4. Lineáris csillapítatlan szabad rezgés. Lineáris csillapított szabad rezgés. Gyenge csillapítás. Ger-jesztett rezgés. Amplitúdó rezonancia.

Lineáris csillapítatlan szabad rezgés:
Tételezzük fel, hogy a tömegpontra a kvázielasztikus vagy közel rugalmas erő hat, ez a kitéréssel arányos, de azzal ellentétes irányú:

$$F_x = -Dx, \quad D > 0$$

Ekkor a tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -Dx$$

Oldjuk meg ezt a másodrendű differenciálegyenletet az *x(t)* függvényre:

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

Ekkor az egyenlet:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x\,,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ez egy másodrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatójú, és közönséges differenciálegyenlet. Az általános megoldás a két független partikuláris megoldás lineáris kombinációja.
A partikuláris megoldások:

$$x_1 = \sin\omega_0 t\,,$$

$$x_2 = \cos\omega_0 t\,.$$

Lineáris kombinációjuk:

$$x(t) = C_1\sin\omega_0 t + C_2\cos\omega_0 t\,,$$

vagy más alakban:

$$x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \delta\right)$$

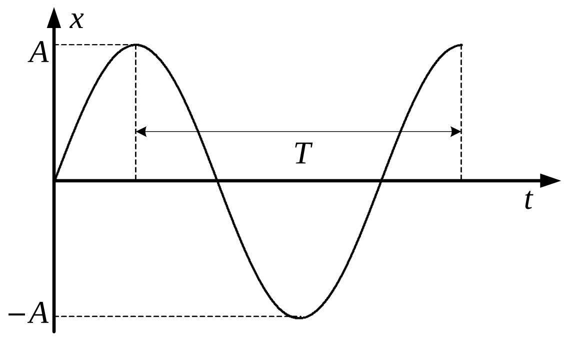
Az első megoldásban C_1, és C_2, a másodikban pedig A, és δ integrációs állandók. A kitérés maximális értéke az amplitúdó A, δ pedig a kezdőfázis, ω_0 a körfrekvencia. A rezgés periódusideje *T*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

A rezgés frekvenciája:

$$f_0 = \frac{1}{T}\,.$$

A kitérés idő függvény látható a következő ábrán:



A rugalmas erő konzervatív erő, ekkor igaz, hogy:

$$\vec{F} = -\nabla V$$

V a potenciális energia. Egy dimenzióban:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

a rugalmas erő pedig:

$$F_x = -Dx$$

$$-Dx = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Így a potenciális energia:

$$V = \frac{1}{2}Dx^2 + C$$

Válasszuk nullának a potenciális energiát az egyensúlyi helyzetben, így $C = 0$.
A rugalmas potenciális energia tehát:

$$V(x) = \frac{1}{2}Dx^2 .$$

Lineáris csillapított szabad rezgés:
A tömegpontra a már ismert rugalmas erő hat $F_x = -Dx$, valamint egy (folyadék) súrlódási vagy csillapító erő, amely kis sebesség esetén a sebességgel arányos, de vele ellentétes irányú:

$$S_x = -\kappa \dot{x},$$

$\kappa > 0$ csillapítási tényező.

$$m\ddot{x} = -Dx - \kappa \dot{x},$$

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 .$$

Bevezetve a két szokásos jelölést:

$$\alpha = \frac{\kappa}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

A homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

A megoldást keressük az alábbi formában:

$$x_p = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0, \text{ de } e^{\lambda t} \neq 0,$$

így a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 .$$

Ennek a gyökei:

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \, .$$

A három lehetséges eset:

Ha $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, akkor gyenge csillapítás, ha $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$, akkor kritikus csillapítás, ha pedig $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, akkor erős csillapítás esete valósul meg. Amennyiben a gyökök különböznek, akkor a két egymástól független partikuláris megoldás lineáris kombinációját kell venni:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \, .$$

Gyenge csillapítás esetén vezessük be a következő jelölést:

$$\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \, ,$$

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm i\gamma$$

A megoldás:

$$x(t) = C_1 e^{(-\alpha + i\gamma)t} + C_2 e^{(-\alpha - i\gamma)t} = e^{-\alpha t}\left(C_1 e^{i\gamma t} + C_2 e^{-i\gamma t}\right)$$

Az Euler-relációt felhasználva:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \, ,$$

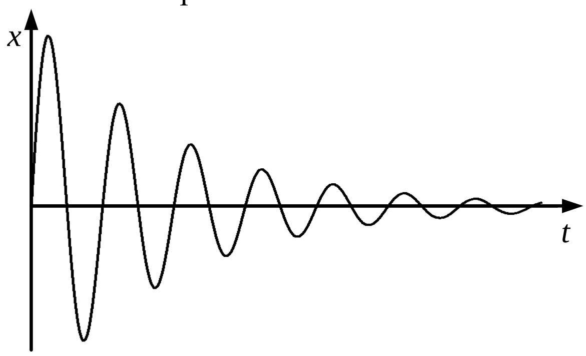
$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[C_1\left(\cos\gamma t + i\sin\gamma t\right) + C_2\left(\cos\gamma t - i\sin\gamma t\right)\right],$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos\gamma t + i\left(C_1 - C_2\right)\sin\gamma t\right].$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A\cos\gamma t + B\sin\gamma t\right] = Ce^{-\alpha t}\sin\left(\gamma t + \delta\right),$$

