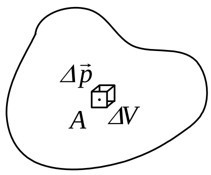
10. Elektromos polarizáció, polarizáció vektor, elektromos indukció vektor. Elektromos fluxus. Az elektromos mező forrástörvénye. Töltéseloszlások. Határfeltételek az elektrosztatikában.

Elektromos polarizáció:
Szokás bevezetni a tömegközéppont analógiájára a töltésközéppontot. Ennek definíciója:

$$\vec{r} = \frac{\sum Q_i \vec{r}_i}{\sum Q_i}$$

Egy molekulán belül külön értelmezzük a pozitív negatív töltések töltésközéppontját.
Apoláris molekulák esetén a $\oplus$ és – töltések töltésközéppontja egybeesik például: H_2, O_2 ....
Poláris molekulák esetén a $\oplus$ és –töltésközéppontok nem esnek egybe, távolságuk $\sim 10^{-9} - 10^{-10} m$, így kicsiny dipólusokként modellezhetőek például HCl, CO_2, H_2O....
Indukált polarizáció: az alkalmazott elektromos mező, az egybeeső töltésközéppontokat széthúzza így a molekula dipólussá válik, ha már eleve volt valamekkora dipólus nyomatéka akkor az pedig megnő. A $\oplus$ töltés az $\vec{E}$ irányában a – töltés azzal ellentétesen mozdul el. Poláros és apoláros molekulák esetén egyaránt fellép.
Rendeződési polarizáció: Csak poláros molekulájú anyagokban fordulhat elő. Az elektromos mező a dipólus molekulákat a saját irányába forgatja be, annál inkább minél erősebb a tér és minél alacsonyabb a hőmérséklet. A jelenség erőteljesen hőmérsékletfüggő, szemben az indukált polarizációval.
Vákuumban az elektromos mező leírására egyetlen vektor az $\vec{E}$ térerősség vektor elegendő. Kémiai anyagban azonban egy további vektor bevezetése szükséges, amely az anyag polarizáltságának mértékét adja meg.



Legyen *A*, a szigetelőanyag (dielektrikum) egy tetszőleges pontja, ΔV egy kis térfogatelem az *A* pont körül. Legyen $\Delta\vec{p}$ a ΔV térfogatban foglalt molekulák dipólus nyomatékának eredője, akkor az *A* pontban a polarizációvektor definíció szerint:

$$\vec{P}(A) = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ A \in \Delta V}} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}.$$

Mértékegysége: $[P] = 1\frac{C}{m^2}$.

Első közelítésben az alábbi lineáris anyagegyenlet igaz: $\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$, ahol χ egy dimenzió nélküli szám, neve dielektromos szuszceptibilitás. Vákuumban, illetve vezetőben $\chi = 0$, szigetelőanyagban $\chi > 0$.

Elektromos indukcióvektor:
Az elektromos indukció vektort az alábbi lineáris kombinációval vezethetjük be. Segítségével egyszerű alaptörvény írható fel. $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Mértékegysége: $[D] = 1\frac{C}{m^2}$

Ha felhasználjuk az első közelítést a definícióban :

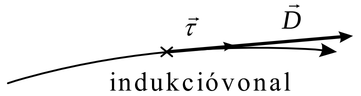
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \text{ akkor } \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left(1 + \varepsilon_r\right) \vec{E} \,,$$

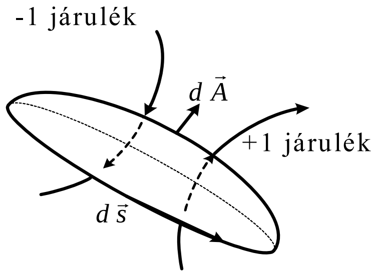
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \vec{E} \,,$$

ahol $\varepsilon_r = 1 + \chi$ a relatív permittivitás, $\varepsilon = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r$ pedig az úgynevezett abszolút permittivitás, ez megadja, hányszor nagyobb az illető szigetelő vagy dielektrikum permittivitása a vákuuménál.

