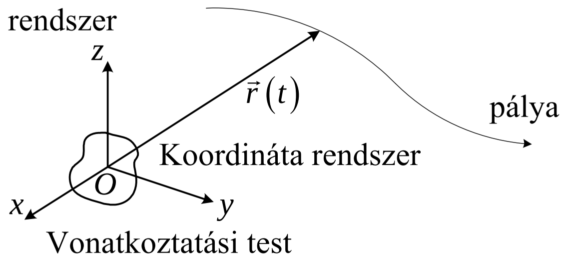
1. Kinematikai alapfogalmak. A pálya, a sebesség és a gyorsulás definíciója. Sebesség, és gyorsulás lokális koordinátái. Mozgás leírása különböző koordináta-rendszerekben.

A kinematika a mozgás matematikai leírása, az ok feltárása nélkül. Mozgásról akkor beszélünk, ha egy test változtatja a helyzetét más testekhez képest.
Tekintsünk a továbbiakban tömegpontokat. A tömegpont olyan test, melynek jellemző méretei kicsik a pálya méreteihez képest. Ellentétben a geometriai ponttal a tömegpontnak van kiterjedése. Például egy eldobott kréta darabka mérete, eltörpül a hajítás pályájának méretéhez képest, ezért tömegpontnak tekinthető. A tömegpont mozgása során érintett pontok halmazát pályának nevezzük.

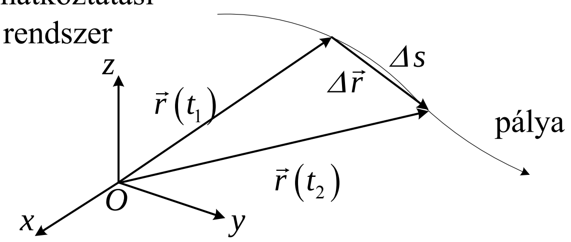
Vonatkoztatási testnek nevezzük azt a merev testet, amihez a többi test mozgását viszonyítjuk. A merev test tetszőleges két pontjának távolsága időben állandó.



A vonatkoztatási test és egy hozzá rögzített koordinátarendszer együttese a vonatkoztatási rendszer (VR). Ebben a tömegpont pillanatnyi helyzetét egy rendezett számhármassal, a koordinátáival adhatjuk meg. A leggyakrabban használt koordináta rendszerek:

- Derékszögű, vagy Descartes koordináta rendszer,
- Síkbeli polár koordináta rendszer,
- Henger koordináta rendszer, és
- Gömbi koordináta rendszer.

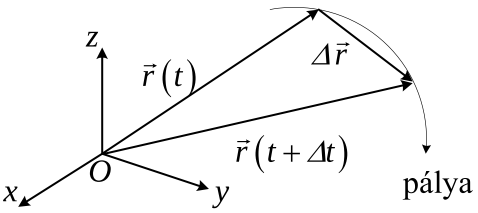
A helyvektor a vonatkoztatási rendszer origójából a tömegponthoz húzott vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Ha a tömegpont mozog, akkor a helyvektor az idő függvénye. Tegyük fel, hogy a tömegpont elmozdul a pálya mentén az 1. pontból a 2. pontba. Ekkor az elmozdulásvektor: $\Delta\vec{r}$.



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1),\ t_2 > t_1$$

Ívkoordináta alatt a pályagörbén egy tetszőleges ponttól mért előjeles ívhosszat értjük, és s-sel jelöljük. Az út az ívkoordináták adott idő alatti megváltozása. $\Delta s \geq |\Delta\vec{r}|$. A helyvektor megadható az ívkoordináta függvényében is: $\vec{r} = \vec{r}(s)$.

Tekintsük most a tömegpont elmozdulását Δt idő alatt:



Ekkor az átlagsebesség definíció szerint: $\vec{v}_{átl} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, a pillanatnyi sebességvektor pedig:

A pillanatnyi sebességvektor pedig:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Mivel az elemi elmozdulás vektor $d\vec{r}$ egybeesik a pálya ívelemével, így a sebességvektor mindig érintő irányú. Ha a helyvektort az ívkoordináta segítségével írjuk fel, akkor:

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Az érintő irányú egységvektor definíciója:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \text{ és } |\vec{\tau}| = 1$$

A pályasebesség, a sebességvektor hossza:

$$|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt} \geq 0$$

A sebességvektor:

$$\vec{v} = v\,\vec{\tau}$$

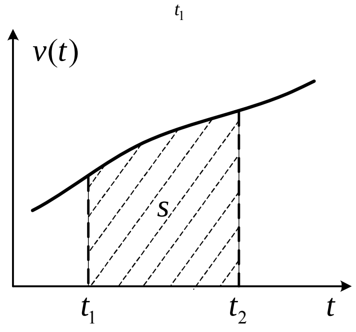
Az érintő irányú egységvektor pedig:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$$

