb pozitív pólusát érintve $+\mathcal{E}$ egyébként $-\mathcal{E}$,
- a csomóponti és huroktörvények alkotta, az áramokban lineáris egyenletrendszert megoldjuk az ismeretlenekre.

A Kirchoff törvények alkalmazásai:

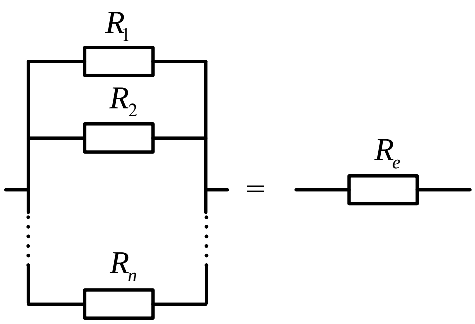
1. Ellenállások soros kapcsolása: A Kirchoff törvények alkalmazásával könnyen belátható, hogy a soros kapcsolás helyettesítő vagy eredő ellenállása az egyes ellenállások összege.



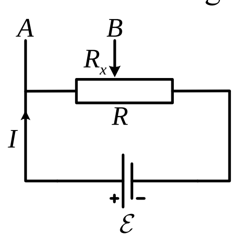
A helyettesítő vagy eredő ellenállás: $R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i$

2. Ellenállások párhuzamos kapcsolása: Ha az ellenállásokat párhuzamosan kapcsoljuk, akkor az eredő ellenállás reciproka egyenlő az egyes ellenállások reciprokainak összegével:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

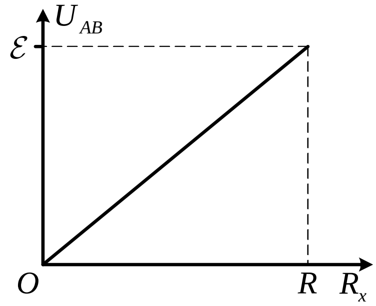


3. Feszültségosztó (potenciométeres) kapcsolás. Gyakran előfordul az, hogy egy fix feszültségű áramforrás segítségével változtatható feszültséget kell előállítanunk. Ezt a feladatot valósíthatjuk meg terheletlen feszültségosztó kapcsolás segítségével:

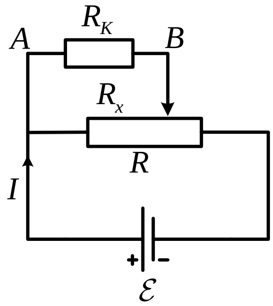


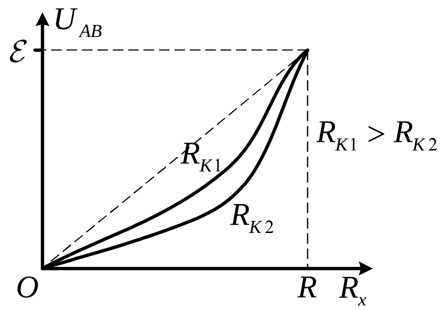
A főkörben folyó áramerősség $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, így az R_x ellenálláson eső feszültség

$U_{AB} = R_x I = \mathcal{E}\frac{R_x}{R}$. A terheletlen potenciométer két kapcsán megjelenő feszültség lineáris függvénye az R_x ellenállásnak, és $0 \le U_{AB} \le \mathcal{E}$.



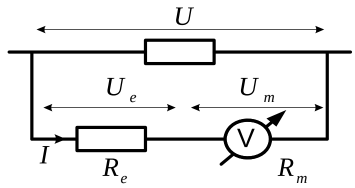
Terhelt potenciométeres kapcsolás esetén a változtatható feszültséget egy fogyasztóra kötjük. Ilyenkor a karakterisztika már nem lineáris.





4. Feszültségmérő és árammérő műszerek méréshatárának kiterjesztése

Feszültségmérő előtét ellenállásának méretezése. *U* feszültséget akarunk mérni egy U_m méréshatárú műszerrel, ilyenkor egy R_e ellenállást alkalmazunk.



$$U_m + U_e = U .$$

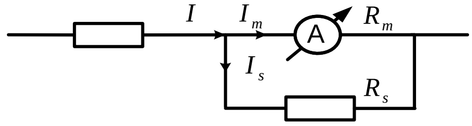
R_e és R_m soros kapcsolása miatt $I = \frac{U_m}{R_m} = \frac{U_e}{R_e}$, az előtétre eső feszültség $U_e = U_m \frac{R_e}{R_m}$.

$$U = U_m + U_m \frac{R_e}{R_m} = U_m\left(1 + \frac{R_e}{R_m}\right)$$

A méréshatár n-szeres kiterjesztése esetén $n = \frac{U}{U_m} = 1 + \frac{R_e}{R_m}$, tehát, az előtét ellenállás: R_e

$$R_e = (n-1)R_m$$

Árammérő sönt ellenállásának méretezése. *I* áramot akarunk mérni egy I_m méréshatárú műszerrel, ilyenkor egy R_s ellenállást alkalmazunk.



$$I = I_m + I_s$$

R_s és R_m párhuzamos kapcsolása miatt $I_m R_m = I_s R_s$, így a sönt árama $I_s = I_m \dfrac{R_m}{R_s}$.

