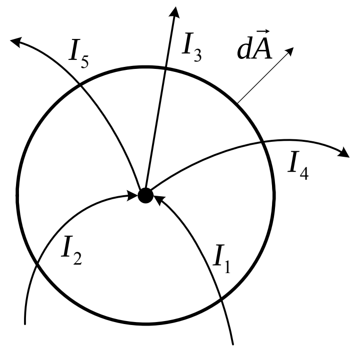
14. Kirchoff törvények. A Joule-törvény integrális alakja. Kirchoff törvények alkalmazása. Ellenállás-ok soros és párhuzamos kapcsolása. Wheatstone-híd kapcsolás. Mérőműszerek méréshatárának kiterjesztése.

Összetett áramkörök (vonalas hálózatok):

Tekintsünk a továbbiakban vonalas vezetőkből és áramforrásokból összeállított hálózatokat. **Csomópont** a hálózat azon pontja ahol kettőnél több vezeték fut be. **Ág** a hálózat olyan szakasza, amelynek két vége csomópont a belsejében azonban nincs több csomópont. Egy ágon belül az áramerősség mindenütt megegyezik. Az egy ágon belüli elemeket **sorosan kapcsolt**ak nevezzük. A **hurok** a hálózat olyan zárt irányított vonala, amely a hálózat ágaiból épül fel. **Párhuzamos**nak nevezzük a fogyasztók kapcsolását akkor, ha a megfelelő sarkaik azonos potenciában vannak.

Kirchoff I. törvénye (csomóponti törvény):
Stacionárius esetben a töltésmegmaradás törvénye: $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$. Ha ezt vékony vonalas vezetőkben folyó áramokra alkalmazzuk, akkor $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$ egyenletet nyerhetjük. Egy csomópontba befolyó és onnan kifolyó áramok algebrai (előjeles) összege zérus. Az előjelezés az alábbiak szerint történik: $I > 0$ ha $\vec{J} \cdot d\vec{A} > 0$, és $I < 0$ ha $\vec{J} \cdot d\vec{A} < 0$



Pl.: $I_3 + I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0$

Kirchoff II. törvénye (hurok törvény):

Egy hurok mentén a feszültségek algebrai összege zérus.

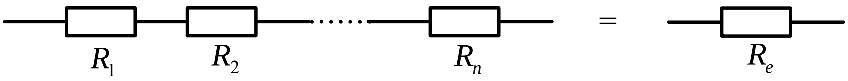
$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

A hálózatszámítás menete:

- az egyes ágakban tetszés szerinti áramirányokat vesszük fel,
- felírjuk az egymástól független csomóponti törvényeket,
- megfelelő számú hurokban tetszőleges körüljárási irányt veszünk fel,
- felírjuk a hurok törvényeket, ellenálláson áthaladva megegyező áramirány és körüljárás esetén $+IR$ egyéként $-IR$, ideális áramforráson áthaladva előbb pozitív pólusát érintve $+\mathcal{E}$ egyébként $-\mathcal{E}$,
- a csomóponti és huroktörvények alkotta, az áramokban lineáris egyenletrendszert megoldjuk az ismeretlenekre.

A Kirchoff törvények alkalmazásai:

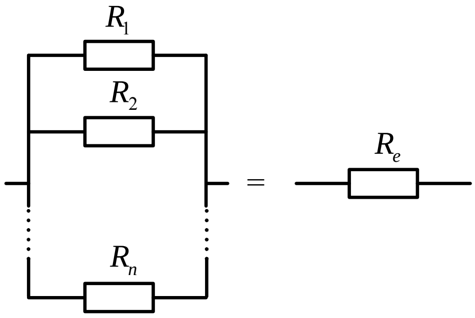
1. Ellenállások soros kapcsolása: A Kirchoff törvények alkalmazásával könnyen belátható, hogy a soros kapcsolás helyettesítő vagy eredő ellenállása az egyes ellenállások összege.



