

### 13. Differenciális és integrális Ohm törvény. Vékony vonalas vezető ellenállása. Az ellenállást befolyásoló tényezők. Ohm törvény teljes áramkörre. Egyenáramú hálózatok.

**Kapcsolat az elektromos térerősség és a létrejövő áramsűrűség között, differenciális Ohm-törvény:**

Kristályos vezetőben vizsgáljuk az áramlást:  $\vec{j} = -en_e \vec{v}_e$ , egy kiszemelt szabad elektron sebessége legyen  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ . Itt  $\vec{V}$  a rendezett mozgás sebessége,  $\vec{u}$  pedig a rendezetlen mozgás sebessége. Mivel  $\vec{u} = |\vec{u}| \sim \sqrt{T}$ , ezért  $\vec{u} \gg V$ . Jelölje  $\bar{\lambda}$  a közepes szabad úthosszat, az elektronoknak az ionokkal való két egymást követő ütközése között átlagosan befutott útját. Ekkor átlagosan  $\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\vec{u}}$  idő telik el két egymást követő ütközés között. Két ütközés között az elektron gyorsulása:

$$\vec{a}_e = \frac{\vec{F}_e}{m_e} = \frac{-e(\vec{E} + \vec{E}^*)}{m_e}$$

Mivel ütközéskor a rendezett mozgás megszűnik, így az ütközés után közvetlenül  $\vec{V} = 0$  a következő ütközés előtt pedig

$$\vec{V}_{\max} = \vec{a}_e \bar{\tau} = \frac{-e}{m_e} \frac{\bar{\lambda}}{\vec{u}} (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

A rendezett mozgás átlagsebessége tehát

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{0} + \vec{V}_{\max}}{2}$$

$$\vec{v}_e = -\frac{e}{2m_e} \frac{\bar{\lambda}}{\vec{u}} (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Tekintve, hogy  $\vec{j} = -en_e \vec{v}_e$  így:

$$\vec{j} = \frac{e^2 \bar{\lambda}}{2m_e} \frac{n_e}{\vec{u}} (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Vezessük be a fajlagos vezetőképességet:  $\gamma = \frac{e^2 \bar{\lambda}}{2m_e} \frac{n_e}{\vec{u}}$ , így nyerhetjük a differenciális Ohm-törvényt:

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

A fajlagos vezetőképesség reciproka a fajlagos ellenállás  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ , ekkor  $\rho \vec{j} = \vec{E} + \vec{E}^*$ .

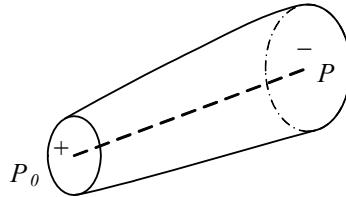
Fémek esetén a hőmérséklet növekedésével  $n_e$  nem változik számottevően, de  $\vec{u}$  nő így  $\gamma$  a vezetőképesség csökken. Félvezetők esetén a hőmérséklet növekedésével  $n_e$  gyorsabban nő, mint az  $\vec{u}$  így végül a vezetőképesség nő.

A differenciális Ohm-törvény vagy Ohm féle anyagi egyenlet nem egy szigorú arányosság  $\vec{j}$  és  $\vec{E}$  között, mivel a  $\gamma$  nem független  $\vec{j}$ -től. Például fémekben ha nő a  $\vec{j}$  akkor a hőmérséklet is növekszik és  $\gamma$  lecsökken.

Megjegyzés: Szupravezetés (Kamerling Onnes). Bizonyos anyagok vezetőképessége egy meghatározott hőmérsékleten végtelenné válik. Ólom esetén például  $\sim 7K$  és  $\frac{1}{\gamma} = 0$ . Az eddig tárgyalt modell a szupravezetés leírására nem alkalmas, ilyenkor az elektron hullám tulajdonságát kell felhasználni.

