

6. feladatsor

Bevezetés a \LaTeX szövegszerkesztésbe

Vadon Viktória

2022/23/I. félév

Szükséges csomagok

(A csomagok közül némelyik az alap \LaTeX telepítés része, így nem mindet kell kézzel telepíteni)

- `amsmath` – alap disztribúció része
- `amsfonts`, `amssymb` – `amsfonts` bundle
- `mathtools`

1. Bevezető

Készítsük el a következő matematikai formulákat (és a kísérő szöveget):

a) Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n -ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n. \quad (1)$$

Konvenció szerint $0! = 1$.

c) Legyen $0 \leq k \leq n$. A binomiális együttható

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

ahol a faktoriális [\(1\)](#) szerint definiáljuk.

d) Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

2. Determináns

Készítsük el a következő matematikai formulákat (és kísérő szöveget):

a) Legyen

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

a természetes számok halmaza 1-től n -ig.

b) Egy n -edrendű *permutáció* σ egy bijekció $[n]$ -ből $[n]$ -be. Az n -edrendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n -nel jelöljük.

c) Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverzióknak nevezünk egy (i, j) párt, ha $i < j$ de $\sigma_i > \sigma_j$.

d) Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:

$$\mathcal{I}(\sigma) := \left| \{(i, j) \mid i, j \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j\} \right|.$$

e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, egy $n \times n$ -es (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i} \quad (2)$$

3. Logikai azonosság

Készítsük el a következő táblázatot, formulákat és levezetést. Ügyeljünk a számozásra és igazításra is!

Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és rajta a következő, igazságtáblával definiált műveleteket:

x	\bar{x}	x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \rightarrow d = a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)). \quad (3)$$

A következő azonosságokat bizonyítás nélkül használjuk:

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y \quad (4a)$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \quad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \quad (4b)$$

A (3) bal oldala, (4) felhasználásával

$$(a \wedge b \wedge c) \rightarrow d \stackrel{(4a)}{=} \overline{a \wedge b \wedge c} \vee d \stackrel{(4b)}{=} (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \vee d. \quad (5)$$

A (3) jobb oldala, (4a) ismételt felhasználásával

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)) &= \bar{a} \vee (b \rightarrow (c \rightarrow d)) \\ &= \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (c \rightarrow d)) \\ &= \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (\bar{c} \vee d)), \end{aligned} \quad (6)$$

ami a \vee asszociativitása miatt egyenlő (5) egyenlettel.

4. Binomiális tétel

`align` és `split` segítségével igazítsuk a következő (induktív bizonyításból kiragadott) sorokat! Figyeljünk a számozásra is!

Ehhez a feladathoz a verbatim formulák (természetesen az igazítás kódja nélkül) lentebb megtalálhatók!

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \quad (7a)$$

= ...

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k \quad (7b)$$

= ...

$$\begin{aligned} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}. \end{aligned} \quad (7c)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k. \quad (7d)$$

$$\begin{aligned}
& (a+b)^{n+1} \\
&= (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k \\
&+ \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 \\
&+ \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k \\
&+ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k
\end{aligned}$$