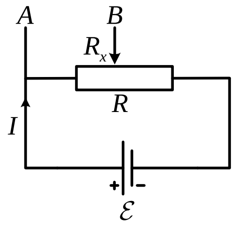
A helyettesítő vagy eredő ellenállás: $R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i$

2. Ellenállások párhuzamos kapcsolása: Ha az ellenállásokat párhuzamosan kapcsoljuk, akkor az eredő ellenállás reciproka egyenlő az egyes ellenállások reciprokainak összegével:

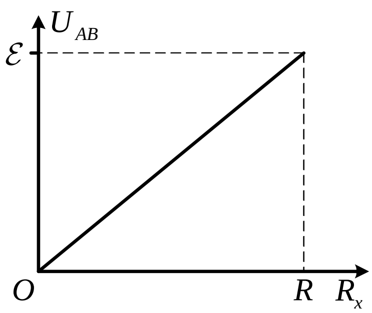
$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$



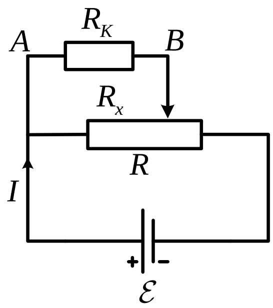
3. Feszültségosztó (potenciométeres) kapcsolás. Gyakran előfordul az, hogy egy fix feszültségű áramforrás segítségével változtatható feszültséget kell előállítanunk. Ezt a feladatot valósíthatjuk meg terheletlen feszültségosztó kapcsolás segítségével:

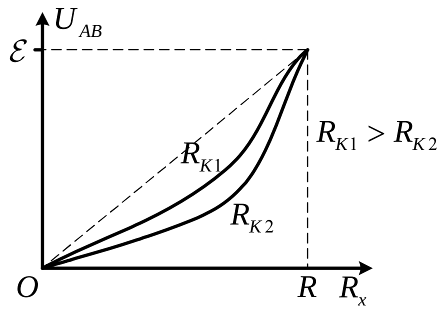


A főkörben folyó áramerősség $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, így az R_x ellenálláson eső feszültség $U_{AB} = R_x I = \mathcal{E}\frac{R_x}{R}$. A terheletlen potenciométer két kapcsán megjelenő feszültség lineáris függvénye az R_x ellenállásnak, és $0 \le U_{AB} \le \mathcal{E}$.



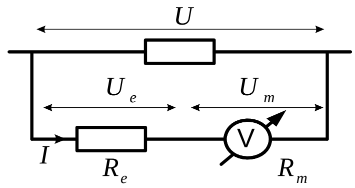
Terhelt potenciométeres kapcsolás esetén a változtatható feszültséget egy fogyasztóra kötjük. Ilyenkor a karakterisztika már nem lineáris.





4. Feszültségmérő és árammérő műszerek méréshatárának kiterjesztése

Feszültségmérő előtét ellenállásának méretezése. U feszültséget akarunk mérni egy U_m méréshatárú műszerrel, ilyenkor egy R_e ellenállást alkalmazunk.



$$U_m + U_e = U\,.$$

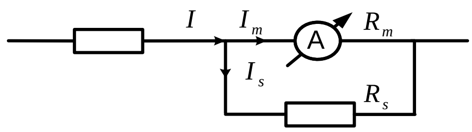
R_e és R_m soros kapcsolása miatt $I = \dfrac{U_m}{R_m} = \dfrac{U_e}{R_e}$, az előtétre eső feszültség $U_e = U_m \dfrac{R_e}{R_m}$.

$$U = U_m + U_m \frac{R_e}{R_m} = U_m \left(1 + \frac{R_e}{R_m}\right)$$

A méréshatár n-szeres kiterjesztése esetén $n = \dfrac{U}{U_m} = 1 + \dfrac{R_e}{R_m}$, tehát, az előtét ellenállás: R_e

$$R_e = (n-1) R_m$$

Árammérő sönt ellenállásának méretezése. I áramot akarunk mérni egy I_m méréshatárú műszerrel, ilyenkor egy R_s ellenállást alkalmazunk.



$$I = I_m + I_s$$

R_s és R_m párhuzamos kapcsolása miatt $I_m R_m = I_s R_s$, így a sönt árama $I_s = I_m \dfrac{R_m}{R_s}$.

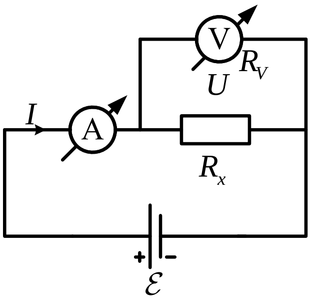
$$I = I_m + I_m \frac{R_m}{R_s} = I_m \left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right)$$

A méréshatár n-szeres kiterjesztése esetén $n = \dfrac{I}{I_m} = 1 + \dfrac{R_m}{R_s}$ tehát a sönt ellenállás R_s

