

Tartalomjegyzék

1. TeglaAtloEgyenlotlenseg.1-11	3
2. teglaElAtloTestatlo.12-24	13
3. kockaVilagitasIranyok.25-36	21
4. TeglaMertaniSor.37-44	27
5. KockaArnyekCsillagfeny.45-52	33
6. kockaArnyekPontlampa.53-61	40
7. KerekAsztalArnyek.62-64	51
8. NegyzetAsztalArnyek.65-67	56
9. KockaFestes.68-74	62
10.NegyszogKornyezetTerulet.75-92	69
11.Kivagas.93-95	84
12.KetTetraeder.96-102	88
13.NovekvoTeglaLapTest.103-105	100
14.KivagasTeruletTerfogatTegla.106-112	102
15.KivagasTeruletTerfogatEk.113-120	105
16.TeglaSzamtaniSor.121-123	109
17.KivagasTeruletTerfogatCsonkaGula.124-130	111
18.KivagasTeruletTerfogatCsonkaGulaII.131-137	115
19.KivagasTeruletTerfogatEkII.138-144	119
20.KockaCsucsTavolsag.145-152	122
21.KockaCsucsKodolas.153-161	126
22.KockaCsucsJavitoKodolas.162-173	133

23. GombKockaGeodetikus.174-180	139
24. GPS.181-187	143
25. GPSTavolsag.188-194	149
26. EszkimoLaposFold.197-200	154
27. VakPokHangya.201-203	159
28. KockaCsucsUt.204-206	163
29. FeladatLista	168

1. TeglaAtloEgyenlotlenseg.1-11

Feladat: (a) (ea) Legyen egy téglalap két oldala $a = 4$ és $b = 3$ méter hosszú. Milyen messze van két átlellenes csúcsa, ha a két csúcs között

- i. csak légvonalban haladhatunk?
- ii. csak az oldalak mentén haladhatunk?
- iii. Hány féle legrövidebb út van az oldalak mentén a két átlellenes csúcs között?

(b) (eb) Legyen egy téglalap három éle $a = 5$, $b = 4$ és $c = 3$ méter hosszú. Milyen messze van két átlellenes csúcsa, ha a két csúcs között

- i. légvonalban,
- ii. csak az oldallapok mentén
- iii. csak az élek mentén haladhatunk?
- iv. Hány féle legrövidebb út van az oldallapok mentén,
- v. az élek mentén,
- vi. illetve légvonalban a két átlellenes csúcs között?

(c) (ec) Legyen $0 < c < b < a$. Igaz vagy hamis az az állítás, hogy az

$$I_a = \sqrt{(b+c)^2 + a^2},$$

$$I_b = \sqrt{(a+c)^2 + b^2},$$

$$I_c = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

mennyiségek közül mindig I_c a legkisebb?

(d) (ed)

Legyen $0 < c < b < a$. Igaz vagy hamis az az állítás, hogy az

$$I_a = \sqrt{(b+c)^2 + a^2},$$

$$I_b = \sqrt{(a+c)^2 + b^2},$$

$$I_c = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

mennyiségek közül mindig I_a a legkisebb?

(e) (ee) Legyen $0 < c < b < a$. Igaz vagy hamis az az állítás, hogy létezik három ilyen a, b, c szám olyan módon, hogy az

$$I_a = \sqrt{(b+c)^2 + a^2},$$

$$I_b = \sqrt{(a+c)^2 + b^2},$$

$$I_c = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

mennyiségek közül I_c a legkisebb?

(f) (ef)

Legyen $0 < c < b < a$. Igaz vagy hamis az az állítás, hogy létezik három ilyen a, b, c szám olyan módon, hogy az

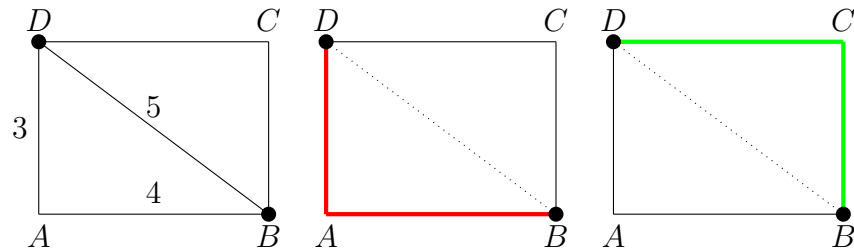
$$I_a = \sqrt{(b+c)^2 + a^2},$$

$$I_b = \sqrt{(a+c)^2 + b^2},$$

$$I_c = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

menyiségek közül I_a a legkisebb?

