

Egyetemi Jegyzet

Relativitáselmélet tanárszakosoknak

Nándori István



Miskolci Egyetem

Miskolc

2025

ISBN 978-963-358-395-1

Tartalomjegyzék

1.	Speciális relativitás elmélete – kinematika	1
1.1.	Relativisztikus kinematika	1
1.2.	Speciális relativitás elve	1
1.3.	Lorentz-transzformáció	1
2.	Speciális relativitás elmélete – dinamika	4
2.1.	Négyesformalizmus	4
2.2.	Relativisztikus impulzus, energia	4
3.	A Világegyetem megfigyelésének eszközei, kozmológiai elv, Hubble törvény	6
3.1.	Sebesség és távolság mérése	6
3.2.	Hubble-törvény és kozmológiai elv	8
4.	A gravitáció Einstein-féle elmélete, Friedmann-Robertson-Walker megoldás	11
4.1.	Friedmann-egyenlet	11
4.2.	Einstein-egyenlet, Friedmann-Robertson-Walker metrika	12
4.3.	Friedmann-egyenlet vizsgálata	14
4.4.	Friedmann-egyenlet megoldása	15
5.	A Világegyetem születése, könnyű elemek szintézise	19
5.1.	Világegyetem születése (első századmásodperc)	19
5.2.	A Világegyetem születése (első 3 perc)	21
6.	Kozmikus háttérsugárzás, az Univerzum energia-felosztása	24

1. Speciális relativitás elmélete – kinematika

1.1. Relativisztikus kinematika

A fény véges sebességgel terjed. Ez az állítás kísérleti tesztekkel megerősíthető vagy cáfolható. Az első ilyen jellegű jelentős kísérletet Olaf Rhomer végezte ami asztrofizikai megfigyeléseken alapult. A dán csillagász 1676-ban végezte el az első kvantitatív méréseket a fény sebességéről. Összehasonlította az Io pályájának periódusidejét, amikor a Föld a Jupiter felé mozgott azzal amikor a Föld a Jupitertől távolodott. Azon nézete, hogy a fény sebessége véges, csak akkor nyert széleskörű elfogadást, amikor James Bradley 1727-ben elvégezte az úgynevezett fényaberráció méréseit. Az első földi fénysebesség-mérést Hippolyte Fizeau végezte 1849-ben, amikor pulzáló fénysugarat vetített egy távoli tükörrre. Fizeau meghatározta a fény sebességét egy intenzív fényforrás és egy körülbelül 8 km-re lévő tükör között. A fényforrást egy 720 fogú forgó fogaskerék szakította meg, amely másodpercenként akár több száz alkalommal is forgatható volt. Fizeau addig állította a fogaskerék forgási sebességét, amíg a fogaskerék egyik fogán áthaladó fényt a szomszédos fog teljesen el nem takarta. A fogaskerék alapforgási sebességének 3-, 5- és 7-szeresére történő felgyorsítása szintén a visszavert fény eltakarását eredményezte a fogaskerék következő fogai által. A kerék forgási sebességét és a kerék és a tükör közötti távolságot figyelembe véve Fizeau 315 000 km/s értékre számította ki a fény sebességét, ami figyelemre méltóan pontos eredmény és egészen megközelítette a ma ismert fénysebesség értéket.

1.2. Speciális relativitás elve

A fényről ismert, hogy hullámtulajdonságokat mutat, és az is ismert volt, hogy transzverzális hullám, így feltételezték, hogy létezik egy olyan közeg (éter), amelyben a transzverzális fényhullám terjed. A Michelson–Morley-kísérlet célja az volt, hogy kimutassa az éter létezését, egy olyan feltételezett közeget, amely átjárja a teret, és amelyről azt gondolták, hogy a fényhullámok hordozója. A kísérletet 1887 áprilisa és júliusa között végezték el az amerikai fizikusok, Albert A. Michelson és Edward W. Morley. A kísérletben a fény sebességét merőleges irányokban hasonlították össze, hogy kimutassák az anyag relatív mozgását a mozdulatlan éteren ("éterszélén") keresztül. Az eredmény negatív volt, mivel Michelson és Morley nem találtak jelentős különbséget a fény sebessége között a feltételezett éterben való mozgás irányában és a derékszögben mért sebesség között. Ezt az eredményt általában az akkoriban elterjedt éterelmélet elleni első erős bizonyítéknak tekintjük, és ez indította el azt a kutatási irányt, amely végül a speciális relativitáselmülethez vezetett, amely kizárja a mozdulatlan éter létezését.

A relativitás elve azt követeli meg, hogy a fizika törvényeit leíró egyenletek minden vonatkozási rendszerben azonos formájúak legyenek. A speciális relativitás elve azt mondja ki, hogy ha egy K koordinátarendszert úgy választunk meg, hogy ahhoz viszonyítva a fizikai törvények a legegyszerűbb formájukban legyenek érvényesek, akkor ugyanazok a törvények lesznek érvényesek bármely más K' koordinátarendszerben is, amely K -hoz képest egyenes vonalban egyenes sebességgel mozog. Más szavakkal, Einstein megállapította, hogy a fizika törvényei minden nem gyorsuló megfigyelő számára azonosak, és hogy a vákuumban a fény sebessége független minden megfigyelő mozgásától. Ez megköveteli a Galilei-transzformáció módosítását, amely a szokásos newtoni fizika keretein belül adja meg két inerciarendszer közti áttérést. Ezt a módosított, új koordináta-transzformációt nevezzük Lorentz-transzformációnak.

1.3. Lorentz-transzformáció

Vegyünk két eseményt: az egyik egy fényimpulzus kibocsátása, a másik pedig annak észlelése egy bizonyos Δx távolságban, amelyet egy V inerciarendszerben mérünk. Mindkét eseményt az x tengely mentén feltételezzük. Ezen távolság megtételéhez a fénynek, $\Delta t = \Delta x/c$ idő szükséges. Ugyanezen eseménypár koordinátakülönbsége egy másik, v sebességgel az x irányban haladó V' inerciarendszerben $\Delta x = c\Delta t'$. A Galilei-transzformáció szerint ezek a koordinátakülönbségek összefüggének egymással,

$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t', \quad \Delta x' = \Delta x - v\Delta t.$$

Feltételezve, hogy az idő mindkét rendszerben azonos sebességgel telik, ami egybeesik a hétköznapi tapasztalatainkkal, azaz $\Delta t = \Delta t'$, az egyenleteket Δt -vel osztva a következő eredményt kapjuk

$$c = c + v, \quad c = c - v,$$

amelyek ellentmondanak a $v \neq 0$ feltételnek. Tehát a Galilei-koordinátatranszformáció ellentmond a fénysebesség invarianciájának, ami nem meglepő, hiszen beláttuk, hogy a Galilei-féle sebességösszeadás is ellentmond a fénysebesség inerciarendszer megválasztásától való függetlenégének. Módosítsuk tehát úgy a Galilei-transzformációt, hogy a következő négy követelmény teljesüljön:

1. Az új transzformációs szabályoknak szimmetrikusnak kell lenniük a vonatkozási rendszerek felcserélését tekintve.
2. A fénysebességnek invariánsnak kell lennie, azaz minden inerciarendszerben ugyanazon értéket kell felvennie.
3. A kis v sebességek határesetében, azaz ($\beta_v \equiv v/c \rightarrow 0$) az új transzformációnak vissza kell adnia a szokásos Galilei transzformációt.
4. Azok az eseménypárok, amelyek ugyanazon a helyen és időben fordulnak elő V -ben, ugyanazon a helyen és időben kell, hogy bekövetkezzenek V' -ben is.

A fenti követelményeket figyelembe vevő legegyszerűbb kiterjesztése a transzformációs szabályoknak a következő alakú

$$\Delta x = \gamma(v)(\Delta x' + v\Delta t'), \quad \Delta x' = \gamma(v)(\Delta x - v\Delta t) \quad (1)$$

ahol $\gamma(v)$ egy dimenziótlan függvénye v sebességnek. Felhasználva, hogy $\Delta t' = \Delta x'/c$, $\Delta t = \Delta x/c$, és a két egyenlet szorzatát véve azt kapjuk, hogy

$$\Delta x \Delta x' = \gamma(v)^2 (\Delta x' + \beta_v \Delta x') (\Delta x - \beta_v \Delta x) = \gamma(v)^2 \Delta x \Delta x' (1 - \beta_v^2).$$

