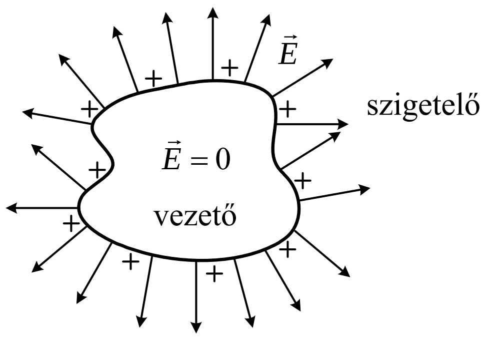
11. Vezetők elektrosztatikus mezőben. A kapacitás fogalma. Kondenzátorok. Síkkondenzátor kapacitása. Az elektrosztatikus tér energiája, energiasűrűsége.

Vezetők az elektrosztatikus mezőben:
Ha egy vezetőben elektromos tér van jelen, az a szabad töltéshordozókat rendezett mozgásra készteti. Sztatikai állapot akkor állhat be, ha a vezetőben nincs elektromos mező, és a térerősség nulla $\vec{E}=0$ (egyébként a szabad elektronok rendezetten mozognának). Ebből következően a vezetőben bármely két pont között a feszültség nulla.

$$U_{12}=U_1-U_2=\int_1^2 \vec{E}d\vec{r}=0 .$$

Sztatikai állapotban a vezető térfogata és felülete ekvipotenciális, vagyis potenciálja állandó. A térerősség nulla $\vec{E}=0$, ez azt is jelenti, hogy a térerősség tangenciális komponense is nulla $E_t=0$. Mivel $\vec{E}$ tangenciális összetevője nem ugrik két közeg határfelületén, a vezetőt határoló szigetelőanyagban a felület mentén az elektromos térerősségnek tangenciális összetevője nincs, vagyis a vezető körül a szigetelőben a térerősség mindenütt merőleges a vezető felületére.



Továbbá mivel vezetőben $\vec{E}=0$, így $\vec{D}=0$, felhasználva az alapegyenletet $\nabla\vec{D}=\rho$, nyerhetjük, hogy $\rho=0$. Sztatikában a vezető belsejében többlettöltés nincs. A vezetőre vitt töltés a külső felületre húzódik. $D_{n2}-D_{n1}=\delta$, de $D_{n1}=0$, így $D_{n2}=\sigma$.

Magányos vezetőtest kapacitása:
Vizsgáljuk meg, hogyan függ egy magányos vezető potenciálja a rá felhordott töltéstől. A szuperpozíció elve miatt, ha a vezető töltését a *k*-szorosára növeljük, akkor a tér minden pontjában $\vec{E}$ is a *k*-szorosára nő. Így a potenciálja is *k*-szorosára változik. A vezető potenciálja:

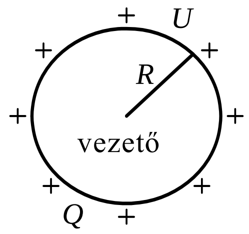
$$U=\int_P^\infty \vec{E}d\vec{r}\text{, és } U(\infty)=0$$

Tehát a vezető potenciálja tehát arányos a vezetőre vitt töltéssel, hányadosuk állandó ez nevezzük a vezető kapacitásának:

$$C=\frac{Q}{U}$$

Mértékegysége: $[C]=1\frac{C}{V}=1\,farad=1F$

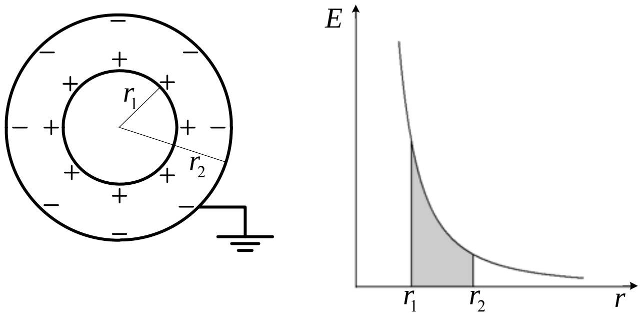
Számoljuk ki egy magányos vezető gömb kapacitását. Előbb határozzuk meg a vezető potenciálját, az integrálást egy sugárirányú egyenesre végezzük el. A térerősség: $\vec{E}=k\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$.