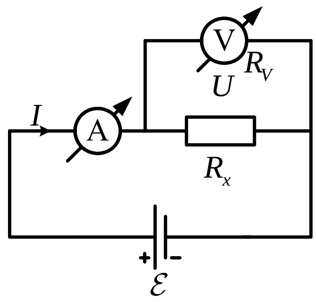
$$I = I_m + I_m \frac{R_m}{R_s} = I_m \left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right)$$

A méréshatár n-szeres kiterjesztése esetén $n = \dfrac{I}{I_m} = 1 + \dfrac{R_m}{R_s}$ tehát a sönt ellenállás R_s

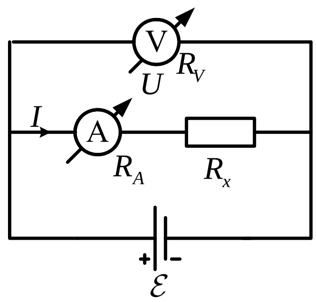
$$R_s = \frac{R_m}{n-1}.$$

5. Ellenállásmérés Ohm törvénye alapján mutatás műszerekkel

„Kis ellenállás” mérése: $R_x \ll R_V$. Ilyenkor $R_x = \dfrac{U}{I}$, és a mérés relatív hibája $\varepsilon_1 = \dfrac{R_x}{R_x + R_V} \approx \dfrac{R_x}{R_V}$



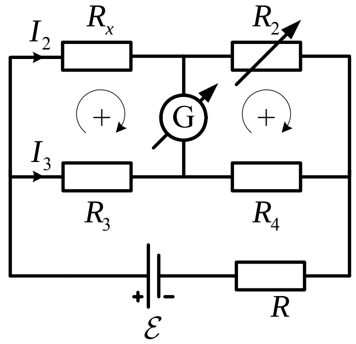
„Nagy ellenállás” mérése esetén ha $R_A \ll R_x$, inkább az alábbi kapcsolást alkalmazzuk:



Az ismeretlen ellenállás ilyenkor is $R_x = \dfrac{U}{I}$, és a mérés relatív hibája: $\varepsilon_2 = \dfrac{R_A}{R_x}$. A digitális műszerek pontosabbak, az áramköri viszonyokat gyakorlatilag nem befolyásolják. A digitális
műszerek pontosabbak, az áramköri viszonyokat gyakorlatilag nem befolyásolják. A digitális
feszültségmérőben alkalmazott tranzisztoros erősítő miatt a belső ellenállás nagy $\sim 10 M\Omega$. Az árammérést szintén feszültségmérésre vezetik vissza.

6. Ellenállásmérés Wheatstone-híddal

Tekintsük az alábbi kapcsolást, legyen R_x az ismeretlen ellenállás, R_2 pedig egy szabályozható ellenállás. Az elrendezést összeállítva a galvanométeren áram fog folyni. Az R_2 ellenállást addig szabályozzuk, amíg a híd árammentes nem lesz, $I_G \approx 0$. Ekkor a Wheatsone-híd kiegyenlített állapotban van. Az ilyen mérési módszert nullmódszernek nevezzük. Az alkalmazásához egy érzékeny árammérő úgynevezett galvanométer kell. A kiegyenlített állapotra felírhatóak az alábbi hurokegyenletek:



$$I_2R_x - I_3R_3 = 0\text{, és } I_2R_2 - I_3R_4 = 0.$$

$$I_2R_x = I_3R_3$$

$$I_2R_2 = I_3R_4$$

Végül az ismeretlen ellenállás: $R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}$.

A Wheatsone híd $1\Omega - 10^6\,\Omega$ tartományban használható ellenállás mérésére.

A stacionárius áram munkája és teljesítménye:

Ha a fogyasztó be és kivezetése közötti feszültség U_{12} és rajta t idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor a mező munkája: $W = QU_{12} = U_{12}I\,t$. Ez annak a munkának az értéke, amit a mező végez, az U_{12} feszültségű szakaszon t idő alatt miközben a vezetékben I erősségű áramot hajt. Az elektromos mező munkája megegyezik a vezeték belső energiájának növekedésével. Az Ohm törvény segítségével ezt két további alakban is kifejezhetjük. Amennyiben a fogyasztó ellenállása R, az elektromos áram munkája: $W = U_{12}I \cdot t = I^2R \cdot t = \frac{U_{12}^2}{R}t$. Homogén fémes fogyasztó esetén termikus egyensúlyban a fogyasztó éppen annyi úgynevezett Joule hőt ad le a környezetének, mint amennyi munkát az elektromos mező végez. A stacionárius áram által végzett munka mértékegysége joule, de a gyakorlatban használják a kWh egységet is: $1kWh = 3{,}6 \cdot 10^6\,J$. A stacionárius áram teljesítménye pedig: $P = U_{12}I = I^2R = \frac{U_{12}^2}{R}$.

Teljes áramkör esetén az idegen erők munkája az áramforrásban:

$$W^* = \mathcal{E}Q = \mathcal{E}\,I\,t = I^2\left(R + r\right)t = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}t$$

$$P^* = \mathcal{E}I$$

Belátható, hogy egy R ellenállású homogén fémes fogyasztót, és $\mathcal{E}$ elektromos erejű r belső ellenállású áramforrást tartalmazó teljes áramkörben a generátor munkája maradéktalanul Joule-hővé alakul.