Innen pedig következik, hogy

$$\gamma(v) \equiv \gamma_v = (1 - \beta_v^2)^{-1/2} \quad (2)$$

ahol $\beta_v = v/c$. A γ_v ismeretében levezethetjük az idő transzformációs tulajdonságait például az (1) első egyenletéből kiindulva,

$$\Delta t' = \frac{1}{v} \left(\frac{\Delta x}{\gamma_v} - \Delta x' \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{\Delta x}{\gamma_v} - \gamma_v \Delta x + \gamma_v v \Delta t \right) \quad (3)$$

$$= \gamma_v \left[\Delta t - \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma_v^2} \Delta x \right) \right] \quad (4)$$

$$= \gamma_v \left(\Delta t - \beta_v \frac{\Delta x}{c} \right), \quad (5)$$

hasonlóan az (1) második egyenletéből kiindulva kapjuk az inverz transzformációt

$$\Delta t = \gamma_v \left(\Delta t' + \beta_v \frac{\Delta x'}{c} \right),$$

Ezt nevezzük Lorentz-transzformációnak, illetve Lorentz-transzformációs szabályoknak, melyeket szimmetrikusabb formában is írhatunk

$$\Delta x = \gamma_v (\Delta x' + \beta_v c \Delta t'), \quad \Delta x' = \gamma_v (\Delta x - \beta_v c \Delta t), \quad (6)$$

$$c \Delta t = \gamma_v (c \Delta t' + \beta_v \Delta x'), \quad c \Delta t' = \gamma_v (c \Delta t - \beta_v \Delta x). \quad (7)$$

Az első és negyedik feltétel triviálisan teljesül mert a transzformáció lineáris, homogén és szimmetrikus. Továbbá kis v határérték esetén $\beta_v \rightarrow 0$ és $\gamma_v \rightarrow 1$ így visszakapjuk a Galilei-transzformációt, tehát a harmadik feltétel is teljesül. A második feltétel pedig a következőképpen ellenőrizhető:

$$c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma_v (\Delta x - v \Delta t)}{\gamma_v (\Delta t - v \frac{\Delta x}{c^2})} = \frac{(\frac{\Delta x}{\Delta t} - v)}{(1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t})} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c \frac{c - v}{c - v} = c. \quad (8)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti transzformációs szabályok arra az esetre vonatkoznak amit x irányú Lorentz-lökésnek (Lorentz-boost-nak) nevezünk amely során a többi térkomponens változatlan marad: $\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$.

Az új transzformációs törvények következményeinek megvitatásakor először is megemlítiük, hogy az ok-okozati összefüggés megmarad. Ha a V koordináta rendszerben, $t = 0$ időpontban és $x = 0$ pozícióban valaki egy követ dob az ablak felé, és a kő $t = \Delta t$ időpontban és $x = \Delta x$ pozícióban betöri az ablakot, akkor ezeknek az eseményeknek az időbeli különbsége egy mozgó V' inerciarendszerben, $\Delta t' = \gamma_v(\Delta t - \beta_v \Delta x/c) = \gamma_v \Delta t(1 - \beta_v \beta_{v_x})$, ahol $v_x = \Delta x/\Delta t$ a kő sebessége V -ben. A hatás akkor előzi meg az okot, ha $\Delta t' < 0$, azaz ha $\beta_v \beta_{v_x} > 1$, ami csak akkor teljesülhet, ha legalább egy β tényező nagyobb, mint egy. Tehát az ok-okozati összefüggés akkor marad érvényben, ha sem a vonatkoztatási rendszerek egymáshoz képesti, sem pedig a tárgyak sebessége nem haladhatja meg a fény sebességét. Ha a "kódobás" esetét általánosítjuk az információ továbbítás lehetséges megvalósítására, akkor az ok-okozati összefüggés megköveteli, hogy az információátvitel sebessége soha ne haladja meg a vákuumban mért fény terjedési sebességét (ami invariáns).

Másodszor, a V rendszerben egyidejűleg bekövetkező események nem lesznek feltétlenül egyidejűek egy másik V' rendszerben. Valóban, ha $\Delta t = 0$, de $\Delta x \neq 0$, akkor $\Delta t' = -\gamma_v \beta_v \Delta x/c \neq 0$. Ha azonban az egyidejű események V -ben ugyanazon a helyen történnek ($\Delta x = 0$), akkor a két esemény V' -ben is egyidejű marad, azaz $\Delta t' = 0$. Természetesen ebben az esetben $\Delta x' = 0$ is teljesül.

Harmadszor, ha egy részecske élettartama $\tau = \Delta t$ a hozzá rögzített vonatkoztatási rendszerben, amelyet *sajátidőnek* nevezünk, akkor bármely más mozgó inerciarendszerben hosszabb élettartammal rendelkezik. A V saját vonatkoztatási rendszerben a részecske nyugalomban van, így $\Delta x = 0$. A V' -ben, amely a V -hez képest x irányban v sebességgel mozog,

$$c\Delta t' = \gamma_v(c\Delta t - \beta_v \Delta x) = c\gamma_v \Delta t,$$

tehát $\Delta t' = \gamma_v \Delta t > \Delta t$. Ezt a jelenséget idődilatációnak ("időtágulásnak") nevezzük, és ez magyarázza azt a paradoxont, hogy a Föld felszínén megfigyelhető egy instabil részecske, a müon, amelyet a sztratoszférában (15-20 km-rel a tengerszint felett) a kozmikus sugárzás hoz létre. Laboratóriumi mérések szerint a müon átlagos élettartama (a keletkezése és bomlása között eltelt sajátidő) körülbelül $2,2 \mu s$. Ha feltételezzük, hogy a müon fénysebességgel mozog (valójában ezt tömeggel rendelkező részecske mint a müon nem érheti el) legfeljebb $2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km} < 1 \text{ km}$ távolságot tudna megtenni. Így idődilatáció jelensége nélkül azt várnánk, hogy a müonokat nem lehet megfigyelni a tengerszint felett, hanem még a sztratoszférában elbomlanak. Az a tény, hogy tengerszint felett megfigyeljük őket kísérleti bizonyíték az idődilatációra, hiszen a Földhöz rögzített rendszerben a mönhoz rögzített vonatkoztatási rendszer (azaz a sajátrendszere) nagyon gyorsan mozog lehetővé téve a jelentős mértékű idődilatációt.

Negyedszer, egy mérőeszköz melynek hossza Δx a sajátrendszerben, rövidebb hosszal rendelkezik bármely más mozgó inerciarendszerben. Bármely V' -ben egyidejűleg kell meghatározni a mérőeszköz végeinek koordinátáit, így $\Delta t' = 0$. Ismerve a mérőeszköz Δx hosszát a V sajátrendszerben írhatjuk, hogy

$$\Delta x = \gamma_v(\Delta x' + \beta_v c\Delta t') = \gamma_v \Delta x',$$

ami $\Delta x' = \Delta x/\gamma_v < \Delta x$ eredményre vezet. Ezt a jelenséget hosszúság-kontrakciónak ("hosszúság-összehúzódnak") nevezzük. A müon-rejtélyt a hosszúság-kontrakcióval is meg tudjuk oldani.

A koordinátarendszerünk origóját úgy is megválaszthatjuk, hogy az egy eseménypár első eseményének helyére és idejére essen, így a koordinátakülönbségek Lorentz-transzformációja a koordinátatranszformációkat is leírja.

Ezt a részt azzal zárjuk, hogy megvizsgáljuk, hogyan változik a sebességek Galilei-transzformációja, ha figyelembe vesszük a relativisztikus hatásokat. Az x irányú gyorsulás esetén a helyzet és az idő különbségeire vonatkozó Lorentz-transzformációs képletekből, Eqs. (6) and (7), könnyen kiszámíthatjuk a sebességkomponensek transzformációját,

$$\beta_{v_x} = \frac{1}{c} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma_v(\Delta x' + \beta_v c\Delta t')}{\gamma_v(c\Delta t' + \beta_v \Delta x')} = \frac{\beta_{v'_x} + \beta_v}{1 + \beta_v \beta_{v'_x}}, \quad (9)$$

$$\beta_{v_y} = \frac{1}{c} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\gamma_v(c\Delta t' + \beta_v \Delta x')} = \frac{\beta_{v'_y} \gamma_v^{-1}}{1 + \beta_v \beta_{v'_x}}. \quad (10)$$

2. Speciális relativitás elmélete – dinamika

2.1. Négyesformalizmus

A relativisztikus dinamika tárgyalására egy kézenfekvő választás a négyesformalizmus. Ebben a formalizmusban a téridő egy pontját a következő négyesvektorral jelöljük,

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \quad (11)$$

ahol az egyes komponensek $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Ennek segítségével a Lorentz transzformáció szimmetrikus alakban írható,

$$\Delta x^1 = \gamma_v(\Delta x'^1 + \beta_v \Delta x'^0), \quad \Delta x'^1 = \gamma_v(\Delta x^1 - \beta_v \Delta x^0), \quad (12)$$

$$\Delta x^0 = \gamma_v(\Delta x'^0 + \beta_v \Delta x'^1), \quad \Delta x'^0 = \gamma_v(\Delta x^0 - \beta_v \Delta x^1). \quad (13)$$

illetve kompakt (Einstein-féle) jelölést használva (felösszegzés jelét elhagyva)

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad \rightarrow \quad x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (14)$$

ahol a Lorentz-transzformáció mátrixa

$$\Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v \beta_v & 0 & 0 \\ -\gamma_v \beta_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

A téridőben értelmezett x^μ négyesvektor hossza $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ a $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzor segítségével adható meg, ami a következő alakban írható