A pályasebesség az ívkoordináta idő szerinti differenciálhányadosa, a befutott út a pályasebesség idő szerinti integrálja a megfelelő időintervallumra. Figyelembe véve az integrál geometriai jelentését, az a pályasebesség idő grafikon görbe alatti területe.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$



A gyorsulásvektor definíciója:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

A sebesség és gyorsulás természetes, vagy lokális koordinátái:

$$\vec{v} = v\vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

mivel $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$, ahol ρ a görbületi sugár, $\vec{n}$ pedig a normális egységvektor, így:

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

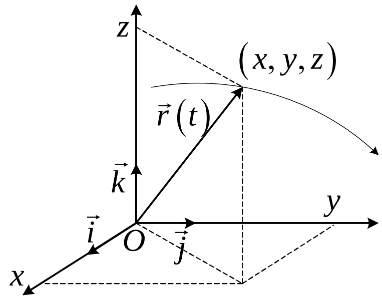
Az érintő vagy pálya menti gyorsulás: $a_t = \dot{v}$.

A normális vagy centripetális gyorsulás: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$.

Egyenletes mozgás esetén a pályagyorsulás zérus. Egyenletesen változó mozgás esetén a pályagyorsulás zérustól különböző állandó (v lineárisan változik az idő függvényében). Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén $\vec{a} = 0$.

A mozgás leírása derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

A koordináták: x, y, z , az egységvektorok: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, az egységvektorok ilyen sorrendben jobbsodrású rendszer alkotnak $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. A mozgást akkor ismerjük, ha tudjuk a helyvektor időfüggését: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.



A pálya paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

A helyvektor, illetve a helyvektor hossza:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A sebességvektor definíciója:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

Az egységvektorok mind irányukat, mind nagyságukat tekintve állandóak, így deriváltjuk eltűnik: $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$.

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

A sebesség koordináták: $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, és $v_z = \dot{z}$.

A pályasebesség:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\text{ , vagy }v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

A gyorsulás definíciója:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}\text{ ,}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

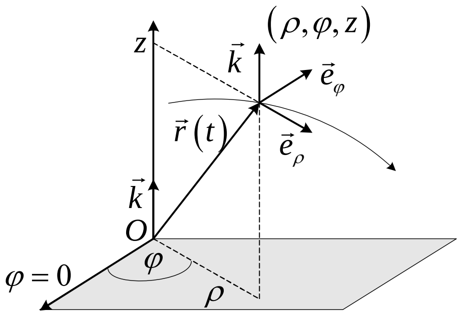
A gyorsulás Descartes koordinátái: $a_x=\ddot{x}$, $a_y=\ddot{y}$, és $a_z=\ddot{z}$.

A gyorsulásvektor hossza:

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}\text{ .}$$

A mozgás leírása henger koordinátarendszerben:

A koordináták: ρ, φ, z, az egységvektorok: $\vec{e}_\rho\ \vec{e}_\varphi\ \vec{k}$, az egységvektorok ilyen sorrendben jobbsodrású rendszer alkotnak: $\left\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}\right\}$.



A pálya paraméteres egyenletrendszere:

$$\rho=\rho(t)$$

$$\varphi=\varphi(t)$$

$$z=z(t)$$

A helyvektor:

$$\vec{r}=\rho\vec{e}_\rho+z\vec{k}\text{ .}$$

A sebességvektor a definícióból következően:

$$\vec{v}=\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\dot{z}\vec{k}$$

Az $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ egységvektorok változtatják az irányukat, így a deriváltjuk már nem zérus.

Körmozgás esetén: $\rho=R=\text{állandó}$, így $\dot{\rho}=0$, $\vec{v}=R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi=R\omega\vec{e}_\varphi$, ahol a szögsebesség:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}\text{, így:}$$

$$v_\varphi=R\omega$$

A szöggyorsulás a szögsebesség változási gyorsasága: $\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dot{\omega}$

Egyszerű mozgások:

1. egyenes vonalú egyenletes mozgás:

$$v = \text{áll.} \quad s = vt$$

2. egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

$$a = \text{állandó}\,,\ v = v_0 + at\,,\ \text{és}\ s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

3. egyenletes körmozgás:

$$\omega = \text{áll.} \quad \varphi = \omega t$$

4. egyenletesen változó körmozgás:

$$\beta = \text{állandó}\,,\ \omega = \omega_0 + \beta t\,,\ \text{és}\ \varphi = \omega_0 t + \frac{\beta}{2} t^2$$