Megoldás: (a) (ea)



i. A Pitagorasz tétel szerint

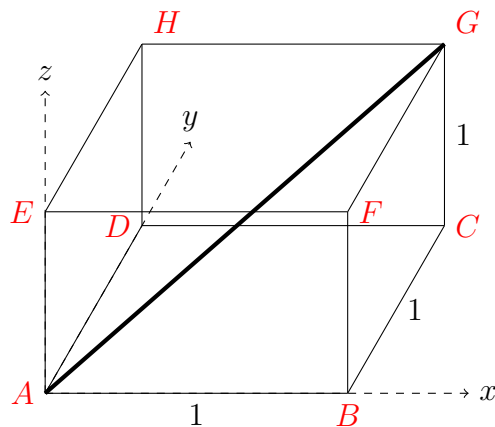
$$|\overline{BD}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

ii. A B és D pontok távolsága az oldalak mentén nyilván 7, pl. haladhatunk a piros $B - A - D$ úton.

iii. Két lehetőség van, hiszen a B pontból először mehetünk A felé (piros út), illetve a C csúcs felé (zöld út).

(b) (eb)

i.



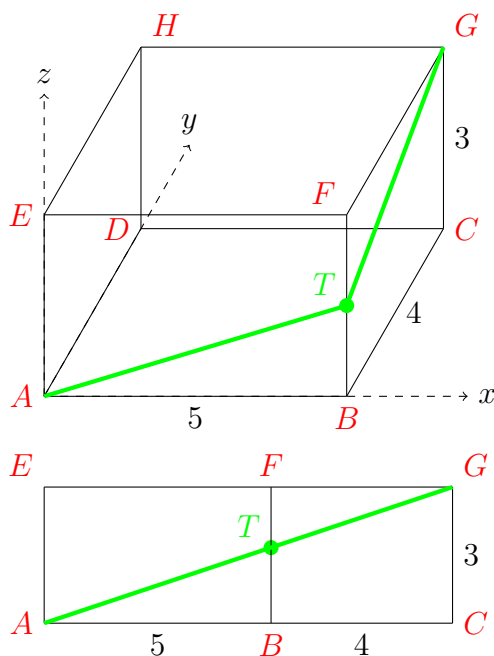
A két áttellenes $A = (0, 0, 0)$ és $G = (5, 4, 3)$ pont távolsága a háromdimenziós Pitagorasz tétel segítségével számítható ki:

$$|\overline{AG}| = \sqrt{(5-0)^2 + (4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{50} = 7.0710 \dots$$

- ii. Az oldallapok mentén haladó legrövidebb út valahol metszeni fogja a

$$B - F - E - H - D - C - B$$

törtvonalat. Történjen meg ez mondjuk az FB élen. Ekkor az FB él mentén kiterítve az ott érintkező két oldalt megkapjuk az alsó ábrát:



Ezen látható, hogy a T pont az FB élt $5 : 4$ arányban osztja, így $T = (5, 0, 3 \cdot (5/9)) = (5, 0, 5/3)$. A legrövidebb $A - T - G$ út hosszát kiszámíthatjuk a háromdimenziós Pitagorasz tétel segítségével:

$$\begin{aligned} \text{Ivhossz}(A - T - G) &= |\overline{AT}| + |\overline{TG}| \\ &= \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2 + (5/3-0)^2} \\ &\quad + \sqrt{(5-5)^2 + (4-0)^2 + (3-5/3)^2}. \end{aligned}$$

Vagy az alsó ábrán használhatjuk a 2d Pitagorasz tételt:

$$\begin{aligned} \text{Ivhossz}(A - T - G) &= |\overline{AG}| = \sqrt{(5+4)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{90} = 9.4868 \dots \end{aligned}$$

Az eredmény

$$\text{Ivhossz}(A - T - G) = \sqrt{(a + b)^2 + c^2},$$

amely formulában a, b szimmetrikus módon szerepel, míg a c élhosszt az tünteti ki, hogy az FB él hossza pont c .