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

2.2. Relativisztikus impulzus, energia

Kézenfekvőnek tűnik az, hogy a négyessebességet a (11) pozíció-idő vektor idő szerinti deriváltjaként állítsuk elő. Azonban vigyázni kell, hogy ezt mindig a saját vonatkoztatási rendszerben definiált időváltozó, azaz a sajátidő

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_v} \quad (17)$$

szerint végezzük. Ekkor a következő kifejezéshez jutunk

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_v(c, v_x, v_y, v_z) \quad \rightarrow \quad \eta^\mu \eta_\mu = \gamma_v^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma_v^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = c^2 \quad (18)$$

és láthatjuk, hogy az így kapott négyessebességnek nem függetlenek a komponensei mert a hossza mindig c^2 . Ezek után természetes módon adódik a négyesimpulzus definíciója,

$$p^\mu = m\eta^\mu \quad \rightarrow \quad p^0 = \gamma_v mc, \quad \vec{p} = \gamma_v m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (19)$$

ahonnan a relativisztikus energiára $E = p^0 c$ azt kapjuk, hogy

$$E = \gamma_v mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (20)$$

és ennek segítségével a négyesimpulzus a következő képpen is írható

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad \rightarrow \quad p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = mc^2 \quad (21)$$

amiből végül a relativisztikus diszperziós relációhoz jutunk

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (22)$$

Ez utóbbi kifejezés kis v/c sebességek szerinti Taylor-sorfejtése adja a következőket,

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (23)$$

ahol mc^2 a jól ismert Einstein-féle összefüggés a nyugalmi azaz sajátenergiára és $\frac{1}{2}mv^2$ pedig a nem-relativisztikus kinetikus energia. Nagy segességekre, azaz az ultra-relativisztikus esetre pedig azt kapjuk, hogy

$$E^2 \approx p^2 c^2 \quad (24)$$

ami $m = 0$ tömegű részecskék (például foton) esetében egzaktul $E^2 = p^2 c^2$ teljesül, megkövetelve a $v = c$ terjedési sebességet.

3. A Világegyetem megfigyelésének eszközei, kozmológiai elv, Hubble törvény

3.1. Sebesség és távolság mérése

A megfigyelés eszközei:

- emberi szem: egy foton észlelésére is képes hátrány: a beérkező fényt rövid ideig tárolja (halvány égitest)
- távcső, fényérzékeny eszköz (CCD), fotonsokszorozó stb. probléma: földi légkör áteresztőképessége

Sebességmérés

sebesség = longitudinális + transzverzális
módszer: Doppler hatás (csak a longitudinálisra)
(nem-relativisztikus esetben: $v \ll c$)

$$T' = T + \frac{v \cdot T}{c} \quad (25)$$

ahol v = objektum sebessége c = a hullám(fény) sebessége, T', T a periódusidő, $\frac{v \cdot T}{c}$ a Doppler-hatás

$$\lambda = c \cdot T, \quad \lambda' = c \cdot T' \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{v}{c} \quad (26)$$

$$\text{Legyen: } z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad v = c \cdot z \quad (27)$$

beérkező fény színeképelemzése (J.Fraunhofer)

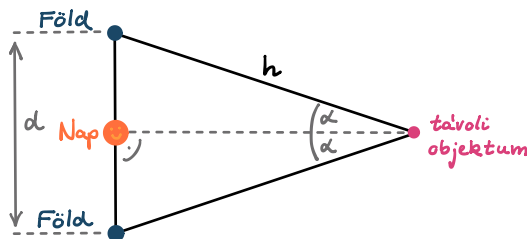
- csillag külső részén lévő elemek: fényelnyelés, vonalas színekép (laboratóriumi mérésekből beazonosítható)
- beérkező fény vonalaiból $\rightarrow \lambda'$ mérhető

megjegyzés:

- speciális relativitás ha $v \sim c$
- általános relativitás ha görbült a tér $\Rightarrow$ lehet $z > 1$ is!

Távolságmérés

Parallaxis (trigonometrikus) módszer



1. ábra.

$$\sin \alpha = \frac{d}{2h} \quad (\text{ha } \alpha \ll 1 \implies \alpha \cong \frac{d}{2h}) \quad (28)$$

Nap-Föld távolság = 1 csillagászati egység (CSE angolul AU), $d = 2$ CSE, mérése: Kepler 3. törvénye alapján,

1 parsec (pc) = 3.26 fényév = $3.1 \cdot 10^{13}$ km (ahonnan nézve a Nap-Föld távolság ívmásodperc alatt látszik)

Megjegyzés: parallaxis módszer használhatósága: naprendszeren kívül kb. 100 pc távolságig!

Változócsillag-Cefeidák (Cephei) alapján

1912 Henrietta S. Leavitt megfigyelései: Magellán felhőben (~ 50 kpc) változócsillagok abszolút fényessége (M) és időperiódusa (T) összefügg, vagyis a periódus méréseiből következtethetünk az abszolút fényességre:

- $M = -1.8 - 1.74 \cdot \log T$
- $M = -0.35 - 1.74 \cdot \log T$ ha $M < -2$

amit felhasználhatunk a távolság mérésére. Relatív fényesség (m) és intenzitás (i) közötti összefüggést

$$m_1 - m_2 = -2.5 \cdot \log \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \quad (29)$$

illetve az abszolút fényesség $M = m(10\text{pc})$ definícióját felhasználva kapjuk

$$m - M = -2.5 \cdot \log \left(\frac{i}{I} \right) \quad (30)$$

ahol I az abszolút intenzitás. Mivel $i(r) \sim \frac{1}{r^2}$ ezért

$$m - M = -2.5 \cdot \log \left(\frac{r^{-2}}{10^{-2}} \right) = -5 + 5 \log r \quad (31)$$

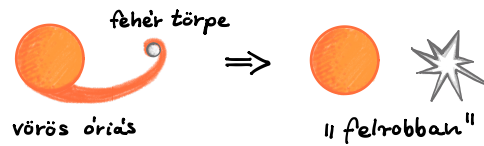
A távolság meghatározásának módszere, hogy a Cefeida időperiódusát mérem aonnan M meghatározható továbbá mérem az m látszólagos fényességét is és ezekből az

$$r = 10^{(m-M+5)/5} \quad (32)$$

távolság számolható.

Megjegyzés: hasonló elvet használhatunk más esetben is, Standard gyertyák (SNe jelölés)

- klasszikus Cefeidák (3 Mpc-ig)
- szuperóriások: $M=-9.5$ (15 Mpc-ig)
- gömbhalmazok $M \cong -7.7$
- nóvák (4 Mpc-ig)
- szupernóvák
 - I. típus: $M=-18.7$ (fontos szerepe van Ia típusnak $\implies$ SNe Ia)
 - II. típus: $M=-16.3$



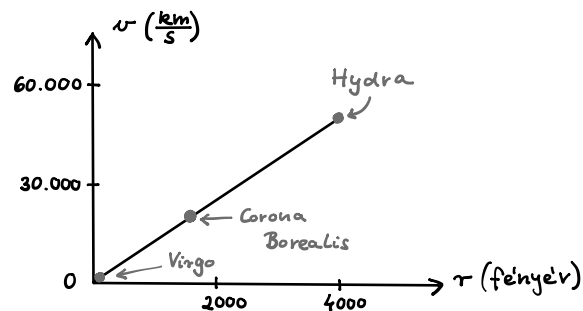
2. ábra. Fehér törpe kritikus tömeget elérve felrobban.

3.2. Hubble-törvény és kozmológiai elv

Hubble törvény

Mérés: E. Hubble 1920-29 Palomar-hegyi távcső

- Cefeidákat fedez fel az Androméda galaxisban
- Megméri az Androméda és 17 másik galaxis távolságát



3. ábra. Különböző objektumok távolodási sebessége.

Hubble törvény:

$$v = H_0 \cdot r \quad (33)$$

ahol a Hubble állandó értéke $H_0 = 71 \pm 3 \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc}$

Megjegyzés: távolság mérésére használható ha v ismert

Kozmológiai elv

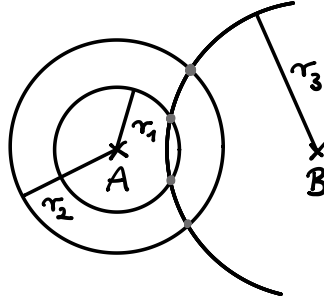
Az Univerzum nagy skálán homogén és izotróp. **Fontos:** nagy méretskálán teljesül!

- Galaxisban (0,1 Mfényév) $\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = 1000000$
- Galaxishalmazokban (3 Mfényév) $\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = 1000$
- Szuperhalmazokban (100 Mfényév) $\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = 10$

Kopernikuszi elv: Minden megfigyelő esetén izotróp.

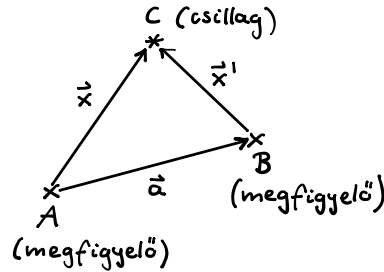
Ha bármely megfigyelő esetén izotróp, akkor homogén (azaz a Kopernikuszi elvből következik a Kozmológiai).

