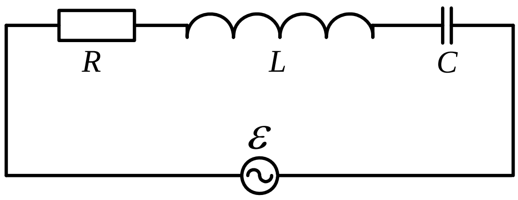
5. Soros áramkör gerjesztett elektromágneses rezgései. Megoldás komplex függvényekkel. Impedancia és fázis ábra. Teljesítmény. Váltakozó áram jellemzése effektív értékekkel.

Tekintsük az alábbi áramkört:



Az általánosított hurok törvény:

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}\,.$$

Legyen a gerjesztő elektromotoros erő egy harmonikus függvény $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, $\mathcal{E}_0$ a gerjesztő elektromotoros erő amplitúdója, ω pedig a körfrekvenciája.
Emlék: gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} + \kappa\dot{x} + Dx = F_0 \cdot \cos \omega t$$

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

az analóg mennyiségek:

$$m \to L$$

$$\kappa \to R$$

$$D \to \frac{1}{C}$$

$$x \to Q$$

$$F_0 \to \mathcal{E}_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \to \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha = \frac{\kappa}{2m} \to \frac{R}{2L}$$

A megoldás:

$$Q_{inh.ált.} = Q_{hom.ált.} + Q_{inh.part.}$$

A homogén egyenlet általános megoldása időben lecseng. Elegendően hosszú idő után, a tranziens jelenségeket követően, a megoldást az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása szolgáltatja. Ezt a megoldást keressük, jelölje a továbbiakban Q az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását.

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

$$L\ddot{Q}'i + R\dot{Q}'i + \frac{1}{c}Q'i = \mathcal{E}_0\, i \sin \omega t\,,$$

Ez utóbbi egy segédegyenlet! Fizikai jelentése nincs!

$$L\left(\ddot{Q}+\ddot{Q}'i\right)+R\left(\dot{Q}+\dot{Q}'i\right)+\frac{1}{C}\left(Q+Q'i\right)=\mathcal{E}_0\left(\cos\omega t+i\sin\omega t\right)$$

Felhasználva az Euler-relációt: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ és bevezetve a komplex töltést:

$$\overline{Q}=Q+Q'i$$

$$L\ddot{\overline{Q}}+R\dot{\overline{Q}}+\frac{1}{C}\overline{Q}=\mathcal{E}_0e^{i\omega t}$$

Bevezetve a komplex elektromotoros erőt: $\overline{\mathcal{E}}=\mathcal{E}_0e^{i\omega t}$

$$L\ddot{\overline{Q}}+R\dot{\overline{Q}}+\frac{1}{C}\overline{Q}=\overline{\mathcal{E}}$$

Keressük az egyenlet megoldását az alábbi alakban:

$$\overline{Q}=\overline{Q_0}\cdot e^{i\omega t}$$

$\overline{Q_0}$, a töltés komplex amplitúdója.

$$\dot{\overline{Q}}=i\omega\overline{Q_0}\,e^{i\omega t}=i\omega\overline{Q}=\overline{I}\,,$$

ez éppen a komplex áram.

$$\ddot{\overline{Q}}=\left(i\omega\right)^2\overline{Q}_0e^{i\omega t}=-\omega^2\overline{Q}$$

$$-L\omega^2\overline{Q}+i\omega R\overline{Q}+\frac{1}{C}\overline{Q}=\overline{\mathcal{E}}$$

$$i\omega\overline{Q}\left(R-\frac{L\omega^2}{i\omega}+\frac{1}{i\omega C}\right)=\overline{\mathcal{E}}$$

$$i\omega\overline{Q}\left(R+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\right)=\overline{\mathcal{E}}$$

$$\overline{I}\,\overline{Z}=\overline{\mathcal{E}}\,,$$

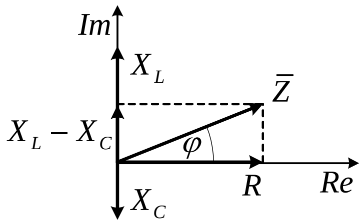
$$\overline{I}=\frac{\overline{\mathcal{E}}}{\overline{Z}}\,,$$

Ez a komplex Ohm-törvény.
A komplex impedancia:

$$\overline{Z}=R+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\qquad \overline{Z}=R+i\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$x_L=L\omega \qquad \text{induktív reaktancia}$$

$$x_C=\frac{1}{\omega C} \qquad \text{kapacitív reaktancia}$$



A valós impedancia:

$$\left|\overline{Z}\right|=Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$tg\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

A $\overline{Z}$ komplex impedancia trigonometrikus alakja:

$$\overline{Z} = Z\, e^{i\varphi}$$

$$\overline{I} = \frac{\overline{\mathcal{E}}}{\overline{\overline{Z}}} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{Z e^{i\varphi}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$\overline{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 \cos(\omega t - \varphi) + i\, I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

Csak a valós résznek van jelentése, így a megoldás:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

ahol $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$, az áram valós csúcsértéke.