Ha a kitüntetett élhossz (egy ilyen élen helyezkedne el a T pont) a , illetve b lenne (vagyis egy ilyen élhosszú élen menne keresztül a legrövidebb út), akkor a távolság

$$\text{Ivhossz}(A - T - G) = \sqrt{(b + c)^2 + a^2}, \quad \text{illetve}$$

$$\text{Ivhossz}(A - T - G) = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}$$

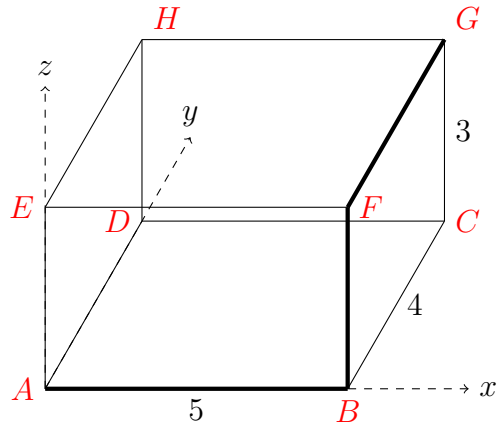
lenne. Esetünkben ezek közül az a élhosszú élen keresztül vezető út lenne a legrövidebb, vagyis az eredmény

$$\sqrt{(4 + 3)^2 + 5^2} = \sqrt{74} = 8.6023 \dots$$

Megjegyzés: Az első tippünk (ahol az FB élt metszettük a legrövidebb úttal) ugyan nem vált be, de amúgy egyáltalán nem volt egy totális nonszensz. Megpróbáltuk minimalizálni az $A - G$ utak hosszát, ennek az optimalizációs problémának legalábbis egy lokálisan optimális megoldást adná a c élhosszú BF élen át vezető megoldás. A *lokális optimum* szóösszetétel azt jelenti, hogy ha a megoldást csak egy kicsit változtatjuk meg (esetünkben pl. csak mondjuk 1 mm távolságra mozgatjuk el az útvonal pontjait) akkor az optimalizálandó mennyiség csak rossz irányba változhat.

- iii. A két átellenes $A = (0, 0, 0)$ és $G = (5, 4, 3)$ pont távolsága az élek mentén haladva nyilvánvalóan $5 + 4 + 3 = 12$. Hiszen egy él mentén haladva csak az egyik koordinátát tudjuk megváltoztatni a három x, y, z koordinátákból, tehát a legrövidebb út minimum három élből fog állni. Ennyi viszont elég is, mint azt az ábrán látható, vastag vonallal jelzett $A - B - F - G$

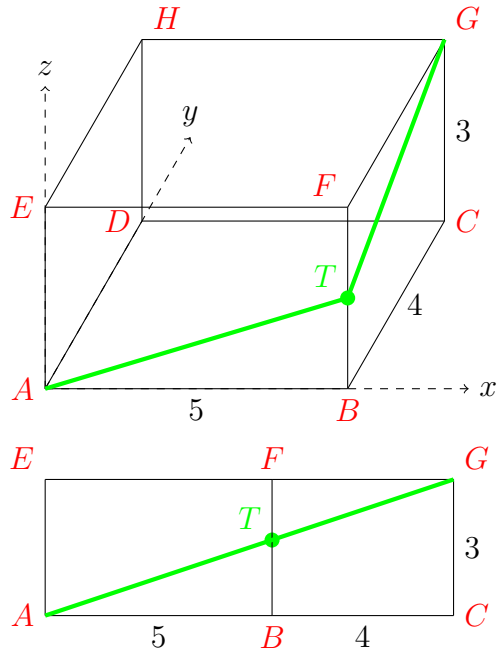
útvonal illusztrálja.