(Megjegyzés: megfordítva nem igaz. Pl: összenyomott szivacs)



4. ábra.

Kozmológia (Kopernikuszi) elv következménye:



5. ábra.

Adott C (csillag), A (megfigyelő), B (megfigyelő) és feltételezzük, hogy A,B megfigyelők együtt mozognak az Univerzummal. Jelölje x az AC, x' a BC és a az AB távolságokat. Nem-relativisztikus sebességtranszformáció alapján

$$v(x, t) = v(a, t) + v'(x', t) \implies v'(x', t) = v(x, t) - v(a, t) \quad (34)$$

$$x = a + x' \implies v'(x', t) = v'(x - a, t), \quad \text{Kopernikuszi elv} \implies v(x, t) - v(a, t) = v'(x, t) - v'(a, t)$$

$$v'(x - a, t) = v'(x, t) - v'(a, t) \quad (35)$$

ahonnan következik a lineáris függés, azaz

$$v_i(x, t) = c_{ik}(t) \cdot x_k \quad (36)$$

(ha nem lenne lineáris például $v(x, t) = c(t) \cdot x^2 \implies v(x - a, t) = c(t) \cdot (x - a)^2$ nem teljesül a levezetett összefüggés.) Kérdés $c_{ik}(t)$ milyen mátrix? Ha például nem szimmetrikus akkor mindig felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tag összegeként

$$c_{ik}(t) = \frac{1}{2}(c_{ik} + c_{ki}) + \frac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki}) \quad (37)$$

$$S_{ik}(t) = (c_{ik} + c_{ki}), \quad A_{ik}(t) = (c_{ik} - c_{ki}) \quad (38)$$

ahol szimmetrikus rész nem nulla azonban $A_{ik} \equiv 0$ az izotrópia miatt! Belátható továbbá, hogy azonosak a sajátértékek, $S_{ik}(t) = S(t)\delta_{ik}(t)$. Innen következik

$$v_i(x, t) = S(t) \cdot x_i \quad (39)$$

ami három lehetőséget jelent: tágul, összehúzódik vagy statikus. Vizsgáljuk a koordinátatávolságokat.

$$v_i(x, t) = S(t) \cdot x_i \quad \Leftrightarrow \quad x_i = R(t) \cdot c_i \quad (40)$$

ahol c_i egységvektor, $R(t)$ skálafaktor,

$$v_i = S(t) \cdot x_i = \dot{x}_i = \dot{R}(t) \cdot c_i = \dot{R}(t) \frac{x_i}{R(t)} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \cdot x_i \Rightarrow S(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad \boxed{v_i = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \cdot x_i} \quad (41)$$

Megoldás:

$$R(t) = R(0) \exp \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \quad (42)$$

bevezetjük a normált skálafaktort, $a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$ ami a jelenlegi R_0 állapothoz viszonyított skála.

Távolodási sebességmérés

Előzőekben tárgyalt tapasztalat, hogy $v = c \cdot z$ ahol $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$. **Kérdés:** mi a kozmológiai magyarázat? Egy A pontból (távolsági csillag) fényjel indul egy d távolságra levő B pontba, ami legyen a Föld.

$$\lambda' = \lambda_A = R(t_A) \cdot c_i \quad \lambda = \lambda_B = R(t_B) \cdot c_i \quad (43)$$

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{R(t_A)}{R(t_B)} = 1 + z \quad z = \frac{\lambda_A - \lambda_B}{\lambda_B} \quad (44)$$

Mivel a B pont a föld ezért legyen $t_B \equiv t_0$. Ezt felhasználva linearizálunk

$$R(t_A) \cong R(t_0) \left[1 + \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} (t_A - t_0) + \mathcal{O}((t_A - t_B)^2) \right] \quad (45)$$

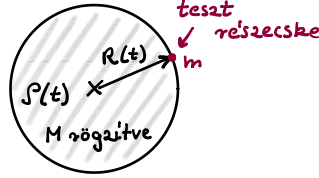
$$1 + z \cong 1 + \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} (t_A - t_0) \quad (t_A - t_0) \cong \frac{d}{c} \quad (46)$$

$$c \cdot z = \frac{\dot{R}}{R} \cdot d = v \quad \Rightarrow \quad c \cdot z = v \quad (47)$$

4. A gravitáció Einstein-féle elmélete, Friedmann-Robertson-Walker megoldás

4.1. Friedmann-egyenlet

Legyen az Univerzum modellezve egy $R(t)$ sugarú, $\varrho(t)$ sűrűségű (állandó M tömegű) gömbbel, aminek a határán egy m tömegű teszt-részecske mozgását vizsgáljuk.



6. ábra.

$$F_G = m \cdot a \quad a = \ddot{R} \quad M = \frac{4\pi}{3} \varrho R^3 \quad (48)$$

Szokásos gravitációs kölcsönhatás esetén,

$$F_G = -G \frac{mM}{R^2} \implies U_G = -G \frac{M}{R} \quad F_G = -m(\text{grad } U_G) \implies \text{grad } U_G = G \frac{M}{R^2} \quad (49)$$

ahonnan a gravitációs kölcsönhatás Laplace-Poisson egyenlete származtatható

$$\text{div grad } U_G \equiv \partial_i \partial_i U_G = 4\pi \cdot G \cdot \varrho \quad (50)$$

aminek vegyük az úgynevezett Neumann-Seeliger módosítást, azaz egy λ konstans hozzáadásával kapott egyenletet

$$\begin{aligned} \text{div (grad } U_G) + \lambda &= 4\pi \cdot G \cdot \varrho \\ \int_V \text{div (grad } U_G) &= \int_{\partial V} \text{grad } U_G = - \int_V \lambda + 4\pi G \int_V \varrho \end{aligned} \quad (51)$$

Feltételezve $U_G = U_G(|R|)$ a ∂V felületi integrál triviális

$$4\pi R^2 \text{grad } U_G = -\frac{4\pi}{3} R^3 \lambda + 4\pi \cdot G \cdot M \quad \text{mivel } \partial V = 4\pi \cdot R^2 \quad (52)$$

ahonnan visszkapjuk a szokásos alakot azonban módosított gravitációs potenciállal

$$-\text{grad } U_G = \frac{1}{3} \lambda R - G \frac{M}{R^2} \quad (53)$$

felhasználva a mozgásegyenletet ($-\text{grad } U_G = \ddot{R}$) kapjuk

$$\ddot{R} + \frac{GM}{R^2} - \frac{1}{3} \lambda R = 0 \quad (54)$$

amit megszorozva $\dot{R}$ -el és integrálva jutunk a Friedman-egyenlethez

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{GM}{R} - \frac{\lambda R^2}{6} = E \implies \left[\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{8\pi}{3} G \varrho - \frac{\lambda}{3} = \frac{2E}{R^2} \right] \quad (55)$$

ahol E az integrálási konstans, ami alapján három eset lehetséges (lásd feldobott kő ahol $v = \dot{R}$):

- $E > 0$ akkor $v_\infty > 0$
- $E = 0$ akkor $v_\infty = 0$
- $E < 0$ akkor oszcillál

Végül bevezetjük a Λ kozmológiai állandót, $\lambda = \Lambda \cdot c^2$.

4.2. Einstein-egyenlet, Friedmann-Robertson-Walker metrika

A távolság euklideszi rendszerekben

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (56)$$

ahonnan az ívelem Minkowski-téridőben,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \cdot dx^\mu \cdot dx^\nu = c^2 \cdot dt^2 - dl^2 \quad (57)$$

Használjunk a továbbiakban $c \equiv 1$ egységrendszert. Friedmann-Robertson-Walker metrika (de sík téridő) esetén a metrikus tenzor a következő alakban adható meg

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix} \quad (58)$$

ahol $a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$. Ha $a(t) = 1$ visszkapjuk a szokásos Minkowski-téridőt. Induljunk ki az Einstein egyeletből,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \cdot G \cdot T_{\mu\nu} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot g_{\mu\nu} \cdot R \quad (59)$$

anihez hozzávesszük a kozmológiai konstans

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot g_{\mu\nu} \cdot R - \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = 8\pi \cdot G \cdot T_{\mu\nu} \quad (60)$$

ahol

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\nu}{\partial X^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \cdot \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta && \text{Ricci - tenzor} \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} && \text{Ricci - skalar} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \frac{1}{2} g^\alpha \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial X^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial X^\nu} \right) && \text{Christoffel - szimbolum} \end{aligned} \quad (61)$$

és $T_{\mu\nu}$ az energia impulzus tenzor, illetve $G_{\mu\nu}$ az Einstein tenzor.

