5. Pontrendszerek mechanikája. A kontinuumok Euler-féle leírása. Tömegmérleg. Bernoulli-egyenlet. Hidrosztatika. Felhajtóerő és Arhimédesz törvénye.

Tömegpontrendszerek

Tömegpontok meghatározott halmaza, mindig ugyanazok a pontok tartoznak hozzá. A pontok száma legyen *n,* az i-edik pont tömege pedig m_i. A pontrendszer tagjai egymással is meg a külvilággal is kölcsönhatásban állhatnak. Az egymással való kölcsönhatáshoz rendelt erőket belső erőknek, a külvilággal való kölcsönhatást leíró erőket pedig külső erőknek nevezzük.

Belső erők
- test - test kölcsönhatás: $\vec{F}_{ik}$ az erő, amelyet a k-adik fejt ki az i-edik pontra
- test - mező kölcsönhatás: $\vec{F}_{ik}^{\,*}$ az erő, amely a k-adik pont mezőjében az i-edikre hat

$\vec{B}_{ik} = \vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ik}^{\,*}$ a teljes belső erő. Az akció reakció tétele miatt $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$.

Általában $\vec{F}_{ik}^{\,*}$ *és* $\vec{F}_{ki}^{\,*}$ nem egymásnak az ellentettje. A mechanikában azonban a legtöbb esetben fennáll az akció – reakció elve a *-os erők között is, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\vec{F}_{ik}^{\,*} = -\vec{F}_{ki}^{\,*}$.

Az i-edik pontra ható teljes külső erő legyen $\vec{F}_i$. A rendszer i-edik elemének mozgásegyenlete:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + \sum_k \vec{B}_{ik}\ ,\ i = 1,2 \ldots n, \qquad \vec{B}_{ii} = \vec{0}$$

Ezt az *n* – számú egyenletet adjuk össze:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_k \vec{B}_{ik}$$

Legyen $\vec{p}$ a rendszer összimpulzusa

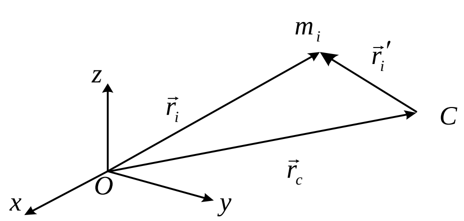
$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \ \text{ ekkor } \ \dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i$$

jelölje $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ a pontrendszerre ható összes külső erőt. Mivel a kettős összeg párokba rendezhető pl: $\vec{B}_{ik} = -\vec{B}_{ki}$, így bármely pár összege $\vec{0}$ és így az egész összeg eltűnik. Így az impulzustétel pontrendszerre:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}\ .$$

A pontrendszer impulzusának változási gyorsasága egyenlő a pontrendszerre ható külső erők összegével.

Tömegközéppont az a geometriai pont, amelyre a tömegpontrendszer sztatikai nyomatéka eltűnik, azaz $\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = \vec{0}$



$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{r}_c ,$$

$$\sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_c \right) = \vec{0}$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{r}_c \sum_i m_i = \vec{0}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} .$$

A tömegközéppont helye egyértelműen meghatározható. A tömegközéppont helyvektorát úgy kapjuk, hogy az origóra számolt teljes sztatikai nyomatékot elosztjuk a pontrendszer teljes tömegével. Legyen $m = \sum_i m_i$. A tömegközéppont sebessége:

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{p}}{m} .$$

A pontrendszer impulzusa egyenlő össztömegének és a tömegközéppontja sebességének szorzatával. Deriváljuk a fenti egyenletet az idő szerint:

$$\vec{a}_c = \frac{\dot{\vec{p}}}{m} = \frac{\vec{F}}{m} , \text{ így}$$

$$m\vec{a}_c = \vec{F} .$$

Ez a tömegközépponti tétel (az impulzustétel más alakja).
A tömegközéppont gyorsulását úgy számíthatjuk ki, hogy a pontrendszerre ható külső erők összegét elosztjuk a pontrendszer össztömegével. Zárt a mechanikai rendszer, ha külső erők nem hatnak rá. Inerciarendszerben a zárt tömegpontrendszer tömegközéppontja nem gyorsulhat, vagy áll, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Kontinuumok mechanikája:
A szilárd, cseppfolyós és légnemű anyag molekulákból illetve atomokból épül fel. A makroszkopikus jelenségek leírásában azonban először a fenomenologikus (leíró) módszert használjuk. Ilyenkor eltekintünk az anyag atomos szerkezetétől, és azzal a feltevéssel élünk, hogy az anyagot jellemző fizikai mennyiségek a helynek, és az időnek folytonos, sőt differenciálható függvényei. Az ilyen anyagot nevezzük kontinuumnak.