- iv. Az oldallapok menten haladó legrövidebb út valahol metszeni fogja a

$$B - F - E - H - D - C - B$$

tört vonalat. Történjen meg ez mondjuk az FB élen. Ekkor az FB el menten kiterítve az ott érintkező két oldalt megkapjuk az alábbi ábrát:



Ezen látható, hogy a T pont az FB élt $5 : 4$ arányban osztja, így $T = (5, 0, 3 \cdot (5/9)) = (5, 0, 5/3)$. A legrövidebb $A-T-G$ út

hosszat kiviszontláthatjuk a háromdimenziós Pitagorasz tétel segítségével:

$$\begin{aligned} \text{Ivhossz}(A - T - G) &= |\overline{AT}| + |\overline{TG}| \\ &= \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2 + (5/3-0)^2} \\ &\quad + \sqrt{(5-5)^2 + (4-0)^2 + (3-5/3)^2}. \end{aligned}$$

Vagy a jobb oldali ábrán használhatjuk a 2d Pitagorasz tételt:

$$\begin{aligned} \text{Ivhossz}(A - T - G) &= |\overline{AG}| = \sqrt{(5+4)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{90} = 9.4868\dots \end{aligned}$$

Az eredmény

$$\text{Ivhossz}(A - T - G) = \sqrt{(a+b)^2 + c^2},$$

amely formulában a, b szimmetrikus módon szerepel, míg a c élhosszt az tünteti ki, hogy az FB el hossza pont c .

Ha a kitüntetett élhossz (egy ilyen élen helyezkedne el a T pont) a , illetve b lenne (vagyis egy ilyen élhosszú élen menne keresztül a legrövidebb út), akkor a távolság

$$\begin{aligned} \text{Ivhossz}(A - T - G) &= \sqrt{(b+c)^2 + a^2}, \quad \text{illetve} \\ \text{Ivhossz}(A - T - G) &= \sqrt{(a+c)^2 + b^2} \end{aligned}$$

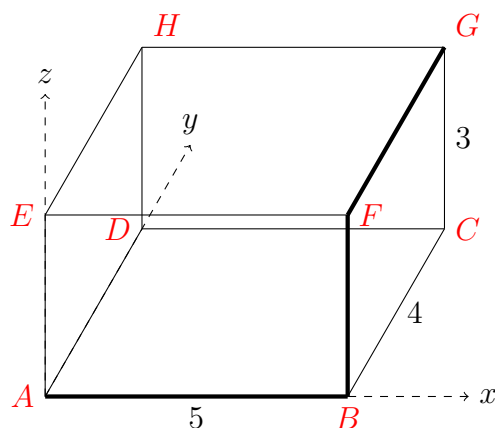
lenne. Esetünkben ezek közül az a élhosszú élen keresztül vezetű út lenne a legrövidebb, vagyis az eredmény

$$\sqrt{(4+3)^2 + 5^2} = \sqrt{74} = 8.6023\dots$$

Latjuk, hogy itt az volt a fontos, hogy a legrövidebb utat adó törtvonal az A és G pontok között valamelyik leghosszabb élen (esetünkben ez EF vagy DC lehet) keresztül vezessen. Tehát összesen kettű különböző legrövidebb út létezik.

- v. A két átellenes $A = (0, 0, 0)$ és $G = (5, 4, 3)$ pont távolsága az élek menten haladva nyilvánvalóan $5 + 4 + 3 = 12$. Hiszen egy él menten haladva csak az egyik koordinátát tudjuk megváltoztatni a, b, c értékekkel a három x, y, z koordinátából, tehát a legrövidebb út minimum három élből fog állni. Ennyi viszont elég is, mint azt az ábrán látható, vastag vonallal jelzett

$A - B - F - G$ útvonal illusztrálja.



Azt szabadon dönthetjük el, hogy milyen sorrendben változtatjuk meg az xyz koordinátákat, erre összesen $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség van.

- vi. Légvonalban az Euklideszi geometriában két pont között csak egy legrövidebb út van, az őket összekötő egyenes szakasz. Tehát a válasz 1.