Megoldás Friedmann-Robertson-Walker metrika esetén

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a} \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \delta_{ij} \frac{\dot{a}}{a} \quad (62)$$

és a többi elem nulla. Innen

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a} && R_{ij} = \delta_{ij} (2\dot{a} + a\ddot{a}) \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} - \frac{1}{a^2} R_{ii} = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (63)$$

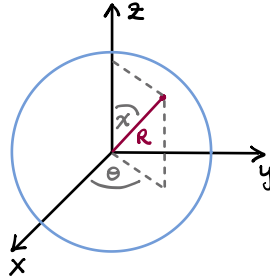
Az Einstein-egyenlet **idő-idő** komponenséből ($T_{00} \equiv \rho$) kapjuk a Friedmann-egyenletet $E=0$ esetre (sík téridő),

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R - \Lambda g_{00} = 8\pi GT_{00} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{\Lambda}{3} = 0 \quad (64)$$

Az Einstein-egyenlet diagonális **i-i** komponense pedig $\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a$ összefüggésre vezet $\Lambda = 0$ esetben.

Einstein-egyenlet, görbült téridő és Friedmann-Robertson-Walker metrika:

- 2D-zárt: (3D gömb felület)



7. ábra.

$$z = R \cos \chi$$

$$x = R \sin \chi \cos \theta$$

$$y = R \sin \chi \sin \theta$$

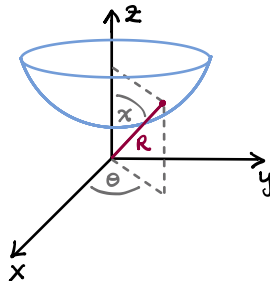
$$\text{Mivel a felületen van ezért: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 = R^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2) \quad (65)$$

$$\text{legyen } \varrho = \sin \chi$$

$$d\chi = \frac{d\varrho}{\cos \chi} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} \quad \Rightarrow \quad dl^2 = R^2 \left(\frac{d\varrho^2}{1 - \varrho^2} + \varrho^2 d\theta^2 \right) \quad (66)$$

- 2D-nyílt: (3D hiperboloid felülete)



8. ábra.

$$z = R \cosh \chi$$

$$x = R \sinh \chi \cos \theta$$

$$y = R \sinh \chi \sin \theta$$

mivel felületen van: $z^2 - x^2 - y^2 = R^2$

$$dl^2 = dz^2 + dx^2 + dy^2 = R^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\theta^2) \quad (67)$$

Legyen $\varrho = \sinh \chi$

$$d\chi = \frac{d\varrho}{\cosh \chi} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 + \sinh^2 \chi}} \implies dl^2 = R^2 \left(\frac{d\varrho^2}{1 + \varrho^2} + \varrho^2 d\theta^2 \right) \quad (68)$$

2D ívelem:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left(\frac{d\varrho^2}{1 - k\varrho^2} + \varrho^2 d\theta^2 \right) \quad k = \pm 1 \quad (69)$$

3D ívelem:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left[\frac{d\varrho^2}{1 - k\varrho^2} + \varrho^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \right] \quad k = \pm 1 \quad (70)$$

amely felhasználásával az **Einstein-egyenletből** ($c \equiv 1$ és $R \rightarrow a(t)$) visszkapjuk a Friedmann egyenletet,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{8\pi}{3} G \varrho - \frac{\Lambda}{3} = -\frac{k}{a^2} \quad (71)$$

- $k=+1$ zárt $E < 0$
- $k=0$ sík $E = 0$
- $k=-1$ nyílt $E > 0$

4.3. Friedmann-egyenlet vizsgálata

Vizsgáljuk meg az előzőekben levezetett Friedmann-egyenletet. Legyen $k=E=0$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{8\pi}{3} G \varrho - \frac{\Lambda}{3} = 0 \quad (72)$$

Bevezetjük az időfüggő Hubble állandót $H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{R}}{R}$ a Hubble-törvény ($\dot{R} = H(t)R$, $\dot{a} = H(t)a$) átírásával. Jelöljük H_0 -val a Hubble állandó jelenleg mért értékét,

$$H_0 = H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \dot{a}(t_0) = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = \frac{\dot{R}_0}{R_0} \quad (73)$$

A Friedmann-egyenlet megoldásához szükség van a $\varrho(a)$ függvény meghatározására. Három esetről beszélhetünk.

1. **Anyag (material)** dominálta eset

$$\varrho_m(t) = \varrho_m(t_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \varrho_m(t_0) \cdot \frac{1}{a^3} \quad (74)$$

$$\text{mivel a teljes tömeg } M = \text{állandó} = \frac{4R^3\pi}{3}\varrho \implies \varrho \sim \frac{1}{a^3}$$

2. **Sugárzás (radiation)** dominálta eset

$$\varrho_r(t) = \varrho_r(t_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 = \varrho_r(t_0) \cdot \frac{1}{a^4} \quad (75)$$

mivel $\lambda \sim a$ továbbá a Wien-törvény alapján tudjuk, hogy

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{konstans} \quad \implies \quad T \sim \frac{1}{\lambda} \quad (76)$$

vagy

$$\langle E \rangle \sim kT, \quad \langle E \rangle = \frac{hc}{\lambda} \quad \implies \quad T \sim \frac{1}{\lambda} \quad (77)$$

majd felhasználva a Stefan-Boltzmann törvényt adódik a keresett összefüggés,

$$\varepsilon = c \cdot T^4, \quad \varrho_r c^2 = \varepsilon \quad \implies \quad \varrho_r \sim T^4 \sim \frac{1}{a^4} \quad (78)$$

3. Kozmológiai állandó (Λ) dominálta eset

$$\varrho_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{8\pi G} = \text{konstans} \quad (79)$$

aminek a fizikai tartalmára egy lehetséges magyarázat a vákuum energiasűrűség.

Ezek alapján a Friedmann-egyenlet a következőképpen írható

$$H(t)^2 - \frac{8\pi G}{3} [\varrho_m(t) + \varrho_r(t) + \varrho_\Lambda(t)] = 0 \quad (80)$$

ahol $\varrho(t) \sim a^{-n}$ három esete,

- $n=3$ anyag
- $n=4$ sugárzás
- $n=0$ kozmológiai állandó

4.4. Friedmann-egyenlet megoldása

Ha $k=E=0$ és $\varrho(t) = \varrho_m(t) + \varrho_r(t) + \varrho_\Lambda(t)$ ahol $\varrho(t) \sim R^{-n} \sim a^{-n}$ akkor a Friedmann-egyenlet

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \varrho(t)} \quad \implies \quad \dot{R} R^{\frac{n}{2}-1} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} = \text{konstans} \quad (81)$$

megoldásai

$$n \neq 0 : \quad \dot{R} \cdot R^{\frac{n}{2}-1} = \frac{2}{n} \frac{d}{dt} (R^{\frac{n}{2}}) = \text{konstans} \Rightarrow R(t) \sim t^{\frac{2}{n}}, \quad H \sim \frac{2}{nt} \quad (82)$$

$$n = 0 : \quad H = \text{konstans} \Rightarrow \dot{R} = H \cdot R \Rightarrow R(t) \sim \exp(Ht) \quad (83)$$

ahonnan egy tágulási időskála definiálható, $t = \frac{1}{H(t)} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \varrho(t)}}$ $n = 3, 4$.

Ha $k \neq 0$ ($E \neq 0$) akkor írható

$$H^2(1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda) = -\frac{k}{a^2}, \quad \Omega_m = \varrho_m \frac{8\pi G}{3H^2}, \quad \Omega_r = \varrho_r \frac{8\pi G}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (84)$$

továbbá bevezetve $\Omega_{\text{teljes}} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ és $\Omega_k = -\left(\frac{k}{H^2 a^2}\right)$ a Friedmann-egyenlet alakja leegyszerűsödik

$$1 - \Omega_{\text{teljes}} = \Omega_k \quad (85)$$

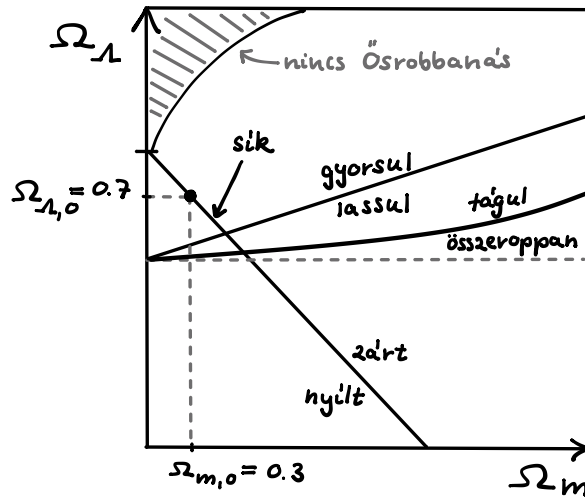
Ha a teljes sűrűség egy kritikus értéket vesz fel azaz

$$\varrho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \varrho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \cong 5 \text{ Hidrogen atom}/m^3 \quad (86)$$

a görbület nullának adódik, azaz $\Omega_{\text{teljes}} = 1$ és $\Omega_k = 0$. Mérésekből azt kapjuk, hogy jelenleg a sugárzásból származó tag elhanyagolható, azaz $\varrho_r(t_0) \ll \varrho_m(t_0), \varrho_\Lambda(t_0)$ ennek megfelelően $\Omega_{\text{teljes},0} \cong \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$ továbbá szintén mérések alapján tudjuk,

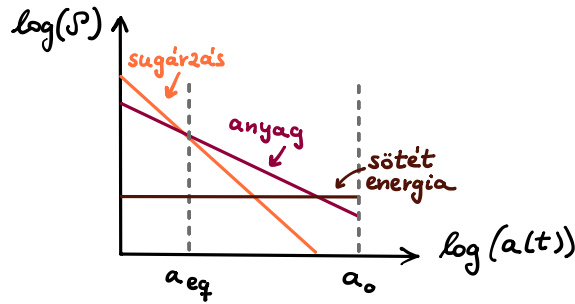
$$\Omega_{m,0} \cong 0.3 \quad \Omega_{\Lambda,0} \cong 0.7 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{teljes},0} \cong 1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{k,0} = 0 \quad (87)$$

Vagyis az Univerzum **nem görbült** és használható a $k=0$ megoldás.