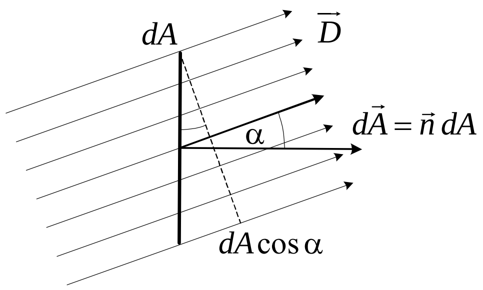
Az elektromos mező szemléltetésére az indukcióvonalakat használhatjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek az érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli elektromos indukcióval.



Megállapodás szerint az indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőleges egységnyi felületen éppen *D* számú indukcióvonal haladjon át. Az elektromos fluxus mindig irányított felületre vonatkozik és számértéke megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát. Amennyiben az indukcióvonal a felületelem vektorral megegyező irányban döfi a felületet akkor az +1 járulékot ad, ha ellenkező irányban, akkor –1 a járuléka.



Tekintsünk dA felületet, és számítsuk ki a felületre az elektromos indukciófluxust. A felületvektor $\Delta\vec{A}$, zárjon be α szöget az indukcióvektorral. Ha ΔA elegendően kicsiny, akkor az indukció már homogénnek tekinthető, és az elemi kicsiny indukciófluxus: $d\Psi = D\,dA\cos\alpha = \vec{D}\,d\vec{A}$

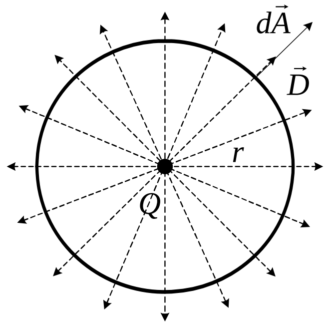


Egy tetszőleges nyílt *A* felületre pedig úgy kaphatjuk meg a fluxust, hogy az elemi járulékokat összegezzük.

$$\Psi = \int_A \vec{D} d\vec{A}$$

Felhasználva, hogy az indukció mértékegysége: $\left[D\right] = \left[P\right] = 1\dfrac{C}{m^2}$, az indukciófluxus mértékegysége: $\left[\Psi\right] = 1C$.

A mezőt keltő töltés és a kialakuló elektromos mező indukcióvektora közötti kapcsolat felírásához tekintsünk egy vákuumban elhelyezett ponttöltést, és számoljuk ki a fluxusát egy zárt felületre. A zárt felület legyen egy r sugarú koncentrikus gömb. A Q ponttöltés legyen vákuumban.



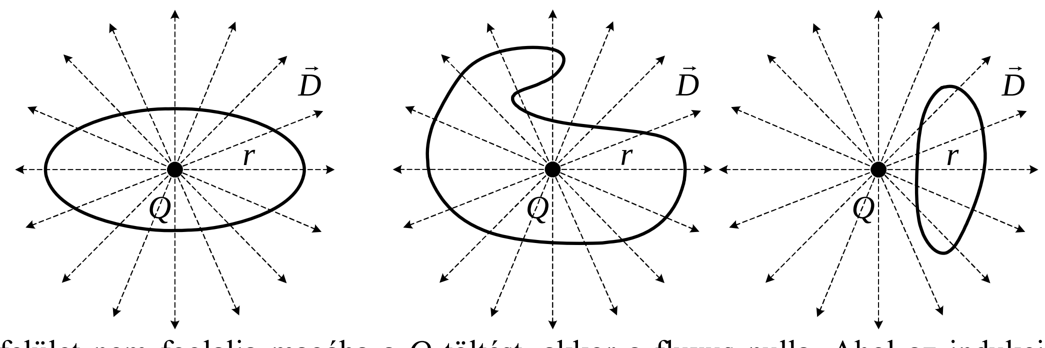
Mivel a ponttöltés által keltett térerősség ismert: $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{Q}{r^2}\vec{e}_r$, az elektromos indukcióra vonatkozó egyenlet segítségével nyerhetjük: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, illetve $\vec{D} = \dfrac{1}{4\pi} \cdot \dfrac{Q}{r^2}\vec{e}_r$.