(c) (ec)

Feltételeztük, hogy $0 < c < b < a$. Ha

$$c = 1, \quad b = 2, \quad a = 3,$$

akkor

$$I_a = \sqrt{(b+c)^2 + a^2} = \sqrt{(1+2)^2 + 3^2} = \sqrt{18},$$

$$I_b = \sqrt{(a+c)^2 + b^2} = \sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = \sqrt{20},$$

$$I_c = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} = \sqrt{(3+2)^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

Eszerint nem igaz az állítás, hogy mindig I_c a legkisebb, hiszen felmutattunk egy olyan esetet, ahol I_c aktuálisan a legnagyobb. Tehát a válasz: hamis.

Megjegyzés: Ha be akarjuk bizonyítani, hogy a bármely (a feladat feltételét kielégítő, vagyis $0 < c < b < a$) számhármásra NEM igaz a feladat állítása, ahhoz elég egyetlen ellenpéldát adnunk.

- (d) (ed) Feltételeztük, hogy $0 < c < b < a$. Szeretnénk bebizonyítani, hogy az

$$\begin{aligned} I_a &= \sqrt{(b+c)^2 + a^2} \\ I_b &= \sqrt{(a+c)^2 + b^2} \\ I_c &= \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \end{aligned}$$

mennyiségek közül I_a a legkisebb. Mivel

$$\begin{aligned} I_a &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc} \\ I_b &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac} \\ I_c &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}, \end{aligned}$$

így látható, hogy ezen mennyisiegok közül az lesz a legkisebb, ahol a bc, ac, ab szorzat a legkisebb, hiszen a kifejezések a gyökjel alatt csak ebben a tagban térnek el. Ebben a típusú szorzatban ezek szerint a tényezőket a lehető legkisebbnek kell választani, vagyis b és c -nek. Ezek szerint valóban mindig I_a lesz a legkisebb.

- (e) (ee)

Bebizonyítjuk, hogy ez az állítás hamis. Ez azt jelenti, hogy *sohasem* I_c a legkisebb. Ez pedig valóban igaz, mivel mindig I_a a legkisebb:

Feltételeztük, hogy $0 < c < b < a$. Szeretnénk bebizonyítani, hogy az

$$\begin{aligned} I_a &= \sqrt{(b+c)^2 + a^2} \\ I_b &= \sqrt{(a+c)^2 + b^2} \\ I_c &= \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \end{aligned}$$

mennyiségek közül I_a a legkisebb. Mivel

$$\begin{aligned} I_a &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc} \\ I_b &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac} \\ I_c &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}, \end{aligned}$$

így látható, hogy ezen mennyisiegok közül az lesz a legkisebb, ahol a bc, ac, ab szorzat a legkisebb, hiszen a kifejezések a gyökjel alatt csak ebben a tagban térnek el. Ebben a típusú szorzatban ezek szerint a tényezőket a lehető legkisebbnek kell választani, vagyis b és c -nek. Ezek szerint valóban mindig I_a lesz a legkisebb.

(f) (ef) Feltételeztük, hogy $0 < c < b < a$. Ha

$$c = 1, \quad b = 2, \quad a = 3,$$

akkor

$$I_a = \sqrt{(b+c)^2 + a^2} = \sqrt{(1+2)^2 + 3^2} = \sqrt{18},$$

$$I_b = \sqrt{(a+c)^2 + b^2} = \sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = \sqrt{20},$$

$$I_c = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} = \sqrt{(3+2)^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

Eszerint a prezentált esetben tényleg I_a a legkisebb, tehát az állítás igaz.

Megjegyzés: Ennél "több" is igaz, nemcsak hogy létezik ilyen számhármasság, de bármely $0 < c < b < a$ számhármasság jó lett volna, mint az az alábbi bizonyításból látható:

Feltételeztük, hogy $0 < c < b < a$. Szeretnénk bebizonyítani, hogy az

$$I_a = \sqrt{(b+c)^2 + a^2}$$

$$I_b = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$$

$$I_c = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

mennyiségek közül I_a a legkisebb. Mivel

$$I_a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$$

$$I_b = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}$$

$$I_c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab},$$

így látható, hogy ezen mennyiségek közül az lesz a legkisebb, ahol a bc, ac, ab szorzat a legkisebb, hiszen a kifejezések a gyökjel alatt csak ebben a tagban térnek el. Ebben a típusú szorzatban ezek szerint a tényezőket a lehető legkisebbnek kell választani, vagyis b és c -nek. Ezek szerint valóban mindig I_a lesz a legkisebb.