A kontinuum mechanika tehát a folyadékok, és gázok áramlásának és egyensúlyának a leírása.

A folytonos eloszlású anyag egyik fontos jellemzője a sűrűsége. Az átlagsűrűség definíciója:

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V} ,$$

ahol Δm a ΔV térfogatban foglalt tömeg. Illetve a pontbeli sűrűség:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} .$$

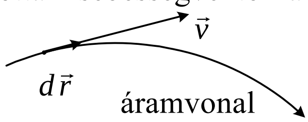
E szerint egy adott tartományban foglalt tömeg: $m = \int_V \rho dV$. A sűrűség függhet a helytől és az időtől. $\rho = \rho(\vec{r}, t) = \rho(\mathrm{x, y, z}, t)$. Ha , akkor a test homogén, ilyenkor $m = \rho V$.
Mértékegysége $[\rho] = 1\frac{kg}{m^3}$.

További fontos mennyiség a nyomás. A folyadék egy pontjában a nyomás a felületre merőleges erő és a pont körüli kicsiny felület hányadosa: $\overline{p} = \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ezt nevezzük átlag nyomásnak, illetve a pontbeli nyomás: $p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$. Ha egy felület mentén *p*=állandó akkor természetesen a $p = \frac{F}{A}$ egyenletnek megfelelően $F = pA$. A nyomás skalár mennyiség, és mértékegysége $[p] = \frac{[F]}{[A]} = 1\frac{N}{m^2} = 1Pa$.

A kontinuumok mozgásának egyik lehetséges leírása a Lagrange-módszer, ilyenkor az egyes kiszemelt folyadékrészekre a Newton féle mozgásegyenletet írjuk fel, és kezdeti feltételekkel megoldjuk.

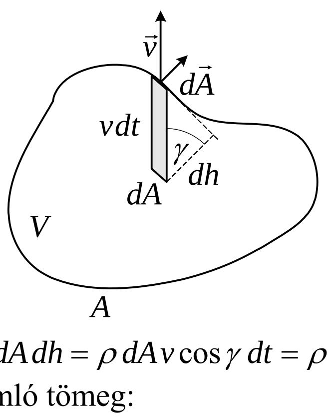
Gyakoribb az úgynevezett Euler-féle leírás. Ilyenkor azt vizsgáljuk, hogyan változnak a folyadék által elfoglalt térben az áramlást leíró fizikai mennyiségek, például a sebesség a sűrűség vagy a nyomás. $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$, $p = p(\vec{r}, t)$, $\rho = \rho(\vec{r}, t)$.

A kontinuumáramlás áramvonalakkal szemléltethető, ezek olyan görbék, melynek bármely pontbeli érintője tartó egyenese az ottani sebességvektornak.



Az áramvonalak differenciálegyenlete: $\vec{v} \times d\vec{r} = 0$

Tömegmérleg (kontinuitási egyenlet):
A tömeg megmaradó mennyiség, nem keletkezik, és nem tűnik el. Matematikai alakban fogalmazzuk meg ezt. Tekintsünk egy nyugvó *V* térfogatot. A *dt* idő alatt a *dA* felületen kiáramló tömeg:



$$dm = \rho\, dA\, dh = \rho\, dA\, v \cos\gamma\, dt = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}\, dt$$

Időegység alatt *dA* felületen kiáramló tömeg:

$$\frac{dm}{dt}=\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

A zárt felületen kiáramló tömeg

$$\oint_A \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

A V térfogatban foglalt tömeg változási gyorsasága pedig:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

Így a kontinuitási egyenlet integrális alakja, amely a tömegmegmaradást fejezi ki:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV=-\oint_A \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

Az idő szerinti differenciálás és a helykoordináták szerinti integrálás sorrendje felcserélhető. Az egyenlet másik oldalán pedig alkalmazzuk a Gauss integrál átalakítási tételt így:

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\int_V \nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\right)dV \text{ , azaz } \int_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\right)\right]dV=0\text{ ,}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\right)=0$$

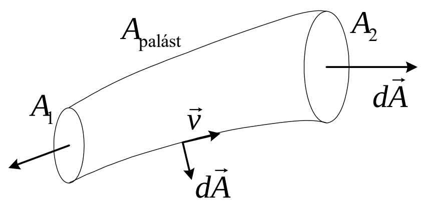
Ez utóbbi egyenlet a tömegmegmaradás törvényének differenciális vagy lokális alakja.
A nabla vektort már korábban láthattuk:

$$\nabla=nabla$$

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Stacionárius vagy időben állandósult áramlás esetén

$$\frac{d}{dt}\int \rho dV=0\text{ ,így }\oint \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}=0$$



$$\int_{A_1}\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}+\int_{A_{palást}}\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}+\int_{A_2}\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}=0$$

A palástra vonatkozó integrál eltűnik:

$$\int_{A_{palást}}\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}=0$$

$$-\rho_1 v_1 A_1+\rho_2 v_2 A_2=0$$

Így a kontinuitási egyenlet vékony áramcsőre stacionárius áramlás esetén:

$$\rho_1 v_1 A_1=\rho_2 v_2 A_2\text{ ,}$$

ha a közeg összenyomhatatlan, $\rho=áll$.

$$v_1 A_1=v_2 A_2\text{ .}$$

A Bernoulli egyenlet:
Összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlása vékony áramcsőben, homogén gravitációs mezőben. Munkatétel segítségével származtatható:

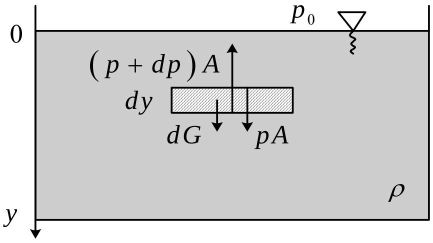
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Hidrosztatika:

Az összes fizikai mennyiség időben állandó, alkalmas vonatkoztatási rendszerből $\vec{v} = 0$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

A folyadékrészek súlyából származik a hidrosztatikai nyomás. Az egymás fölött elhelyezkedő folyadékrétegek egymásra nyomóerőt fejtenek ki. Szabadon eső folyadékban nincs hidrosztatikai nyomás, ilyenkor az érintkező felületek között megszűnik az erő. Tekintsünk nyugvó folyadékot homogén gravitációs mezőben. A szabad felszínen a nyomás legyen p_0.



Szemeljük ki a folyadék belsejében egy hasábot melynek vastagsága dy keresztmetszete A súlya dG. Legyen az alaplapján a nyomás p a fedőlapján $p + dp$. A folyadékhasáb egyensúlyának feltétele, hogy a rá ható erők eredője nulla.

$$pA + dG - (p + dp)A = 0,$$

$$dG - dpA = 0,$$

$$Ady\rho g = dpA,$$

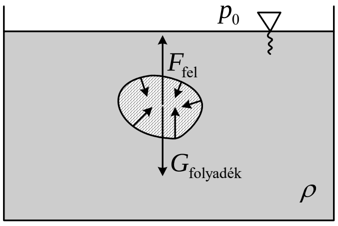
$$\rho g = \frac{dp}{dy}$$

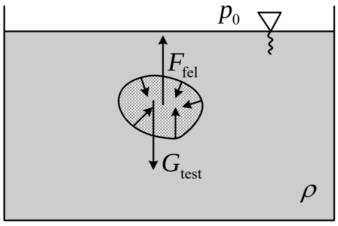
A fenti egyenletből az látszik, hogy a nyomás lineáris függvénye a y mélységnek.

$$p = p_0 + \rho g y$$

A hidrosztatikai nyomás folyadék szabad felszíne alatt y mélységben $\rho g y$ az edény alakjától független, p_0 pedig a szabadfelszíni nyomás

Felhajtóerő, Archimedes törvénye:





A folyadékba vagy gázba merülő test hatásfelületén ébredő nyomóerőrendszer eredője függőlegesen felfelé mutat és nagysága megegyezik a kiszorított folyadék vagy gáz súlyával. Ezt az erőt nevezzük felhajtóerőnek. Támadáspontja a kiszorított folyadék tömegközéppontjában van.