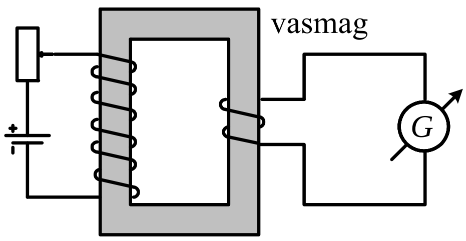
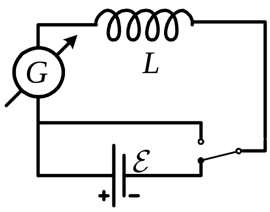
4. Nyugalmi indukció. Faraday-féle indukció törvény, integrális és differenciális alak. Szolenoid tekercs önindukciós együtthatója. Mágneses mező energiája és energiasűrűsége. Huroktörvény általánosítása egyetlen hurok esetében.

Nyugalmi indukció:
A mozgási indukcióra felírt fluxus szabály alapján felmerülhet a kérdés, hogy indukálódik-e áram akkor, ha a fluxus változást nem a vezetőhurok mozgása, hanem a mágneses mező időbeli változása okozza?
Kölcsönös indukció jelensége:



Mindaddig, amíg a változtatható ellenállással változtatjuk az áramerősséget a primer körben, változni fog az általa gerjesztett mágneses tér indukciója. Ezeket az indukcióvonalakat a szekunder kör körülfogja és változik a szekunder fluxus. A tapasztalat szerint, amíg a fluxust változtatjuk, a szekunder körben áram folyik. Az áram létrejöttének oka itt nem lehet a Lorentz-erő, hiszen a szekunder vezető nem mozog. A fenti kérdésre tehát igen a válasz. A jelenséget úgy magyarázhatjuk, hogy az időben változó mágneses mező elektromos teret indukál, és ez az elektromos mező mozdítja el a szekunder vezeték szabad elektronjait. Ez a nyugalmi indukció jelensége. Kölcsönös indukció során a primer kör áramának változása indukál feszültséget a szekunder körben.

Önindukció:



A tapasztalat szerint, ha a tekercset az áramforrásról lekapcsoljuk és egyben rövidre zárjuk, akkor az árammérő egy ideig még csökkenő áramerősséget jelez. A jelenség magyarázata az, hogy az áramforrást lekapcsolva, de rövidre zárva az áramkört, változik a mágneses mező fluxusa, ez elektromos mezőt indukál, és ez tartja fenn az áramot egy ideig. A jelenség neve önindukció, az indukált feszültséget a vezetőkör saját áramának változása okozza.

A tapasztalat szerint a Faraday-féle indukciótörvény alakja a nyugalmi indukcióra:

$$\overset{o}{U} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ azaz}$$

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Rögzített zárt vonal mentén az indukált elektromos feszültség egyenlő a zárt vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével. Felhasználva, hogy a hely szerinti integrálás, és az idő szerinti differenciális sorrendje felcserélhető (a A felület rögzített), valamint alkalmazva a Stokes-tételt nyerhetjük:

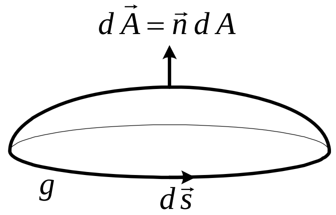
$$\int_A \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\int_A \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{A} = 0\,,$$

ez az integrál bármely A-ra eltűnik, így a Faraday törvény lokális vagy differenciális alakja:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,.$$

Az indukált elektromos mező nem örvénymentes, ezért nem is konzervatív!



Elektromos mezőt tehát nem csak töltések kelthetnek, hanem időben változó mágneses mező is.

- A töltések keltette mező forrásos, és ha a töltések nyugszanak, vagy áramlásuk stacionárius akkor örvénymentes.
- Az időben változó mágneses mező keltette indukált elektromos mező forrásmentes és örvényes.

Szolenoid tekercs önindukciós együtthatója:

Hosszú vékony tekercsben:

$$H = \frac{NI}{l}\text{, illetve } B = \mu\frac{NI}{l}$$

Egyetlen menet által körülfogott fluxus (menetfluxus):

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu\frac{NA}{l} I\,.$$

A tekercsfluxus egyenlő a menetfluxusok összegével, így

$$\Phi = N\Phi_m = \mu\frac{N^2 A}{l} I\,.$$

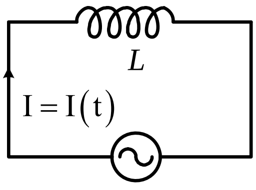
A tekercsfluxus arányos az őt gerjesztő árammal. Az arányossági tényezőt önindukciós együtthatónak nevezzük.

$$\Phi = LI\,,$$

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}\,.$$

$$\left[\mathrm{L}\right] = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{henry} = 1\mathrm{H}$$

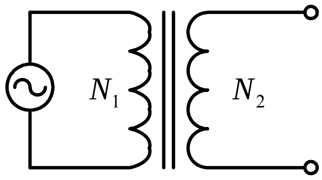
Ha egy tekercsben váltakozó áram folyik, akkor $\Phi = LI(t)$



$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} = -L\dot{I}$$

Sokmenetű tekercs esetén mivel L arányos N^2-tel a tekercs önindukciós együtthatója olyan nagy, hogy az egyben az egész vezető kör induktivitásának tekinthető.