### Az Ohm-törvény integrális alakja vezetőben:

Fogyasztóban nincs idegen tér:  $\vec{E}^* = 0$  Tekintsük az alábbi fogyasztót, és írjuk fel a potenciálkülönbséget  $P_0$  és  $P$  között, valamint az áramerősséget.



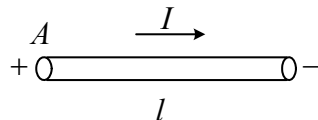
$$U = \int_{+}^{-} \vec{E} d\vec{r}, \text{ illetve } I = \int_A \vec{J} d\vec{A}$$

Homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) a tapasztalat szerint arányos a vezető két vége közötti feszültséggel. Hányadosukat a vezető két vége közötti ellenállásnak nevezzük, jele  $R$ .

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_{+}^{-} \vec{E} d\vec{r}}{\int_A \vec{J} d\vec{A}}$$

Az ellenállás mértékegysége  $[R] = 1 \frac{V}{A} = 1ohm = 1\Omega$ .

Számoljuk ki a vékony, állandó keresztmetszetű vezető ellenállását. Vékony vonalas vezetőről akkor beszélhetünk, ha a vezető keresztmetszetét jellemző méret elhanyagolható a vezető hosszához képest. (ilyenkor vékony áramcsőnek tekinthető).



$U = \int_{+}^{-} \vec{E} d\vec{r} = \int_{+}^{-} E dr = E \int_{+}^{-} dr = El$ , a differenciális Ohm-törvény segítségével:  $U = El = \rho J l$ ,

$$I = \int_A \vec{J} d\vec{A} = J A$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{J A} = \frac{\rho J l}{J A} = \rho \frac{l}{A}$$

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Ha a vezetősál mentén a fajlagos ellenállás vagy a keresztmetszet változik, akkor

$$R = \int_g \rho(s) \frac{ds}{A(s)}$$

### Az ellenállást befolyásoló tényezők:

1. anyagi minőség

2. mechanikai igénybevétel (összenyomáskor általában csökken, nyújtáskor nő)  
nyúlásmérő bélyeg
3. hőmérséklet

Tapasztalat szerint növekvő hőmérséklettel a fémek és a legtöbb fémötvözet ellenállása nő, a szén, a konstantán ötvözet, a félvezetők (és elektrolitok) ellenállása csökken.

A fémek, az ötvözetek és a szén fajlagos ellenállásának hőmérsékletfüggését leíró hatványsor:

$$\rho_T = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2 + \dots), \text{ ahol}$$

$$\rho_T = \rho(T), \text{ és } \rho_0 = \rho(T_0), \text{ ami általában } 0 \text{ }^\circ\text{C-hoz vagy } 20 \text{ }^\circ\text{C-hoz tartozik, } \Delta T = T - T_0.$$

Néhány száz  $^\circ\text{C}$ -os tartomány esetén a hőmérsékletfüggés lineárisnak tekinthető:

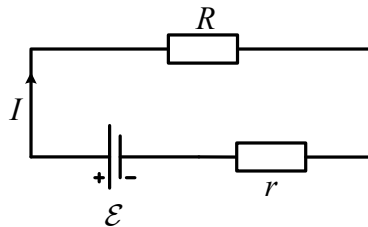
$$\rho_T = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

$\alpha$  a lineáris hőtágulás együtthatója, ha  $\alpha > 0$  akkor PTK, ha  $\alpha < 0$  NTK ellenállásról beszélünk. Ha a vezeték hőtágulásától eltekintünk, akkor

$$R_T = R_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

### Integrális Ohm-törvény teljes áramkörre:

Tekintsünk egy vékony vonalas vezetőkből és áramforrásból álló zárt áramkört. A vékony vonalas vezetők ellenállását koncentrált paraméterrel szemléltetjük, és  $R$ -rel jelöljük. Az áramforrásnak, mint vezetőtestnek az ellenállását jelölje  $r$ , –ezt belső ellenállásnak nevezzük –, elektromotoros erejét pedig  $\mathcal{E}$ . Határozzuk meg, hogyan függ az áramerősség az áramforrás, és az áramkör adataitól. Integráljuk a differenciális Ohm-törvényt erre a zárt hurokra. A  $g$  görbe irányítása megegyezik az áram irányával. A zárt  $g$  görbét két részből tesszük össze:  $g = g_k + g_b$ , jelöli a zárt görbe áramforráson kívüli és áramforráson belüli részét.