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

ha $\varphi > 0$ akkor I késik $\mathcal{E}$ -hoz képest, ha $\varphi < 0$ akkor I siet $\mathcal{E}$ -hoz képest.

Az egyes kapcsolási elemek pólusain mérhető feszültségek:

$$\overline{U}_R = \overline{I}\, R = I_0 R\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \varphi)} = U_{R0} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$U_R(t) = U_{R0} \cos(\omega t - \varphi), \text{ ahol } U_{R0} = I_0 R$$

Az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel fázisban van!

$$\overline{U}_C = \frac{\overline{Q}}{C} = \frac{\overline{I}}{i\omega C} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega C} I_0\, e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 X_C e^{i\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$U_C(t) = U_{C0} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \text{ ahol } U_{C0} = I_0 X_C$$

A kondenzátor feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel késik az áramhoz képest!

$$\overline{U}_L = L\ddot{\overline{Q}} = L\dot{\overline{I}} = L I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}(i\omega) = L\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} e^{i\frac{\pi}{2}} = X_L I_0 e^{i\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

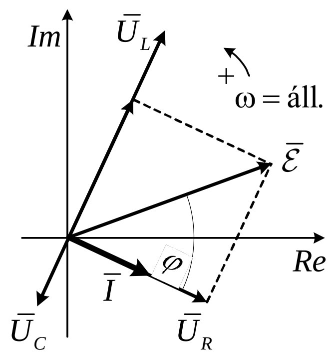
$$U_L(t) = U_{L0} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \text{ ahol } \quad U_{L0} = I_0 X_L$$

Az ideális tekercs feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel siet az áramerősséghez képest!

Komplex fázisábra:

$$L\dot{\overline{I}} + R\overline{I} + \frac{1}{C}\overline{Q} = \overline{\mathcal{E}}$$

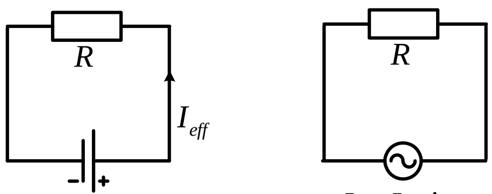
$$\overline{U}_L + \overline{U}_R + \overline{U}_C = \overline{\mathcal{E}}$$



Megj.: $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, és $\frac{1}{i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

A komplex tárgyalásmód nem használható tranziens leírására, valamint akkor, ha $\mathcal{E}(t)$ nem szinuszos vagy koszinuszos függvény. A váltakozó áram időben periódikusan változó erősségű áramot jelent.

Váltakozó áram jellemzése effektív értékekkel:
A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius áram erősségét jelenti.
Akár a vizsgált váltakozó áram folyik át egy fogyasztón, akár egy I_{eff} erősségű stacionárius áram, egy periódus alatt az elektromos munkavégzés megegyezik.



$$I = I_0 \sin \omega t$$

$$W = I_{eff}^2 RT, \qquad W = \int_0^T I^2(t) R dt$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)dt = \frac{I_0^2}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\right]_0^T = \frac{I_0^2}{2}$$

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \text{ analóg módon } \mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

Teljesítmény soros váltakozó áramú körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye:

$$P(t) = \mathcal{E} I = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \, I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Jelölje $T = \frac{2\pi}{\omega}$ a periódusidejét a gerjesztő elektromos erőnek. A koszinuszok szorzatát alakítsuk át összeggé:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

Legyen $\alpha=\omega t$ és $\beta=\omega t-\varphi$.

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t-\varphi)+\cos\varphi\right]=\cos\omega t\cos(\omega t-\varphi)$$

$$P(t)=\frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\left[\cos(2\omega t-\varphi)+\cos\varphi\right]$$

Mivel a periodikus függvény időátlaga zérus:

$$\overline{P}=\frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\cos\varphi=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi=\mathcal{E}_{eff}I_{eff}\cos\varphi$$

$\overline{P}=\mathcal{E}_{eff}I_{eff}\cos\varphi$