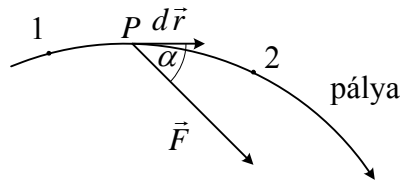


### 3. A mechanikai munka definíciója. A munkatétel. Fizikai mező, erőter fogalma. A konzervatív mező és tulajdonságai. Potenciális energia. A mechanikai energiatétel.

#### Munka:

Ha a tömegpont  $\vec{F}$  erő hatására elmozdul, és a linearizált elmozdulása  $d\vec{r}$ , akkor az erő a ponton  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  elemi munkát végez.



$$\delta W = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha,$$

$d\vec{r}$  a linearizált elmozdulás:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = v \vec{\tau} dt = ds \vec{\tau}$$

Ha a tömegpont  $\vec{F}$  erő hatására elmozdul az  $\widehat{12}$  pályaíven, akkor a munkát az erő vonalintegrálja adja az  $\widehat{12}$  görbeíven.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

A munka tehát a pillanatnyi teljesítmény időintegrálja.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_{s_1}^{s_2} F_{\tau} ds$$

Az erőnek csak a tangenciális komponense végez munkát.

Integráljuk a teljesítménytételt egy  $t_1$   $t_2$  időintervallumra

$$P = \frac{dT}{dt}, \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt,$$

$$W_{12} = T_2 - T_1, \text{ ahol}$$

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

Valamely időközben a részecske mozgási energiája annyit változik amennyi munkát az erők ezalatt végeztek rajta. Ez az állítás a munkatétel.

#### Fizikai mező, erőter:

Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonos differenciálható függvénye.

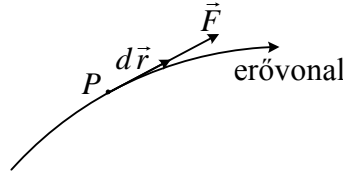
a) stacionárius a mező, ha  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$ , azaz  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

b) tömegarányos a mező, ha  $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{m}$ ,  $\vec{f}$  független az erőt elszenvedő test tömegétől,

kizárólag a mezőt jellemzi neve: térerősség

c) homogén a mező, ha  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ , tehát a helytől nem függ

A továbbiakban tekintsünk stacioner mezőket. Szemléltetésük erővonalakkal történhet. Ezek olyan irányított görbék, melyeknek érintő egységvektora megmutatja az érintési pontbeli erő irányát.



Az erővonalak differenciálegyenlete:

$$\vec{F} \times d\vec{r} = 0$$

### Konzervatív mező:

Konzervatív mező az olyan stacionárius erőtér, amelyben az elemi munka teljes differenciál, vagyis van olyan függvénye a helykoordinátáknak, melynek teljes linearizált megváltozása az elemi munka. A  $V(\vec{r})$  függvényt melynek negatív megváltozása az elemi munka, potenciális helyzeti vagy kölcsönhatási energiának hívjuk.

$$\delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -dV$$

Derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz, \\ -dV &= -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz, \text{ így} \\ F_x dx + F_y dy + F_z dz &= -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz, \end{aligned}$$

azaz

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

Röviden vektor alakban:

$$\vec{F} = -\nabla V = -\text{grad } V$$

ahol a nabra vektor:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \text{ vagy } \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

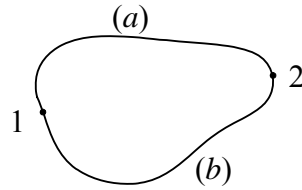
Konzervatív mezőben az erő a helyzeti energia negatív gradiense.

Írjuk fel a kapcsolatot konzervatív mezőben az erő által végzett munka és a potenciális energia között:

$$\begin{aligned} \delta W &= -dV \\ W_{12} &= \int_{12} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 dV = -[V]_1^2 = -[V_2 - V_1] = V_1 - V_2, \end{aligned}$$

Az erő által végzett munka az 1, 2 pontok között egyenlő a potenciális energia negatív megváltozásával, azaz éppen a kezdő és végpontbeli helyzeti vagy potenciális energia különbségét adja. Ez azt jelenti, hogy a munkavégzés konzervatív mezőben két pont között független a görbétől, csak a kezdő és végponttól függ:

$$\int_{1(a)}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1(b)}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Konzervatív mezőben egy zárt görbe mentén végzett munka zérus:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = V_1 - V_1 = 0$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \text{ vagy } \overset{0}{W} = 0$$

A potenciális energia értéke egy állandó erejéig határozatlan. Azt a helyet, ahol a potenciális energiát 0-nak választjuk, tetszőlegesen vehetjük fel. Legyen a referencia pont az  $\vec{r}_0$ , és válasszuk itt a potenciális energiát zérusnak,  $V(\vec{r}_0) = 0$ , ekkor a potenciális energia egy tetszőleges  $\vec{r}_1$  pontban:

$$-dV = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} dV = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$V(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

A tömegpont potenciális energiája az  $\vec{r}_1$  pontban egyenlő azzal a munkával, amit a konzervatív mező végez, miközben a tömegpont elmozdul az  $\vec{r}_1$  pontból az  $\vec{r}_0$  referencia pontba.

Írjuk fel a munkatételt konzervatív mezőben:

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

$$W_{12} = V_1 - V_2,$$

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1,$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Vezessük be a mechanikai energiát úgy, mint a mozgási és helyzeti energia összegét:

$$E = T + V,$$

$$E_1 = E_2$$

Konzervatív mezőben a mechanikai energia állandó. Ez a mechanikai energia megmaradásának tétele.

Tételezzük fel, hogy nem-konzervatív erők is hatnak, a konzervatív erők mellett. A természetben ezek gyakran egyidejűleg hatnak egy tömegpontra. Ilyenkor:

$$W_{12}^K + W_{12}^{NK} = T_2 - T_1$$

$$W_{12}^K = V_1 - V_2$$

$W_{12}^K$  a konzervatív erők munkája,  $W_{12}^{NK}$  pedig a nem-konzervatív erőké.

$$W_{12}^{NK} = T_2 + V_2 - T_1 - V_1$$

$$W_{12}^{NK} = E_2 - E_1$$

Ha nem-konzervatív erők is hatnak, akkor a munkájuk egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.