7. Elektromágneses hullámok homogén izotróp szigetelőben. Hullámegyenlet. A hullámegyenlet monokromatikus síkhullám megoldása. Energia terjedése elektromágneses hullámban.

A Maxwell elméletnek logikus következménye, hogy ha a mágneses mező változása elektromos mezőt kelt, akkor együttesen képesek önállósulni és forrásaikról (a töltésekről és az áramokról) leszakadva önmagukat fenntartani. **Az elektromágneses mezőnek a testekről leváló azoktól függetlenül tovaterjedő változatát elektromágneses sugárzásnak vagy elektromágneses hullámnak nevezzük.** Maxwell megjósolta az elmélet alapján az elektromágneses hullámok létét. Hertz bizonyította a létüket 1888-ban.

Elektromágneses hullámok homogén izotróp szigetelőben:
Tekintsünk vákuumot vagy szigetelőt: $\vec{j} = 0$. Az anyag legyen homogén izotróp és nem ferromágneses. A lineáris anyagegyenletek: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ és $\vec{B} = \mu \vec{H}$, μ és ε állandók és $\mu = \mu_0$ hiszen a ferromágneseket kizártuk. Legyen a szigetelő töltetlen: $\rho = 0$. Írjuk fel a Maxwell-rendszer differenciális egyenleteit, és alkalmazzuk a fenti feltételeket:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\partial \left(\varepsilon \vec{E} \right)}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \left(\varepsilon \vec{E} \right) = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

A fenti egyenletek segítségével a homogén hullámegyenlet levezethető:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

A hullámegyenlet lineáris, homogén és másodrendű parciális differenciálegyenlet, például az elektromos térerősség *x* komponensére:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon \cdot \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Hasonló egyenlet írható fel az E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z koordinátákra.

Belátható, hogy ennek az egyenletnek megoldása az alábbi monokromatikus síkhullám:

$$E_x = E_{x0} \cos \left(\omega \left(t - \frac{\vec{N} \cdot \vec{r}}{v} \right) + \delta \right)$$

A kifejezésben ω a körfrekvencia, δ a kezdőfázis és $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$ ahol $\vec{N}$ a terjedés irányának egységvektora.

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}$ a hullám fázissebessége. A fázissebesség vákuumban $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \, m/s$.

A fázissebesség vákuumban megegyezik a fény vákuumbeli terjedési sebességével. Kémiai közegben:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon'\mu_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}=c\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon'}}$$

Mivel $\varepsilon'>1$ így kémiai anyagban a fázissebesség kisebb, mint vákuumban $v<c$.
Hullámról akkor beszélünk, ha a fizikai állapotváltozás a térben tovaterjed. Homogén közegben a fázis állandó sebességgel terjed tova.
A koszinusz függvény argumentumában szereplő kifejezést fázisnak nevezzük:

$$\varphi=\omega\left(t-\frac{\vec{N}\cdot\vec{r}}{v}\right)+\delta=\omega\left(t-\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\vec{N}\cdot\vec{r}\right)+\delta\,.$$

Fázisfelületnek nevezzük azon pontok mértani helyét, amelyekben a fázis értéke egy adott időpillanatban ugyanakkora. Esetünkben a fázisfelület olyan sík, amelynek normálisa az $\vec{N}$ vektor és ennek irányában önmagával párhuzamosan maradva *v* sebességgel eltolódik. Az ilyen hullámot, amelynek fázisfelületei síkok, síkhullámnak nevezzük.

A hullámot monokromatikusnak (egyszínű) nevezzük, ha benne csak egyféle frekvencia fordul elő. Ez a hullám, térben, és időben egyaránt periodikus. A térbeli periódushosszat hullámhossznak nevezzük, jele: λ. A hullámhossz két olyan fázisfelület távolsága, amelyek fáziskülönbsége pontosan 2π.

$$\frac{\omega}{v}\lambda=2\pi\,,$$

$$\lambda=\frac{2\pi v}{\omega}=\frac{2\pi v}{2\pi f}=\frac{v}{f}=vT$$

Hullámszámnak nevezik a 2π hosszegységre eső hullámok számát, jele *k:*

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}$$

Hullámszámvektor: $\vec{k}=k\vec{N}$, ahol $\vec{N}$ a terjedés irányának egységvektora, így a fázis a következő alakra hozható:

$$\varphi=\omega t-\frac{\omega}{v}\vec{N}\cdot\vec{r}+\delta=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\delta$$

Belátható, hogy az elektromágneses hullámban az elektromos és mágneses részhullámok egymással fázisban vannak.

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\delta\right)$$

$$\vec{B}=\vec{B}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\delta\right)$$

A kiinduló Maxwell egyenleteket felhasználva belátható, hogy

$$\nabla\cdot\vec{E}=0\Rightarrow\vec{E}_0\perp\vec{k}\text{, illetve }\vec{E}_0\perp\vec{N}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\vec{B}_0\perp\vec{k}\text{, illetve }\vec{B}_0\perp\vec{N}$$

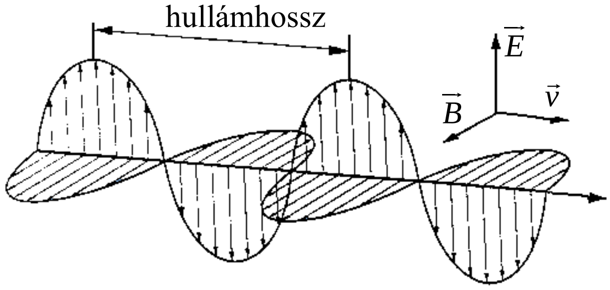
Mivel a rezgési amplitúdó merőleges a terjedési irányra az elektromágneses hullám transzverzális! A longitudinális hullámban a rezgési és a terjedési irány párhuzamos. A transzverzális hullámban a terjedési és rezgési irány egymásra merőleges, tehát a fizikai állapotot leíró vektor a terjedésre merőleges síkban fekszik. A korábban felírt két részhullámot lineárisan poláros hullámnak nevezzük.

Megj.: A természetes fény nem ilyen síkban poláros hullám, hanem cirkulárisan poláros. Ez azonban síkban polárossá tehető.

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}_0 = -v\vec{N} \times \vec{B}_0$$

$$\vec{E}_0 = -\vec{v} \times \vec{B}_0$$

Ilyen kapcsolat áll fenn a hullámban a $\vec{B}_0$ mágneses és az $\vec{E}_0$ elektromos amplitúdó között, illetve $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$ így $\left\{ \vec{N}, \vec{E}_0\, \vec{B}_0 \right\}$.



Energia terjedése az elektromágneses hullámban:

Az elektromágneses hullámban energia terjed, ennek leírására vezessük be az elektromágneses energia-áramsűrűség vektor azaz Pointing vektor:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \ .$$

S abszolút értéke megmutatja, hogy az energiaáramlás irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt mennyi elektromágneses energia lép át. Iránya az elektromágneses energia áramlási irányát határozza meg.

$$[S] = 1\frac{J}{sm^2} = 1\frac{W}{m^2}$$

Belátható, hogy homogén izotróp szigetelőben az elektromágneses energia a fázisfelületek mozgásának irányban terjed és éppen fázissebességgel:

$S = w_{em} v$, illetve $\vec{S} = w_{em} \vec{v}$, ahol

$$w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} \ .$$