Kölcsönös indukció együtthatója szoros csatolás esetén:



$$B_1 = \mu\frac{N_1 I_1(t)}{l}$$

$$\Phi_1 = \mu\frac{N_1 A}{l} I_1(t)\,.$$

Szoros csatolás esetén ez egyben a menetfluxusa a 2-es tekercsnek is:

$$\Phi_{12} = N_2\Phi_1 = \mu\frac{N_1 N_2 A}{l} I_1(t)\,.$$

Az arányossági tényező:

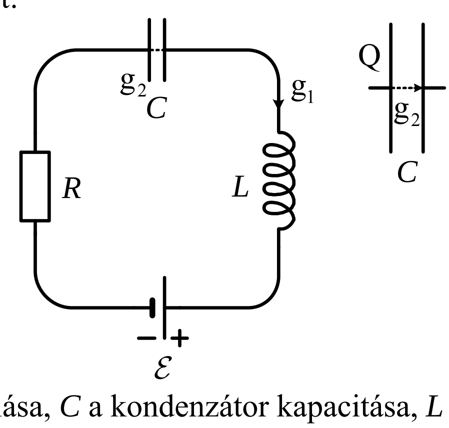
$$M = L_{12} = \mu\frac{N_1 N_2 A}{l}$$

a kölcsönös indukció együtthatója.

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1$$

$$U_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

A hurok törvény általánosítása egyetlen hurok esetén:
Tekintsük a következő hurkot:



Legyen R a teljes kör ellenállása, C a kondenzátor kapacitása, L a tekercs önindukciós együtthatója (és egyben az egész hurokké), $\mathcal{E}$ pedig az alkalmazott elektromotoros erő. Írjuk fel nyugalmi indukció Faraday-törvényét a hurokra:

$$\overset{o}{U} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_g \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\int_{g_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{g_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -L\frac{dI}{dt}$$

g zárt görbe, g_1 a vezetőben halad, g_2 pedig a kondenzátor lemezei közötti szigetelőben.

$\int_{g_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E\,ds = \frac{Q}{C}$, a kondenzátor lemezei közötti feszültség. Mivel $\rho\vec{j} = \vec{E} + \vec{E}_*$,

így $\vec{E} = \rho\vec{j} - \vec{E}_*$. Használjuk ezt fel az első integrálban:

$$\int_{g_1} \rho\vec{j}\cdot d\vec{s} - \int_{g_1} \vec{E}_*\cdot d\vec{s} + \frac{Q}{C} = -L\dot{I}.$$

Mivel $\int_{g_1} \rho\vec{j}\cdot d\vec{s} = I\int_{g_1} \rho\frac{ds}{A} = IR$, és $\int_{g_1} \vec{E}_*\cdot d\vec{s} = \mathcal{E}$ így:

$$IR - \mathcal{E} + \frac{Q}{C} = -L\dot{I}$$

A kondenzátor töltése azért változik, mert az áram töltést szállít oda, dt idő alatt ez:

$$dQ = Idt\text{, így } I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

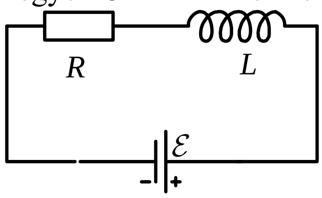
$$\dot{I} = \ddot{Q}$$

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

Ez egy inhomogén, lineáris, másodrendű, állandó együtthatós differenciál egyenlet a töltésre.

A mágneses energia (tekercs energiája):

Tekintsük az alábbi soros RL kört, legyen $\mathcal{E}$ az áramforrás elektromotoros ereje.



Írjuk fel rá a hurokegyenletet, $L\dot{I} + RI = \mathcal{E}$, és szorozzuk végig az egyenletet I-vel:

$$L\dot{I}I + RI^2 = \mathcal{E}I\text{, ekkor}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}I^2\right)}{dt} = I\dot{I},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) + I^2R = \mathcal{E}I.$$

$\mathcal{E}I$ a telep teljesítménye, időegység alatt ennyi munkát végeznek az idegen erők, ennyivel fogy az akkumulátorban tárolt energia. I^2R a fogyasztó által felvett teljesítmény, a fogyasztó a környezetének hőt ad le. Az első tag pedig azt mutatja, hogy a telep munkavégzésének egy része a tekercsben felépülő mágneses mező energiájának változtatására fordítódik.

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2\text{, a mágneses mező energiája.}$$

Ha $I = 0$ akkor $W_m = 0$

Szolenoid tekercs esetén:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI\,I = \frac{1}{2}\Phi I.$$

Mivel $H = \frac{NI}{l}$, így $I = \frac{Hl}{N}$ és $\Phi = NBA$, ekkor

$$W_m = \frac{1}{2} NBA \frac{Hl}{N} = \frac{1}{2} B\,H\,Al$$

$V = Al$ a tekercs és közelítőleg ez a mágneses mező térfogata:

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} V \,.$$

A mágneses mező energia sűrűsége (térfogategységre eső energia):

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Bár a kifejezést egy vékony tekercs esetén származtattuk, ez általánosan is igaz. Egy tetszőleges V térfogatban foglalt mágneses energia:

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV \,.$$