6. Ampere Maxwell-féle gerjesztési törvény. Eltolási áramsűrűség. Maxwell-egyenletek teljes rendszere.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény differenciális alakja:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (*)$$

A töltésmegmaradás törvény differenciális alakja:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Képezzük a $(*)$ egyenlet divergenciáját:

$$\underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right)}_{0} = \nabla \cdot \vec{J}$$

Ampère törvényből következik, hogy:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

A töltésmegmaradásból következik, hogy:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Az Ampère-törvény tehát instacionárius esetben ellentmondásban áll a töltésmegmaradással. Mivel a töltésmegmaradásban hiszünk, és a felírt alakban hibát nem találhatunk, az Ampère-törvényt kell korrigálnunk.

Mivel $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, így

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Tehát a korrekciós tag: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Ha az Ampère-törvény jobb oldalát kiegészítjük a $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ taggal, akkor az ellentmondás feloldódik.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

Képezzük ismét a divergenciáját:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Visszakaptuk a töltésmegmaradás törvényét, és ezzel az ellentmondás megszűnik.

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ az ún. **eltolási áramsűrűség**, és a törvény az **Ampère-Maxwell-féle törvény lokális alakja**.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Mágneses mezőt tehát nemcsak mágneses dipólusok vagy áramok gerjeszthetnek, időben változó elektromos mező is képes mágneses mezőt gerjeszteni. A jelenség szimmetrikus megfelelője a Faraday-féle indukciónak. Az eltolási áram, nem áram a szó eredeti értelmében, mert nem mindig kapcsolódik hozzá töltések mozgása. Azonban éppúgy gerjeszt mágneses mezőt, mint a vezetési áram.

Integráljuk a lokális alakot egy rögzített irányított nyílt A felületre:

$$\int_A \left(\nabla \times \vec{H}\right)\cdot d\vec{A} = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A} + \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{A}$$

$$\oint_g \vec{H}\cdot d\vec{s} = I_A + \frac{d}{dt}\int_A \vec{D}\cdot d\vec{A}$$

Ez az egyenlet az Ampère-Maxwell törvény integrális alakja.
Rögzített zárt vonalra a mágneses térerősség vonalintegrálja egyenlő a vonalra feszített felületet átdöfő áramok erősségének és a felületen átmenő elektromos fluxus változásának gyorsaságával.

Nézzük meg, hogyan aránylik egymáshoz jó vezetőben $\left(\gamma \cong 10^7 \frac{1}{\Omega m}\right)$ a vezetési és az eltolási áramsűrűség. Legyen:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \sin \omega t$$

$$\vec{j}_{vez} = \gamma \vec{E} = \gamma \vec{E}_0 \sin \omega t$$

$$\vec{j}_{elt} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \omega \cos \omega t$$

$$\frac{j_{vez,0}}{j_{elt,0}} = \frac{\gamma E_0}{\varepsilon_0 E_0 \omega} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{\gamma}{\frac{1}{4\pi k}\cdot 2\pi\nu} = \frac{2k\gamma}{\nu}$$

Ez a csúcsértékek nagyságának hányadosa.

$$\frac{j_{vez,0}}{j_{elt,0}} = \frac{2k\gamma}{\nu} = \frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 10^7}{\nu} \approx \frac{2\cdot 10^{17}}{\nu}$$

Technikai váltóáram esetén jó vezetőben a vezetési áramsűrűség sok nagyságrenddel felülmúlja az eltolási áramsűrűséget. Nem hanyagolható el az eltolási áram, szigetelőben, ahol nem folyhat vezetési áram, illetve ha a frekvencia az optikai tartományba esik.

A Maxwell-egyenletrendszer:

1. Ampère-Maxwell féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H}\cdot d\vec{s} = I_A + \frac{d}{dt}\int_A \vec{D}\cdot d\vec{A} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

2. Faraday-féle indukció-törvény:

$$\oint_g \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. Elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

4. Mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Alapvektorok: elektromos térerősség $\vec{E}$
mágneses indukció $\vec{B}$

Polarizáció vektorok: elektromos polarizáció $\vec{P}$

mágnesezettség $\vec{M}$

Kombinált vektorok: elektromos indukció $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

mágneses térerősség $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

A $\vec{D}$ és $\vec{H}$ vektorok bevezetését a kémiai anyag jelenléte tette szükségessé.
A Maxwell-egyenletrendszer megoldásához anyagegyenletek is szükségesek, míg azonban a Maxwell-egyenletek egzakt természettörvények, az anyagegyenletek csak bizonyos anyagokra igazak és közelítő jellegűek.

Lineáris anyagegyenletek: $\vec{P} = \chi\, \varepsilon_0 \vec{E}$ $\quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{M} = \chi\, \vec{H}$ $\quad \vec{B} = \mu \vec{H}$

$\vec{j} = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}_i \right)$

Peremfeltételek: $E_{t1} = E_{t2}$ $\quad B_{n1} = B_{n2}$

$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$ $\quad H_{t1} = H_{t2}$