A megjegyzés tanulsága az lehetne, hogy tipikusan sokkal nehezebb bebizonyítani azt, hogy egy IGAZ állítás bármikor teljesül, mint azt, hogy létezik olyan eset, ahol az állítás IGAZ. Hiszen ehhez elég egyetlenegy IGAZ esetet prezentálnunk.

Számszerű eredmény: (a) (ea) 5 ; 7 ; 2

(b) (eb) 7,0710 ; 8,6023 ; 12 ; 2 ; 6 ; 1

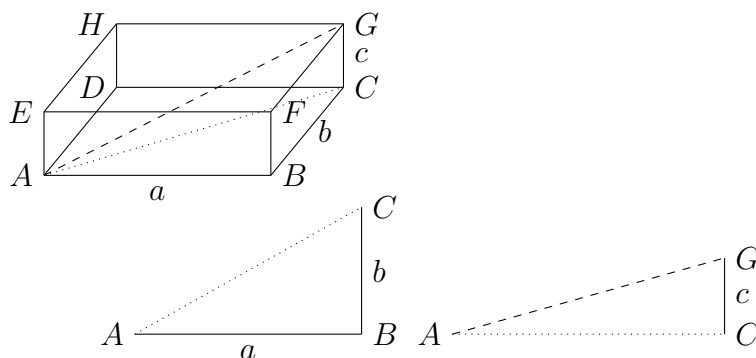
- (c) (ec)
Hamis | Igaz
- (d) (ed)
Igaz | Hamis
- (e) (ee)
Hamis | Igaz
- (f) (ef)
Igaz | Hamis

- Mértékegység:**
- (a) (ea)
m ; m ;
 - (b) (eb)
m ; m ; m ; ;
 - (c) (ec)
 - (d) (ed)
 - (e) (ee)
 - (f) (ef)

2. teglaElAtloTestatlo.12-24

- Feladat:**
- (a) (ea) Legyen egy téglatest három éle $a = 4$, $b = 3$ és $c = 2$ méter hosszú. Milyen hosszú a téglatest testátlója?
 - (b) (eaa) Egy négyzet alapú hasáb alapjának az oldalai 16 cm hosszúak, míg a magassága fel méter. Hány centi hosszú a testátlója?
 - (c) (eb) Legyen egy téglatest három élé a , b és c hosszú. Milyen hosszú a téglatest testátlója? Bizonyítsd az eredményed!
 - (d) (ec) Egy a, b, c hosszúságú különböző élhosszakkal rendelkező téglatest a oldalának, az a, b alaplapon átlójának és a testátlójának a hosszainak az aránya $1 : 2 : 3$. Mekkora az oldalak $a : b : c = 1 : \lambda_1 : \lambda_2$ aránya, vagyis mennyi λ_1 és λ_2 ?
 - (e) (eca) Egy $a < b < c$ élhosszakkal rendelkező téglatest három különböző területű oldallapja területeinek az aránya $1 : 2 : 3$. Mekkora a különböző élek hosszainak az $a : b : c = 1 : \lambda_1 : \lambda_2$ aránya?
 - (f) (ed) Legyen adott egy a, b, c hosszúságú élhosszakkal rendelkező téglatest, ahol $a, b, c > 0$! Legyen továbbá t a négy testátlójának az összhossza, míg e legyen az élek összhossza. Melyik állítás igaz a következők közül?
 - A) $t > e$ mindig teljesül,
 - B) $e > t$ mindig teljesül,
 - C) van olyan téglatest, hogy $t > e$, de olyan is létezik, hogy $e > t$.
 - (g) (ee) Legyen adott egy a, b, c hosszúságú élhosszakkal rendelkező téglatest, ahol $a, b, c > 0$! Legyen továbbá l az összes lapátlójának az összhossza, míg e legyen az élek összhossza. Melyik állítás igaz a következők közül?
 - A) $l > e$ mindig teljesül,
 - B) $e > l$ mindig teljesül,
 - C) van olyan téglatest, hogy $l > e$, de olyan is létezik, hogy $e > l$.
 - (h) (ef) Legyen adott egy a, b, c hosszúságú élhosszakkal rendelkező téglatest, ahol $a, b, c > 0$! Legyen továbbá l az összes lapátlójának az összhossza, míg e legyen az élek összhossza, továbbá legyen t a négy testátlójának az összhossza. Melyik állítás igaz a következők közül?
 - A) $l > e + t$ mindig teljesül,
 - B) $e + t > l$ mindig teljesül,
 - C) van olyan téglatest, hogy $l > e + t$, de olyan is létezik, hogy $e + t > l$.