Így a zárt felületre a fluxus:

$$\overset{o}{\Psi} = \oint_A \vec{D}d\vec{A} = \oint_A \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{1} dA = \frac{Q}{4r^2\pi}4r^2\pi = Q$$

$$\oint_A \vec{D}d\vec{A} = Q \,.$$

Ha a Q töltést körülölelő zárt felület nem egy koncentrikus gömb az eredményünk akkor is változatlanul érvényes, hiszen bármely a Q töltést magába foglaló zárt felületre a fluxus ugyanennyi, mivel a Q-ból kiinduló összes indukcióvonal átdöfi a Q-t magába foglaló zárt felületet. Ezt mutatják a következő ábrák.



Ha a felület nem foglalja magába a Q töltést, akkor a fluxus nulla. Ahol az indukcióvonal bemegy ott -1 a járulék, ahol kijön ott $+1$.

Tapasztalat szerint tetszőleges töltéselrendezés estén és kémiai anyag jelenlétében is igaz, hogy zárt rögzített felületre az elektromos fluxus egyenlő a felületben foglalt összes töltéssel.

$$\oint_A \vec{D}d\vec{A} = Q_V$$

A fenti egyenlet az elektrosztatika II. alaptörvénye, gyakran Gauss törvénynek nevezik. Q_V a V térfogatban foglalt töltések algebrai összegét jelenti, A pedig a V térfogat burkoló felülete. Az elektromos indukcióvonalak forrásai a pozitív töltések, nyelői pedig a negatív töltések, más szóval az indukcióvonalak a pozitív töltésen erednek és a negatív töltésen végződnek.
Szorítkozzunk a továbbiakban térfogaton eloszló töltésre. A térfogati töltéssűrűség definíciója:

$$\rho = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ A \in \Delta V}} \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \text{ mértékegysége } [\rho] = 1\frac{C}{m^3}.$$

A lokális vagy differenciális alak előállításához alkalmazni kell a Gauss-Osztogradszkíj integrál átalakítási tételt. $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = \int_V \nabla\vec{D}dV$, ahol

$$\nabla\vec{D} = div\vec{D} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \cdot \left\{D_x, D_y, D_z\right\} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\oint_A \vec{D}d\vec{A} = Q_V$$

$$\int_V \nabla\vec{D}dV = \int_V \rho dV$$

$$\int_V \left(\nabla\vec{D} - \rho\right)dV = 0$$

mivel ez bármely V térfogatra teljesül így $\nabla\vec{D} - \rho = 0$.

$$\nabla\vec{D} = 0$$

Ez a Gauss törvénynek vagy az elektromos mező forrástörvényének lokális alakja.

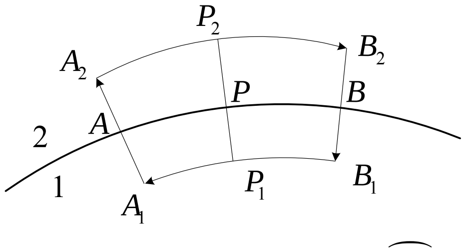
Az elektrosztatikus mező két alaptörvénye:

$$\left.\begin{array}{l} \oint_g \vec{E}d\vec{r} = 0 \\ \oint_A \vec{D}d\vec{A} = Q_V \end{array}\right\} \text{ integrális alakok}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla\,\vec{D} = \rho \end{array}\right\} \text{ differenciális alakok}$$

Határfeltételek (peremfeltételek) az elektrosztatikában:

Tekintsük két különböző közeg határfelületét. Vegyünk fel a két közeg határfelületén egy irányított görbeívet (AB), illetve egy zárt görbét. Alkalmazzuk az elektrosztatika első alaptörvényét: $\oint_g \vec{E}d\vec{r} = 0$, azaz $\int_{\widehat{A_1A_2}} \vec{E}d\vec{r} + \int_{\widehat{A_2B_2}} \vec{E}d\vec{r} + \int_{\widehat{B_2B_1}} \vec{E}d\vec{r} + \int_{\widehat{B_1A_1}} \vec{E}d\vec{r} = 0$



Közelítsük a P_1 és P_2 pontokat a P-hez, azaz húzzuk rá az $\widehat{A_1B_1}$ és $\widehat{A_2B_2}$ íveket az $\widehat{AB}$ ívre, ekkor $\int_{\widehat{A_1A_2}} \vec{E}d\vec{r} \to 0$, és $\int_{\widehat{B_2B_1}} \vec{E}d\vec{r} \to 0$, mivel a tartományok 0-hoz tartanak.