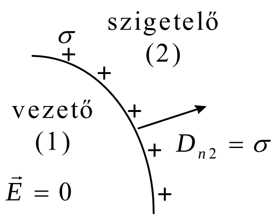
$$U(R)=\int_R^\infty k\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r d\vec{r}=\left[-k\frac{Q}{r}\right]_R^\infty=k\frac{Q}{R}$$, így a kapacitása

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{k\frac{Q}{R}}=\frac{R}{k}=4\pi\varepsilon_0 R$$

A magányos vezető gömb kapacitása arányos a sugarával. Belátható azonban, hogy a fémtestek vákuumbeli kapacitása túlságosan kicsiny hétköznapi méretek esetén. A kapacitás megnövelésének egyik módja, hogy a feltöltött vezető közelébe egy másik földelt vezetőt helyezünk. Így az integrálás útja lerövidül, a potenciál csökken, a kapacitás nő. A kondenzátor két vezető test (armatúrák vagy fegyverzetek) amelyek dielektrikummal vannak elszigetelve egymástól. A pozitív fegyverzetről induló indukcióvonalak a negatív fegyverzeten végződnek, a két fegyverzet töltése ellentetten egyenlő.



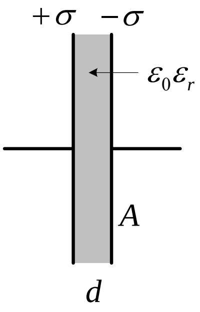
Az elrendezés kapacitása a pozitív fegyverzet töltésének és a két fegyverzet közötti potenciálkülönbségnek a hányadosa. $C=\dfrac{Q^+}{U_{12}}$, vagy röviden $C=\dfrac{Q}{U}$.



Már bemutattuk, hogy vezető és szigetelő határán, de már a szigetelőben az elektromos tér normális irányú, és $D_{n2}=\sigma$, ekkor $E_{n2}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$. Ha tehát vákuum helyett valamilyen dielektrikummal szigeteljük a kondenzátort, akkor a térerősség lecsökken az ε_r -ed részére és vele együtt a feszültség. Így a kapacitás megnő, ez a kapacitásnövelés másik módja.

Síkkondenzátor kapacitása:

Tekintsünk a továbbiakban egy síkkondenzátort. Jelölje d a fegyverzetek közötti távolságot. Legyen d jóval kisebb, mint a lemezek bármely lineáris mérete.



A két fegyverzet között $D = \sigma$, így

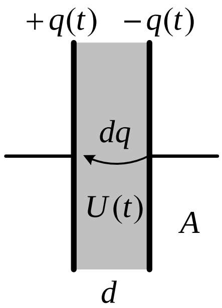
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$U_{12} = \int_1^2 E_{12} d\vec{r} = \int_1^2 \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} dr = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} d$$

$$C = \frac{Q^+}{U_{12}} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Az elektrosztatikus mező energiája:

Tekintsünk egy kondenzátort, melynek kapacitása C. Töltsük fel töltetlen állapotból úgy, hogy végül Q legyen a töltése. Egy közbülső állapotban jelölje a pillanatnyi állapot töltését q és a feszültséget U. Egy kicsiny dq töltést szállítsunk át az egyik lemezről a másikra, ekkor a végzett munka $dW = Udq$.



Mivel $C = \frac{q}{U}$, így $dW = \frac{q}{C} dq$, és a teljes feltöltés során végzett munka $W = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$.

A kondenzátor energiája, tehát $W = \frac{Q^2}{2C}$, illetve más alakban $W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$.

Tekintsünk egy síkkondenzátort: a kondenzátor belsejében a szélektől eltekintve a mező homogénnek tekinthető. Az energiája:

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \sigma A E d = \frac{1}{2} DE\, Ad = \frac{1}{2} DEV\,.$$

Felhasználtuk, hogy mivel $\sigma = \frac{Q}{A}$ illetve a térfogat $V = Ad$, a térerősség pedig $E = \frac{U}{d}$.

Az elektromos mező energiasűrűsége: $w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \vec{D}\vec{E}$, mértékegysége $[w] = 1 \frac{J}{m^3}$. Ez a kifejezés bármilyen elektromos mezőben megadja az elektromos energiasűrűséget. Ha a tér egy tetszőleges pontjában az elektromos térerősség $\vec{E}$ és az indukcióvektor $\vec{D}$, akkor a pont körül felvett kicsiny dV térfogatban $dW = \frac{1}{2} \vec{D}\vec{E} dV$ elektromágneses energia található. Egy véges V térfogatban pedig: $W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{D}\vec{E} dV$.