Megoldás: (a) (ea) A Pitagorasz tétel kétszeri alkalmazásával kiszámítható a testátló hossza.



$$|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|\overline{AG}| = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + |\overline{CG}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Esetünkben

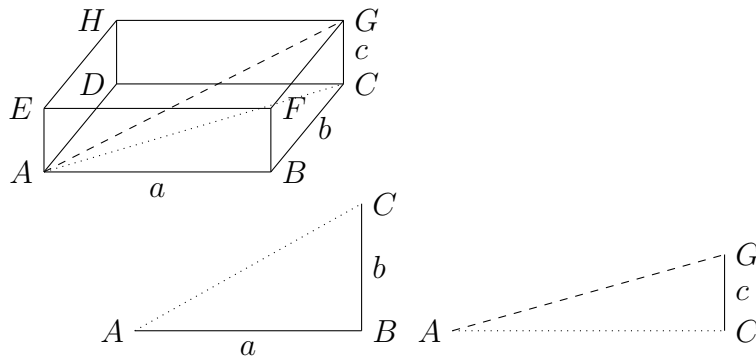
$$|\overline{AG}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5.3851$$

- (b) (eaa) Egy a, b, c élhosszúságú téglatest testátlójának a hossza $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Mivel esetünkben az alaplap élei $a = 16$ cm és $b = 16$ cm, míg a harmadik él, vagyis a magasság 0.5 m = 50 cm, így a testátló hossza centiméterben

$$\sqrt{16^2 + 16^2 + 50^2} = \sqrt{3012} = 54.8817$$

- (c) (eb) A Pitagorasz tétel kétszeri alkalmazásával kiszámítható a

testátló hossza.



$$|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|\overline{AG}| = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + |\overline{CG}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Tehát a testátló hossza $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

(d) (ec)

- az a, b alaplapon átlója hossza $\sqrt{a^2 + b^2}$,
- a testátló hossza pedig $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Tehát

$$1 : 2 : 3 = a : \sqrt{a^2 + b^2} : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= 1 : \sqrt{1^2 + (b/a)^2} : \sqrt{1^2 + (b/a)^2 + (c/a)^2}.$$

Így

$$\sqrt{1^2 + (b/a)^2} = 2 \implies (b/a)^2 = 3 \implies b/a = \sqrt{3}.$$

Továbbá

$$\sqrt{1^2 + (b/a)^2 + (c/a)^2} = \sqrt{1^2 + 3 + (c/a)^2} = 3 \implies c/a = \sqrt{5}.$$

Tehát a végeredmény

$$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{5} = 1 : 1.7320 : 2.2360$$

vagyis $\lambda_1 = 1.7320$ és $\lambda_2 = 2.2360$.

(e) (eca) A különböző oldallapok területei növekvő sorrendben:

$$ab, \quad ac, \quad bc.$$

Tehát

$$ab : ac : bc = 1 : 2 : 3.$$

Így

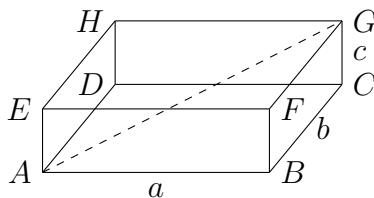
$$b : c = 1 : 2, \quad a : b = 2 : 3,$$

vagyis

$$a : b : c = 2 : 3 : (3 \cdot 2) = 1 : \frac{3}{2} : 3.$$

Így a megoldás $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 3$.