$\int_{\widehat{A_2B_2}} \vec{E}d\vec{r} \to +\int_{\widehat{AB}} \vec{E}_2 d\vec{r}$, $\vec{E}_2$ a térerősség a határon, de még a 2-es közegben

$\int_{\widehat{B_1A_1}} \vec{E}d\vec{r} \to \int_{\widehat{BA}} \vec{E}_1 d\vec{r} = -\int_{\widehat{AB}} \vec{E}_1 d\vec{r}$, $\vec{E}_1$ a határon, de az 1-es közegben, így

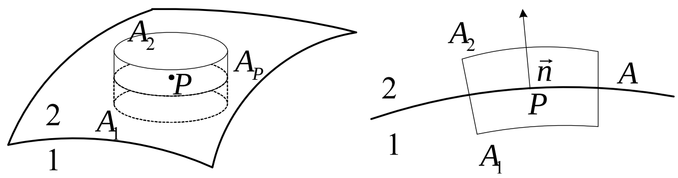
$$\int_{\widehat{AB}} \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) d\vec{r} = 0$$

Mivel az ívhossz felírható a tangenciális egységvektorral $d\vec{r} = \vec{\tau}\, ds$

$$\int_{\widehat{AB}} \left(\underbrace{\vec{E}_2 \vec{\tau}}_{E_{t2}} - \underbrace{\vec{E}_1 \vec{\tau}}_{E_{t1}} \right) ds = 0\,,$$

mivel bármely $\widehat{AB}$-re teljesül így $E_{t_2} = E_{t1}$. Az elektromos térerősség érintő irányú összetevője a határfelületen folytonosan megy át.

Két közeg határfelületén vegyünk fel egy zárt görbét, és minden pontjában a felületi normálist. A keletkező palástfelületet határoljuk le A_2-vel és A_1-el a két közegben. A nyert zárt felületre alkalmazzuk a Gauss törvényt: $\oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q_V$



$$\int_{A_1} \vec{D} d\vec{A} + \int_{Ap} \vec{D} d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV + \int_A \sigma dA \text{, itt}$$

$\sigma(P) = \lim\limits_{\substack{\Delta A \to 0 \\ P \in \Delta A}} \dfrac{\Delta Q}{\Delta A}$ a felületi töltéssűrűség. Közelítsük az A_1 és A_2 felületeket az A-ra ekkor a palástfelület és a térfogat nullához tart, így az integrálok 0-hoz tartanak:

$$\int_{Ap} \vec{D} d\vec{A} \to 0 \text{, és } \int_V \rho dV \to 0$$

Ugyanakkor pedig: $\int_{A_1} \vec{D} d\vec{A} \to \int_A \vec{D}_1 d\vec{A}$, ahol $\vec{D}_1$ az indukció a határon de még az 1-es közegben,

ben, és $\int_{A_2} \vec{D} d\vec{A} \to \int_A \vec{D}_2 d\vec{A}$, ahol $\vec{D}_2$ az indukció a határon de még az 2-es közegben.

$$\int_A \underbrace{\vec{D}_1 \left(-\vec{n}\right)}_{-D_{n1}} dA + \int_A \underbrace{\vec{D}_2 \left(\vec{n}\right)}_{D_{n2}} dA = \int_A \sigma dA\,,$$

$$\int_A \left(D_{n2} - D_{n1} - \sigma\right) dA = 0\,,$$

mivel bármely A-ra igaz

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

Az elektromos indukcióvektor normális koordinátája a határfelületen általában ugrást szenved melynek mértéke a felületi töltéssűrűség. Csak akkor folytonos ha $\sigma = 0$.