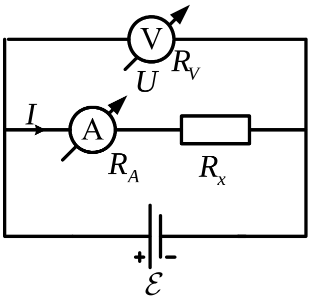
$$R_s = \frac{R_m}{n-1}\,.$$

5. Ellenállásmérés Ohm törvénye alapján mutatás műszerekkel

„Kis ellenállás” mérése: $R_x \ll R_V$. Ilyenkor $R_x = \frac{U}{I}$, és a mérés relatív hibája $\varepsilon_1 = \frac{R_x}{R_x + R_V} \approx \frac{R_x}{R_V}$



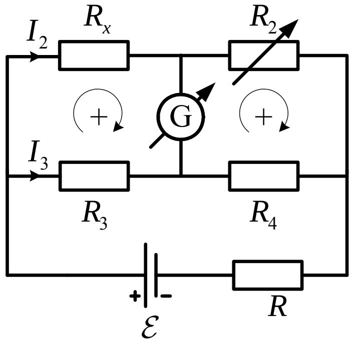
„Nagy ellenállás” mérése esetén ha $R_A \ll R_x$, inkább az alábbi kapcsolást alkalmazzuk:



Az ismeretlen ellenállás ilyenkor is $R_x = \frac{U}{I}$, és a mérés relatív hibája: $\varepsilon_2 = \frac{R_A}{R_x}$. A digitális műszerek pontosabbak, az áramköri viszonyokat gyakorlatilag nem befolyásolják. A digitális
műszerek pontosabbak, az áramköri viszonyokat gyakorlatilag nem befolyásolják. A digitális
feszültségmérőben alkalmazott tranzisztoros erősítő miatt a belső ellenállás nagy $\sim 10 M\Omega$.
Az árammérést szintén feszültségmérésre vezetik vissza.

6. Ellenállásmérés Wheatstone-híddal

Tekintsük az alábbi kapcsolást, legyen R_x az ismeretlen ellenállás, R_2 pedig egy szabályozható ellenállás. Az elrendezést összeállítva a galvanométeren áram fog folyni. Az R_2 ellenállást addig szabályozzuk, amíg a híd árammentes nem lesz, $I_G \approx 0$. Ekkor a Wheatsone-híd kiegyenlített állapotban van. Az ilyen mérési módszert nullmódszernek nevezzük. Az alkalmazásához egy érzékeny árammérő úgynevezett galvanométer kell. A kiegyenlített állapotra felírhatóak az alábbi hurokegyenletek:



$I_2 R_x - I_3 R_3 = 0$, és $I_2 R_2 - I_3 R_4 = 0$.

$$I_2 R_x = I_3 R_3$$
$$I_2 R_2 = I_3 R_4$$

Végül az ismeretlen ellenállás: $R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}$.

A Wheatsone híd $1\Omega - 10^6\,\Omega$ tartományban használható ellenállás mérésére.

A stacionárius áram munkája és teljesítménye:

Ha a fogyasztó be és kivezetése közötti feszültség U_{12} és rajta *t* idő alatt $Q = It$ töltés áramlik át, akkor a mező munkája: $W = QU_{12} = U_{12} I\,t$. Ez annak a munkának az értéke, amit a mező végez, az U_{12} feszültségű szakaszon *t* idő alatt miközben a vezetékben *I* erősségű áramot hajt. Az elektromos mező munkája megegyezik a vezeték belső energiájának növekedésével. Az Ohm törvény segítségével ezt két további alakban is kifejezhetjük. Amennyiben a fogyasztó ellenállása *R,* az elektromos áram munkája: $W = U_{12} I \cdot t = I^2 R \cdot t = \frac{U_{12}^2}{R} t$. Homogén fémes fogyasztó esetén termikus egyensúlyban a fogyasztó éppen annyi úgynevezett Joule hőt ad le a környezetének, mint amennyi munkát az elektromos mező végez. A stacionárius áram által végzett munka mértékegysége joule, de a gyakorlatban használják a kWh egységet is: $1kWh = 3,6 \cdot 10^6\,J$. A stacionárius áram teljesítménye pedig: $P = U_{12} I = I^2 R = \frac{U_{12}^2}{R}$.

Teljes áramkör esetén az idegen erők munkája az áramforrásban:

$$W^* = \mathcal{E} Q = \mathcal{E}\, I\, t = I^2 \left(R + r\right) t = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r} t$$
$$P^* = \mathcal{E} I$$

Belátható, hogy egy *R* ellenállású homogén fémes fogyasztót, és $\mathcal{E}$ elektromos erejű *r* belső ellenállású áramforrást tartalmazó teljes áramkörben a generátor munkája maradéktalanul Joule-hővé alakul.