9. ábra.

Az Univerzum történetének 3 szakasza:



10. ábra.

1. Sugárzás: $a \sim t^{\frac{1}{2}}$ $H \sim \frac{1}{2t}$ $\varrho_r \sim \frac{1}{a^4} \sim \frac{1}{t^2}$
2. Anyag: $a \sim t^{\frac{2}{3}}$ $H \sim \frac{2}{3t}$ $\varrho_m \sim \frac{1}{a^3} \sim \frac{1}{t^2}$
3. Sötétenergia: $a \sim \exp(Ht)$ $H = \text{konstans}, \quad \varrho_\Lambda = \text{konstans}$

Elméletet alátámasztó megfigyelések:

Olbers-paradoxon, Hubble tágulás, mikrohullámú háttérsugárzás, könnyű elemek keletkezése

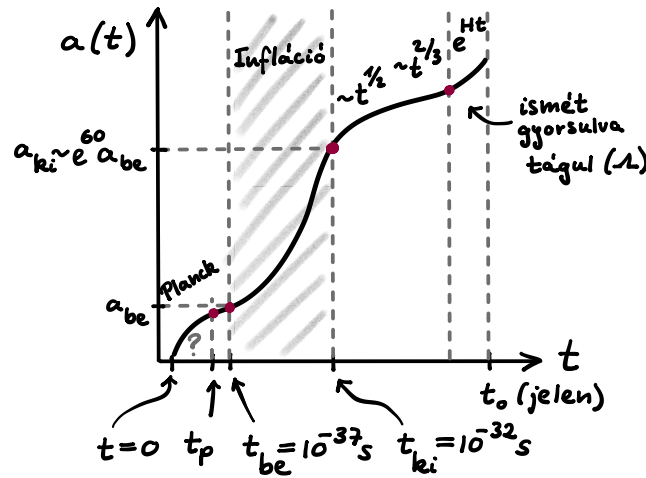
Problémák:

- Horizontprobléma: ellentétes irányból érkező fotonok termalizációja

- Finomhangolás: térbeli metrika sík jellege
- Struktúra kialakulása: anyag csomósodásának gyökere

Megoldás: INFLÁCIÓ Alan Guth, 1981

- Korai tágulás: inflaton (ősanyag) $\varrho(t) \sim \varrho_0$
ezért $H(t)^2 - \frac{8\pi G}{3}\varrho = -\frac{k}{a^2} \cong 0$ vagyis a globális görbület elhanyagolható volt
- másrészt az inflaton tag sűrűsége dominált ezért $H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varrho_{\text{infl}} \equiv H_{\text{infl}}^2 \implies a_{\text{ki}} = a_{\text{be}} \cdot e^{H_{\text{infl}}(t_{\text{ki}} - t_{\text{be}})}$
A hirtelen felfúvódás során jelenlevő statisztikus fluktuációk a csomósodás gyökerei.



11. ábra. Skálafaktor időfüggése.

Planck-skála (hossz, idő, energia, tömeg, sűrűség) kapcsolatba hozható az infláció kezdetével ($a_{\text{be}} = \frac{R_{\text{Planck}}}{R_0}$)

$$l_p = ct_p \quad E_p = m_p c^2 \quad m_p = \varrho_p l_p^3 \quad (88)$$

felhasználva: $\varrho_p \simeq \frac{1}{Gt_p^2}$

$$\Delta E \cdot \Delta t \simeq m_p c^2 t_p \simeq \varrho_p l_p^3 c^2 t_p \simeq \frac{1}{Gt_p^2} (t_p^3 c^3) c^2 t_p \simeq \frac{t_p^2 c^5}{G} \simeq \hbar \quad (89)$$

$$t_p \simeq \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \simeq 10^{-43} s \quad T_p \sim 10^{32} K \quad (90)$$

Gyorsulva táguló univerzum?

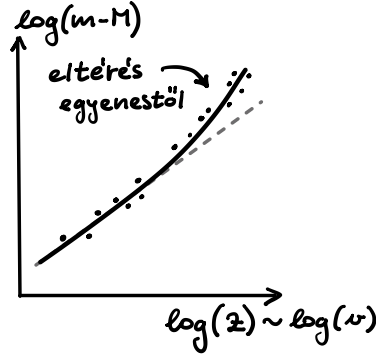
A Friedmann-egyenlet $k = 0$ esetben gyorsulva tágulást prediktál ha ϱ_Λ dominál,

$$H(t)^2 - \frac{8\pi G}{3}(\varrho_m + \varrho_r + \varrho_\Lambda) = 0, \text{ ha } \varrho_\Lambda \gg \varrho_m, \varrho_r \implies \dot{R} = H \cdot R \implies R(t) \sim e^{Ht} \quad (91)$$

aminek a mérése Hubble-törvénytől való eltéréssel lehetséges.

- Távolságmérésre a szokásos módszert használjuk, vagyis mérjük az m relatív fényességet, Cefeidák esetén a periódusidő méréseiből számolni tudjuk az M abszolút fényességet és használjuk az $m - M = -5 + 5 \log r$ összefüggést.

- Sebességmérésre szintén a szokásos módszert használjuk, vagyis szinképtolódásból határozzuk meg $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$.
- Kis távolságokon azt tapasztaljuk, hogy a Hubble-törvény szerint ($v = H_0 \cdot r$) lineáris összefüggés van a távolodási sebesség és a távolság között ($v = cz$ ahol c a fénysebesség).
- Nagy távolságokon a mérési eredmények eltérést mutatnak ettől!



12. ábra.

Magyarázat: eltérés a Hubble törvénytől a nem-lineáris tag miatt,

$$\begin{aligned}
 1 + z &= \frac{R_{t_A}}{R_{t_0}} & H_0 &\equiv \frac{\dot{R}}{R} \Big|_{t=t_0} & q_0 &\equiv -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} \Big|_{t=t_0} \\
 R_{t_A} &\cong R_{t_0} \left[1 + H_0(t_A - t_0) - \frac{q_0 H_0^2}{2} (t_A - t_0)^2 + \mathcal{O}((t_A - t_0)^3) \right] \\
 z &\cong H_0(t_A - t_0) - \frac{q_0 H_0^2}{2} (t_A - t_0)^2 + \dots \\
 \boxed{z &\cong H_0 \frac{r}{c} - \frac{q_0 H_0^2}{2} \left(\frac{r}{c} \right)^2} & & (92)
 \end{aligned}$$

ahol q_0 függ a gyorsulástól vagyis az eltérés mértékéből számolható a gyorsulás.

5. A Világegyetem születése, könnyű elemek szintézise

A Világegyetem születését célszerű a kézenfekvőnek tűnő időskála helyett/mellett azzal egyenértékű hőmérsékleti skála szerint tárgyalni. Ehhez szükséges a két skála kapcsolatának tisztázása.

Időskála: kozmológiai idő ($t=0$ minden óra szinkronizálva)

Hőmérsékleti skála: ekvivalens hőmérséklet (fekete test sugárzása)

- Ha $T > 0$ akkor van hőmérsékleti sugárzás
- Intenzitása nem függ az anyag típusától ($\varepsilon \sim T^4$)
- Olyan, mint egy üreget kitöltő elektromágneses sugárzás (használható az előzőekben levezetett Planck formula)
- Termikus egyensúly (kvázistatikus tágulás)

Friedmann-egyenlet:

$$H(t)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho = -\frac{k}{a^2} \quad (93)$$

(Görcbültséget jellemző k beolvasztható ρ kifejezésébe)

$$H(t)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho = 0 \quad \implies \quad H(t) = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} \quad (94)$$

Hubble-törvény: $\dot{R} = H \cdot R$ $\dot{a} = H \cdot a$ $\implies$ $\left(\frac{1}{H}\right)$ idő dimenziójú!

$$t_{\text{tagulas}} = \frac{1}{H(t)} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho(t)}} \quad (95)$$

Korai szakaszban sugárzás dominált: $\rho \sim \frac{1}{a^4} \sim T^4$

$$t_{\text{tagulasi}} \sim \frac{1}{T^2} \quad (96)$$

A tágulási idő arányos az inverz hőmérséklet négyzetével.

