4. feladatsor
Speciális szoftverek – LaTeX

Vadon Viktória

2023/24/I. félév

Szükséges csomagok

- amsthm
- amsmath, mathtools
- amsfonts, amssymb

Korábban már használt, de most is szükséges csomagok

- hyperref

1. Feladat (Tételkörnyezetek).

a) definiáljunk *Tétel* (megjelenítendő) néven tételkörnyezetet, és helyezzünk el belőle a dokumentumban 2-t! az egyiknek adjunk nevet/szerzőt is!
b) definiáljunk *Lemma* néven egy tételkörnyezetet, amit a Tétellel együtt sorszámoz! helyezzünk el a dokumentumba (legalább) 1 Lemmát!
c) milyen csomaggal tudjuk megváltoztatni a tételek stílusát? töltsük be!
d) definiáljunk Definíció néven, `definition` stílussal egy tételkörnyezetet, amit section-önként számoz! helyezzünk is el két section címsort a dokumentumban, és legalább 2+1 Definíciót a két szakaszba!
e) az egyik Tétel után helyezzünk el két *bizonyítást*! az egyiket nevezzük el a Lemma bizonyításának, és helyezzünk el benne kereszthivatkozást a Lemmára!

2. Feladat (Matematikai formulák A-tól Z-ig).

a) lentebb, a 1. szakasztól kezdve matematikai szöveg(részletek) és formulák találhatók
b) reprodukáljuk őket, a lehető legjobban!
c) eközben mire figyeljünk:
d) a kísérő szövegben figyeljünk rá, hogy mi inline (sorközi) matematikai formula, és mi rendes szöveg!

e) a számozott formulákat igyekezzünk mi is számozni, a számozatlanokat pedig számozatlanul hagyni!
f) egyes formulákban szükségünk lesz többsoros formulákra és igazításukra is!
g) helyezzük el a szükséges kereszthivatkozásokat (label-öket és rájuk mutató ref-eket) is!
h) segítség: néhány nem triviális szimbólum
   - 2. szakasz c) pontjában σ, kis szigma, görög betű, `\sigma`
   - 2. szakasz d) pontjában $\mathcal{I}$: kézírásos nagy I betű, `\mathcal{I}`

3. Szorgalmi feladat (Matematikai makrók)**.**

a) Definiáljuk a beépített max függvényhez hasonlóan egy arg max operátort! a max-hoz hasonlóan az index az arg max *alá* kerüljön kiemelt matematikai módban! teszteljük a következő formulával:

$$x^\star := \operatorname*{arg\,max}_{x\in[0,1]} x\log_2(x).$$

b) Definiáljuk páros zárójelként a felső egészrész függvényt! hogyan tudjuk elérni, hogy a zárójel mérete automatikusan igazodjon a tartalomhoz? teszteljük a következő formulákon:

$$\lceil x\rceil, \left\lceil\frac{5}{3}\right\rceil$$

c) definiáljuk a várható értéket, mint egy 1 argumentumos makrót! hogyan építhetünk bele a tartalomhoz igazodó méretű zárójelet? teszteljük a következő formulákon:

$$\mathbb{E}[X_i] \qquad \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right]$$

   - tipp: először definiáljuk hozzá külön a szögletes zárójelet!

d) definiáljuk a feltételes várható értéket, mint egy 2 argumentumos parancsot: az első argumentum legyen a változó, a második argumentum pedig a feltétel. hogyan érhetjük el, hogy ne csak a zárójel, hanem a feltételt jelző függőleges vonal mérete is igazodjon a tartalomhoz? teszteljük a következő formulákon:

$$\mathbb{E}[X_i \mid X_j] \qquad \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i \,\middle|\, N\right]$$

e) az előzőek kombinálásával gépeljük be a „toronyszabály” formuláját:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i \,\middle|\, N\right]\right]$$

1. Bevezető

Készítsük el a követező matematikai formulákat (és a kísérő szöveget):

a) Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszege:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n-ig, azaz
$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{1}$$

Konvenció szerint $0! = 1$.

c) Legyen $0 \leq k \leq n$. A binomiális együttható
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$
ahol a faktoriálist (1) szerint definiáljuk.

d) Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:
$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

2. Determináns

Készítsük el a követező matematikai formulákat (és kísérő szöveget):

a) Legyen
$$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$$
a természetes számok halmaza 1-től n-ig.

b) Egy n-edrendű *permutáció* σ egy bijekció $[n]$-ből $[n]$-be. Az n-edrendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n-nel jelöljük.

c) Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverziónak nevezünk egy (i, j) párt, ha $i < j$ de $\sigma_i > \sigma_j$.

d) Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:
$$\mathcal{I}(\sigma) := \Big|\big\{(i, j) \;\big|\; i, j \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j\big\}\Big|.$$

e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, egy $n \times n$-es (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} \tag{2}$$

3. Logikai azonosság

Készítsük el a következő táblázatot, formulákat és levezetést. Ügyeljünk a számozásra és igazításra is!

Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \to d = a \to \big(b \to (c \to d)\big). \tag{3}$$

A következő azonosságokat bizonyítás nélkül használjuk:

$$x \to y = \bar{x} \vee y \tag{4a}$$
$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \tag{4b}$$

A (3) bal oldala, (4) felhasználásával

$$(a \wedge b \wedge c) \to d \underset{(4a)}{=} \overline{a \wedge b \wedge c} \vee d \underset{(4b)}{=} (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \vee d. \tag{5}$$

A (3) jobb oldala, (4a) ismételt felhasználásával

$$\begin{aligned} a \to \big(b \to (c \to d)\big) &= \bar{a} \vee \big(b \to (c \to d)\big) \\ &= \bar{a} \vee \big(\bar{b} \vee (c \to d)\big) \\ &= \bar{a} \vee \big(\bar{b} \vee (\bar{c} \vee d)\big), \end{aligned} \tag{6}$$

ami a $\vee$ asszociativitása miatt egyenlő (5) egyenlettel.

4. Binomiális tétel

`align` és `split` segítségével igazítsuk a következő (induktív bizonyításból kiragadott) sorokat! Figyeljünk a számozásra is!

Ehhez a feladathoz a `verbatim` *formulák (természetesen az igazítás kódja nélkül) lentebb megtalálhatók!*

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \right) \tag{7a}$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(n+1)-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k}b^{k} \tag{7b}$$

$$= \cdots$$

$$\begin{split} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k}b^k \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}. \end{split} \tag{7c}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k}b^k. \tag{7d}$$

```
(a+b)^{n+1}
= (a+b) \cdot \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \right)
= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(n+1)-k}b^k
+ \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k}b^{k}
= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0
+ \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k}b^k
+ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}
= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k}b^k
```