$$\rho \vec{j} = \vec{E} + \vec{E}^*,$$

$$\oint_g \rho \vec{j} \cdot d\vec{s} = \oint_g (\vec{E} + \vec{E}^*) \cdot d\vec{s}$$

$$\underbrace{\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=0 \text{ mivel a stat. elektromos mező konzervatív}} + \underbrace{\oint_g \vec{E}^* \cdot d\vec{s}}_{=0 \text{ mivel az áramforráson kívül } \vec{E}^* = 0} = \underbrace{\int_{+g_k} \vec{E}^* \cdot d\vec{s}}_{\text{elektromotoros erő}} + \underbrace{\int_{-g_b} \vec{E}^* \cdot d\vec{s}}_{\text{elektromotoros erő}}$$

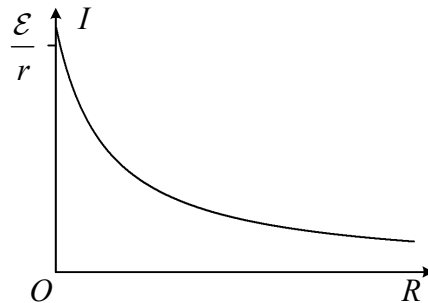
$$\oint_g \rho \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int_{+g_k} \rho \vec{j} \cdot d\vec{s} + \int_{-g_b} \rho \vec{j} \cdot d\vec{s} = I \underbrace{\int_{+g_k} \rho \frac{ds}{A}}_R + I \underbrace{\int_{-g_b} \rho \frac{ds}{A}}_r$$

Felhasználva, hogy  $\vec{j} \cdot d\vec{s} = j ds = I \frac{ds}{A}$ , ahol  $I$  a körben folyó áram,  $A$  pedig a vezető keresztmetszete. Ekkor:

$$\mathcal{E} = I(R + r), \text{ illetve } I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Ez a teljes áramkörre vonatkozó integrális Ohm-törvény. A kör áramának  $I$  erőssége arányos az áramforrás  $\mathcal{E}$  elektromotoros erejével és fordítva arányos a fogyasztó valamint az áramforrás belső ellenállásának összegével. Ha  $R = 0$  akkor nyerhetjük a rövidzárási áramot:

$$I_{\text{röv}} = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

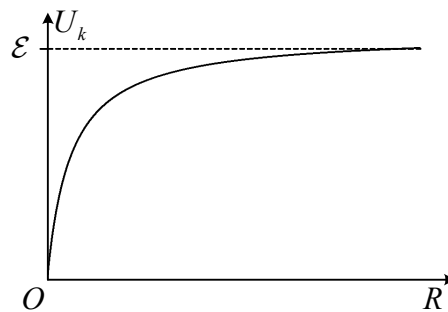


Az  $R$  ellenállású fogyasztóra jutó feszültséget kapcsolófeszültségnek nevezzük, ez egyben az áramforrás pólusai között mérhető feszültség:

$$U_K = IR = \mathcal{E} - Ir$$

Az áramforrás kapcsolófeszültsége  $I \neq 0$  esetén mindig kisebb, mint az elektromotoros erő  $\mathcal{E}$ .

$$U_K = IR = \mathcal{E} \frac{R}{R+r}$$



Ha  $R \gg r$  akkor  $I \approx 0$  és  $U_K \approx \mathcal{E}$ , ez az üres járási állapot, ha  $R \ll r$  akkor  $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$  és  $U_K \approx 0$ , ez a rövidzár állapot.