Például:

$$t_2 - t_1 \sim \frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2} \quad (97)$$

5.1. Világegyetem születése (első századmásodperc)

- **Nagy Bumm** (Big Bang), szingularitás $t = 0$ $T = \infty$
- **Planck korszak**
 - $0 < t < 10^{-43} s$ $\infty > T > 10^{32} K$
 - A négy alapvető kölcsönhatás azonos erősségű
 - Kvantumgravitáció (lehetséges elméletek: String theory, loop quantum gravity)
- **Nagy Egyesített Elmélet** (GUT=Grand Unification Theory) **korszaka**
 - $10^{-43} s < t < 10^{-37} s$ $10^{32} K > T > 10^{29} K$
 - Az elektromgyenge és az erős kölcsönhatás azonos erősségű!
 - A gravitáció levált a többi 3 kölcsönhatásról.
- **Inflációs szakasz FELFÚVÓDÁS!**
 - $10^{-37} s > T > 10^{-32} s$

- Az erős kölcsönhatás leválik az elektroyengéről. Mágneses monopólusok???
- Fázisátalakulás $\implies$ barion-antibarion szám kicsit eltér!

• Elektroyenge korszak:

- $10^{-32}s > t > 10^{-12}s$ $10^{29}K > T > 10^{16}K$
- A gravitáció és az erős kölcsönhatás már levált az elektroyenge kölcsönhatásról.
- Az erős kölcsönhatás elmélete: QCD (kvantum-szín dinamika)
- Kvarkok íze: u,d,c,s,t,b kvarkok színe: r,g,b; összesen $3 \times 6 = 18$ -féle kvark (+18 anti-kvark)
- Kvarkok + gluonok: kvark-gluon plazma (QGP)

• Elektroyenge fázisátalakulás

- $t=10^{-12}s$ $T = 10^{16}K$
- Elektromos és gyenge kölcsönhatás szétválik
- Tömeget kapnak $W^\pm, Z^0$ és kvarkok, leptonok (Higgs)
- Anyag-antianyag (barion-antibarion) arány rögzül.

• Kvark korszak

- $10^{-12}s > t > 10^{-6}s$ $10^{16}K > T > 2 \cdot 10^{12}K$
- A szabad kvarkok még nem rendeződnek hadronokba.

• Hadronizáció:

- $t = 10^{-6}s$ $T = 2 \cdot 10^{12}K$
- Kvarkbezárás.

Foton/nukleáris részecske arány:

Hőmérsékleti sugárzás Planck eloszlása: $d\varepsilon(f, T)$

Fotonok sűrűsége (kozmikus mikrohullámú háttérből $T = 2.73K$): $n(T) = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon(f, T)}{hf} \simeq 413 \cdot 10^6$ foton/m³

Friedmann egyenletből tudjuk: $\varrho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 5$ Hidrogen atom/m³
 $\eta^{-1} = \frac{\text{foton}}{\text{nukleáris részecske}} \simeq 10^{9\pm 1}$ (ha kritikus értékkel számolunk)

Jeans tömeg

Galaxisok kialakulásánál fontos η értéke:

- potenciális energia: $\frac{GM^2}{r}$
- mozgási energia: $kT \sim p \frac{4r^3\pi}{3} \iff p \equiv \text{nyomás (felhasználjuk: } pV=NkT)$
- Galaxisokhoz szükséges a gravitációs összehúzódnás: $\frac{GM^2}{r} \gg p \frac{4r^3\pi}{3}$
- mivel $M = \varrho \frac{4r^3\pi}{3}$ ezért $GM^2 \gg p \left(\frac{M}{\varrho}\right)^{\frac{4}{3}} \implies M \gg M_{\text{Jeans}} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{G^{\frac{3}{2}}\varrho^2}$ esetén alakulnak ki galaxisok

A mai univerzumban: a fotonok lecsatolódtak az anyagról.

A korai univerzumban: plazma $\equiv$ atommag+elektronok.

Ekkor a fotonok (sugárzás) erősen kölcsönhatnak az anyaggal vagyis hozzájárulnak a p nyomáshoz. Mivel $\eta^{-1} \simeq 10^{9\pm 1}$ nagy szám $\implies M_{\text{Jeans}}$ nagy érték vagyis korai univerzumban nincsenek galaxisok, csillagok!

Küszöbhőmérsékletek

Másik fontos következménye η^{-1} nagy értékének, hogy a korai univerzumban: $E_{\text{sugárzás}} > E_{\text{anyag}}$

- nyugvó nukleáris részecskére $E_{\text{anyag}} = mc^2 \simeq 939 \text{ MeV}$
- $E_{1\text{foton}} = kT$, ma $T = 2.73K \implies E_{\text{sugárzás}} = \eta^{-1} E_{1\text{foton}} \simeq 0.26 \text{ MeV}$

Vagyis ma az energia anyag formájában van jelen. Azonban a korai univerzumban magasabb a hőmérséklet. Ha elérjük a $T = 3500K$ értéket akkor $E_{\text{anyag}} \cong E_{\text{sugárzás}}$. Vagyis ha $T > 3500K$, akkor a sugárzás dominál. Ekkor tekinthetjük úgy mintha csak sugárzás lenne.

1. Elektron küszöbhőmérséklete:

$$e^- + e^+ \rightleftharpoons 2\gamma \implies m_{e^-} = m_{e^+} = 0.51 \text{ MeV}$$

$$\text{Ha } T = 3 \cdot 10^9 K \implies kT \sim 0.51 \text{ MeV}$$

Ezért ha $T > 3 \cdot 10^9 K \implies$ egyenlő valószínűséggel megy végbe a folyamat mindkét irányba.

Ekkor az elektronok száma $\simeq$ fotonok száma (termikus egyensúly).

2. Müion küszöbhőmérséklete

$$\mu^- + \mu^+ \rightleftharpoons 2\gamma \implies T = 1.2 \cdot 10^{12} K$$

Tehát magas hőmérsékleten azaz küszöbhőmérsékletek felett többféle sugárzással kitöltött univerzum létezik (különböző f szabadsági fokkal).

5.2. A Világegyetem születése (első 3 perc)

Mivel termodinamikai egyensúlyt tételeznek fel (T,N), ezért megmaradó mennyiségekkel jellemezzük a rendszert. Ezek az elektromos töltés (Q), a barionszám (B), és a leptonszám (L). (Akkor szükséges ha anyag $\neq$ antianyag).

- $\frac{Q}{n_\gamma} = 0$ azaz egy fotonra eső elektromos töltés nulla (mert nagy skálán csak gravitációt látunk)
- $\frac{B}{n_\gamma} = \frac{1}{\eta^{-1}} = 10^{-9}$ (barionok közül stabil: proton, neutron)
- $\frac{L}{n_\gamma} \cong \frac{B}{n_\gamma} = 10^{-9}$ (töltésmegmaradás miatt teljesül, mert az e^- stabil így $n_{e^-} \cong n_p$)
megjegyzés: a neutrínók ν (töltés nulla) járulékát elhanyagoltuk.

Folytatjuk a Világegyetem születésének leírását.

• Hadronikus korszak

- $10^{-6}s < t < 0.1s$ $2 \cdot 10^{12} > T > 3 \cdot 10^{10} K$
- Hadronizáció: $10^{-6}s$ és $T = 2 \cdot 10^{12} K$ ekkor a kvarkok hadronokba záródnak és nincs QGP
- Neutrínók termikus egyensúlya e^-, μ^- és fotonokkal
- $n + \nu_e \rightleftharpoons p + e^-$ $p + \bar{\nu}_e \rightleftharpoons e^+ + n$ azonos valószínűségű
- Innen következik

$$\frac{N_n}{N_p} = \frac{\exp(-\frac{m_n c^2}{kT})}{\exp(-\frac{m_p c^2}{kT})} = \exp\left(-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT}\right) \quad (98)$$

- mivel $(m_n - m_p)c^2 \approx 1.3 \text{ MeV}$ ezért például $T = 10^{11} K (kT \cong 8.6 \text{ MeV})$ esetén $\frac{N_n}{N_p} \cong \frac{\exp(1.3)}{\exp(8.6)}$

• Neutrínók lecsatolódása

- $t = 0.11s$ $T = 3 \cdot 10^{10} K$

- μ^- küszöbhőmérséklet alatt, de e^- küszöb felett ezért a neutrínók szóródnának az elektronokon, de a tágulás miatt a kölcsönhatás rátája lecsökken
- neutrínók lecsatolódnak, adiabatikus hűlés
- ma a neutrínók kozmikus háttérsugárzása $T = 1.9\text{ K}$ (ezt még kísérletileg nem ellenőrizték!)
- neutronok gyenge bomlása megindul! (változik N_n/N_p arány) és nincsenek atommagok

• **Leptonikus kor kezdete**

- $t=1.1\text{ s}$ és $T = 10^{10}\text{ K}$
- fokozatosan beindul az $e^- + e^+$ annihiláció amely felfűti a Világegyetemet,
- még nincs teljes lecsatolódás.