A folyamatot a csillapodás miatt kváziperiódikusnak nevezzük. A kitérés idő függvény pedig:



Megjegyzés:

Ha $\alpha = \omega_0$ tejesül, akkor a kritikus csillapításnak megfelelő megoldás:

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{-\alpha t} \, .$$

Ha $\alpha > \omega_0$, akkor erős csillapítás van, ilyenkor:

$$x(t) = \left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right)e^{-\alpha t} \text{, ahol } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Gerjesztett lineáris rezgés, rezonancia:

Tekintsünk egy olyan mozgást, ahol a tömegpontra a már ismert két erőn kívül egy periodikus gerjesztő erő hat melynek ω a körfrekvenciája.

$$F_x = -Dx \text{ kvázielasztikus erő,}$$

$$S_x = -\kappa \dot{x} \text{ közegellenállás,}$$

$$F_x = F_0 \cos\omega t \text{ gerjesztő erő.}$$

A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -Dx - \kappa\dot{x} + F_0\cos\omega t$$

A jelölések:

$$2\alpha = \frac{\kappa}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t.$$

Ez egy másodrendű, lineáris, állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet, melynek általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege:

$$x_{\text{inh.ált}} = x_{\text{hom.ált}} + x_{\text{inh.part}}.$$

Mivel $x_{\text{hom.ált}}$ időben exponenciálisan csökken, ezért elegendő idő után elhanyagolhatóvá válik. Az állandósult állapotban $x_{\text{inh.ált}} = x_{\text{inh.part}}$. A rezgés megindulását követő tranziens jelenségtől eltekintünk és az állandósult megoldást keressük. Ezt jelöljük *x*-szel.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$

Vegyük fel az alábbi segédegyenletet, melyben *i* a komplex egység:

$$i\ddot{y} + i2\alpha\dot{y} + i\omega_0^2 y = if_0\sin\omega t$$

a két egyenletet összegezve és bevezetve az új komplex változót

$$z = x + iy,$$

az alábbi egyenletet nyerhetjük:

$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}$$

Az átírás során felhasználtuk az Euler-relációt:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Keressük ennek a komplex egyenletnek a megoldását a következő alakban:

$$z = Ae^{i(\omega t-\delta)}.$$

$$-A\omega^2 e^{i(\omega t-\delta)} + 2\alpha Ai\omega e^{i(\omega t-\delta)} + \omega_0^2 Ae^{i(\omega t-\delta)} = f_0 e^{i\omega t}$$

Egyszerűsítsük az egyenletet az $e^{i\omega t}$ taggal:

$$Ae^{-i\delta}\left[-\omega^2 + 2\alpha i\omega + \omega_0^2\right] = f_0,$$

$$A(\cos\delta - i\sin\delta)\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\alpha\omega i\right] = f_0.$$

Ez egy komplex algebrai egyenlet, melyet két valós egyenlettel tudunk kielégíteni:

$$A\left[\cos\delta\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\alpha\omega\sin\delta\right] = f_0$$

$$A\left[\sin\delta\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\alpha\omega\cos\delta\right] = 0.$$

Az egyenletrendszer két ismeretlenje A, és δ, és a megoldásuk:

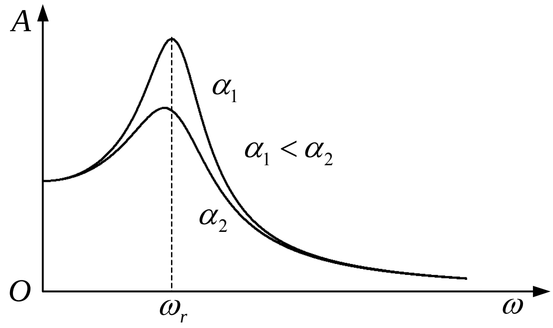
$$\tan\delta = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

A keresett megoldás valós része pedig:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

Az általunk felvett megoldás tehát valóban kielégíti a differenciál egyenletet, ha A és δ az előbb meghatározott alakú. A stacionárius megoldás tehát egy egyszerű harmonikus rezgés. A létrejövő rezgés körfrekvenciája megegyezik a gerjesztő erő körfrekvenciájával és azt δ fáziskéséssel követi. A rezgés amplitúdója függ a gerjesztő erő amplitúdójától és körfrekvenciájától. A következő ábra azt mutatja, hogy a létrejövő rezgés amplitúdója maximális értéket vesz fel egy bizonyos frekvencián. Ezt rezonancia frekvenciának nevezzük. A két különböző görbe különböző csillapításokhoz tartozik. Ha a csillapítás csökken, a rezonanciagörbe élesebbé válik.



Ez a megoldás, amit korábban alkalmaztunk csak a tranziens folyamat lejátszódása után írja le a rezgést. Ha a tranziensre is kíváncsiak vagyunk, akkor más módszerrel kell a differenciál egyenletet megoldani.