• **Leptonikus kor vége**

- $t=14\text{ s}$ és $T = 3 \cdot 10^9\text{ K}$
- Az e^- küszöbhőmérséklet alatt vagyunk tehát teljes a lecsatolódás (a neutrínókat nem fűtötte fel mert már korábban lecsatolódtak)

• **Foton korszak**

- $14\text{ s} < t < 380.000\text{ év}$
- Minden lepton-antilepton küszöbhőmérséklet alatt ezért nagy részük annihilálódott (keves anyag megmaradt az anyag-antianyag asszimetria miatt!)
- A fotonok azonban továbbra is szóródnak $\implies$ nem átlátszó az univerzum.

• **Könnyű atommagok keletkezése (foton korszakban)**

- (primordiális nukleoszintézis)
- Hűlés miatt az α részecskék stabillá válnak



- Meghatározó a deuteron stabilitása: $10^9\text{ K} > T$
(a legnagyobb energiájú fotonok energiája kisebb mint a deuteron kötési energiája)
- Ekkor $\frac{N_n}{N_p} = \frac{13\%}{87\%}$ innen az ősi héliumra:

$$\frac{m_{{}^4\text{He}}}{m_H + m_{{}^4\text{He}}} = \frac{2 \left(\frac{N_n}{N_p} \right)}{1 + \left(\frac{N_n}{N_p} \right)} \simeq 26\% \quad (101)$$

később alig változik!

- $Z < 6$ elemek: ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^7\text{Be} + \gamma \quad {}^7\text{Be} + e^- \longrightarrow \text{Li} + \nu$
(ennél nehezebb elemek nem jöhetnek létre!)

• **Anyag dominálás**

- $t \sim 70.000\text{ év} \quad T \sim 3500\text{ K}$
- ekkor $E_{\text{sugarzas}} \sim E_{\text{anyag}} \longleftarrow$ később ez dominál

- **Rekombináció**

- $t \sim 380.000$ év $T \sim 3000K$
- létrejönnek a H, He atomok
- a fotonok nem szóródnak
- Megszűnik a plazma állapot
- A fotonok szabadon utazhatnak, „átlátszóság ”
- Kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás

6. Kozmikus háttérsugárzás, az Univerzum energia-felosztása

- **Kozmikus háttérsugárzás felfedezése**

1965 A. Penzies, R. Wilson (Nobel-díj) (Bell Lab) érzékeny mikrohullámú antenna segítségével, iránytól, napszaktól, évszaktól független elektromágneses sugárzást mértek.

- **Magyarázat:** P.J.E. Peebles (Princeton)

Az Univerzumot elektromágneses sugárzás tölti ki, ami a rekombináció óta szabadon terjed. Az elektromágneses sugárzás hullámhossza megnőtt a tágulás arányában.

- Rekombináció: $t \sim 380000$ év
- EM lecsatolódik mert megszűnik a plazma állapot hiszen létrejönnek az első atomok.
- $1000 \cdot R_{\text{rekombinacio}} \cong R_{\text{ma}} = R_0$
- $T_{\text{rekombinacio}} \cong 3000K \longrightarrow T_{\text{ma}} \cong 3K$ mivel $T \sim \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{R}$

- **Planck-görbe, termikus egyensúly:**

- Ha a korai Univerzum termikus egyensúlyban volt $\implies$ EM sugárzás olyan mint egy tökéletes fekete test sugárzása.
- Fontos: a földi légkör árnyékol! ($\lambda \sim 10\text{cm}$ alatt átlátszatlan)
- Penzias-Wilson: $T \sim 3.5K$

- **Cosmic Background Explorer (COBE) űrszonda**

- Kozmikus háttérsugárzás pontosabb mérése volt a cél
- Földi légkör kiküszöbölése: űrszonda (1989-1993)
- Három műszer: (DMR, FIRAS, DIRBE)
- Eredmény: tökéletes fekete test sugárzási spektrum! $T = 2.725 \pm 0.002K$
- Kérdés: izotróp-e a kozmikus háttérsugárzás? (durva felbontásban igen, de finomabb felbontásnál?)
- Pontos mérés szükséges:
 - * Tejútrendszer hatását le kell vonni (extra sugárzás)
 - * Dipólus anizotrópia a Föld mozgásának következménye
 - * 7 fokos szögben vett minták ΔT -jét mérte
 - * ANIZOTRÓP, azonban nagyon kicsit $\Delta T \sim 10^{-5}K$! (Nobel-díj 2006: J.C. Mather, G.F. Smoot)
- Következmény: korai univerzumban INHOMOGÉN volt (kis mértékben)
 - * Fontos a kis mértékű inhomogenitás $\implies$ galaxisok kialakulása
 - * Sachs-Wolfe effektus:
Sűrűbb anyag $\longrightarrow$ több ütközés $\longrightarrow$ forróbb EM sugárzás, viszont nagyobb gravitáció $\longrightarrow$ nagyobb gravitációs vöröseltolódás, ezért összességében: jelenkorban alacsonyabb hőmérséklet. (ez dominál 1 foknál nagyobb szögskálán)
 - * Korai univerzum inhomogenitása:
Inflációs korszak után alakulhatott ki (statisztikus fluktuációk „felnagyítása”)

- **Háttérsugárzás hatványspektruma** Vizsgáljuk a háttérsugárzás fluktuációinak spektrumát.

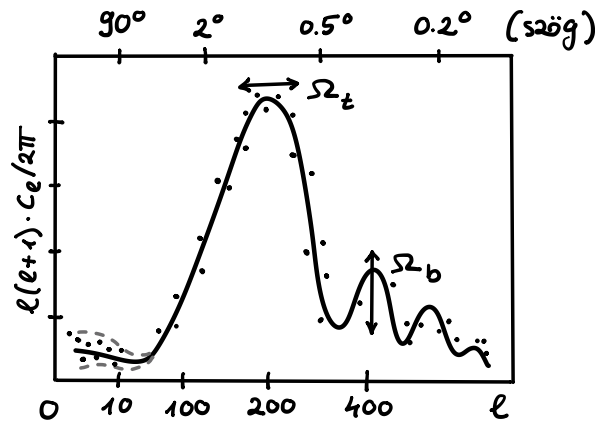
- Fluktuációk oka a korai univerzum sűrűsödései
- **Sűrűsödések leírása:** hanghullámok elmélete
 - * Hangerősség $\Leftrightarrow$ rezgések amplitúdója

- * Hangmagasság $\Leftrightarrow$ rezgések frekvenciája
- * Hangszín $\Leftrightarrow$ spektrum (az előző kettő)
- **Cél:** fluktuációk spektrumának feltérképezése (vagyis felbontása alapl módusra és felharmonikusokra)
- **Alapl módus:** lecsatolódáskor éppen kitöltötte az univerzumot
 $\lambda_{\text{alap}} \sim R_{\text{rekombinacio}} = 0.001 \cdot R_0 \sim 1$ fokos térszög
- **Felharmonikusok:** alapl frekvencia többszörösei $f_n = n \cdot f_{\text{alap}}$
Azt várjuk, hogy a fluktuációk szögeloszlását vizsgálva a legnagyobb értéket az alapl módusnak megfelelő 1 foknál látunk.
- **Módszer:** gömbi harmonikusok szerint kifejtjük:

$$\frac{\Delta T(\vartheta, \varphi)}{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (102)$$

a_{lm} : kifejtési együtthatók, $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$: gömbi harmonikusok
 $c_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle$ (átlagolunk m-re)

- **Mérés:** WMAP, PLANCK,...



13. ábra.

(bizonytalan l-kis értékeire)
elő csúcs helye Ω_{teljes} -től függ
második csúcs nagysága Ω_b -től

• Az Univerzum energiájának eloszlása

- Kozmikus háttérsugárzás hatványspektrumából meghatározhatjuk Ω_t, Ω_b és további 3 paramétert!
- Mérések pontosítása most is folyik (pl. PLANCK)
- **Eddigi eredmények:**
 - * **Univerzum teljes sűrűsége:** $0.9821 < \Omega_{\text{teljes}} < 1.0081$
vagyis $\Omega_{\text{teljes}} \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad$ vagyis az univerzum térgörbülete: sík!
 - * **Barionikus anyag sűrűsége:** $\Omega_b = 0.0456 \pm 0.0015$

-
- * **Nem-barionikus anyag:** $\Omega_m - \Omega_b = 0.228 \pm 0.013$

vagyis létezik sötét anyag (nem-barionikus)

$$\text{továbbá } \Omega_m \simeq 0.274 \quad \implies \quad \Omega_\lambda \cong \Omega_{\text{teljes}} - \Omega_m \simeq 0.73$$

vagyis létezik sötét energia.

Megjegyzés: pontos képlet: $\Omega_{\text{teljes}} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\lambda$

Ω_r a sugárzás sűrűsége

azonban $\Omega_r \simeq 0$ mivel a jelenben a Λ és az anyag dominál, tehát a sugárzás elhanyagolható.

- * Hubble-állandó értéke is meghatározható:

$$H_0 = 72 \pm 5 \frac{km}{s} \cdot \frac{1}{Mpc}$$