(f) (ed)



Mivel az A és G pontok közötti legrövidebb út az egyenes (vagyis a \overline{AG} testátló) így

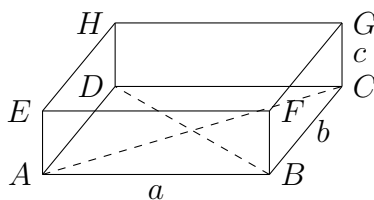
$$|\overline{AG}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CG}| = a + b + c.$$

A téglatestnek négy testátlója van, így $t = 4 \cdot |\overline{AG}|$, míg az élek e összhossza $4(a + b + c)$. Így mindig teljesül, hogy

$$t < e$$

hiszen ez ugyanaz, mint az előző egyenlőtlenség néggyel megszorozva. Tehát a helyes válasz B).

(g) (ee)



Az élek összhossza

$$e = 4(a + b + c),$$

míg a lapátlók l összhossza

$$4 \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \right).$$

(Itt például a $4 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ az \overline{AC} , \overline{DB} , \overline{EG} és a \overline{HF} szakaszok összhossza.) Mivel

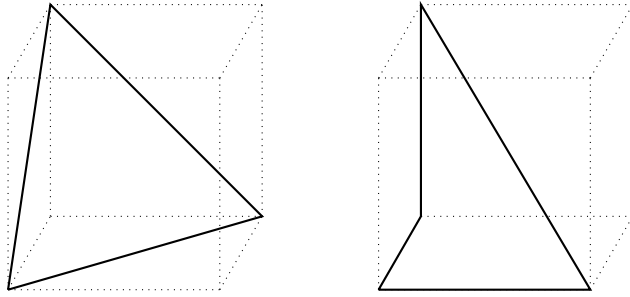
$$a < \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$b < \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$c < \sqrt{a^2 + c^2},$$

így $l > e$, vagyis a helyes válasz az A).

- (h) (ef) Mivel l az első ábrán látható háromszög kerületének a négyszerese, míg $e + t$ a második ábra négy szakaszból álló törtvonala hossza négyszerese, így ésszerű feltenni, hogy $e + t > l$, hiszen a jobboldali törtvonal hosszabbnak tűnik.



Ha a téglatestek élhosszai közül az egyik nulla lenne, akkor $e + t = l$ állna fenn, míg egy egységkocka esetében

$$(e + t) = 4 \cdot (3 + \sqrt{3}) = 18.9282 > 12 \cdot \sqrt{2} = 16.9706.$$

Ez tovább valószínűsíti a feltevésünket.

Az élek e , a lapátlók l és a testátlók t összhosszai:

$$e = 4(a + b + c),$$

$$l = 4 \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} \right)$$

$$t = 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bebizonyítjuk, hogy $e + t > l$, vagyis B) a helyes válasz. Mivel e , t pozitívak, így

$$e + t > l \iff (e + t)^2 - l^2 > 0.$$

Továbbá egy kissé hosszadalmas számítás után azt kapjuk, hogy

$$(e+t)^2 - l^2 = 32 \left((a+b+c)\sqrt{a^2+b^2+c^2} + ab + ac + bc - \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2} - \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2} \right).$$

(Itt a

$$\left(\sum_i x_i \right)^2 = \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j$$

azonosságot használtuk.) Ha

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2+b^2+c^2} + bc &> \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}, \\ b\sqrt{a^2+b^2+c^2} + ac &> \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}, \\ c\sqrt{a^2+b^2+c^2} + ab &> \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}, \end{aligned}$$

akkor $(e+t)^2 - l^2 > 0$. Szerencsére

$$\begin{aligned} \left(a\sqrt{a^2+b^2+c^2} + bc \right)^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2} \right)^2 \\ = 2abc\sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0, \quad \text{stb.}, \end{aligned}$$

ez biztosítja, hogy $e+t > l$, tehát tényleg B) a helyes válasz.

Megjegyzés:

- Az állítás $e+t > l$ nagyon messze van a nyilvánvalótól, viszont praktikusán elég könnyen ellenőrizhető. Mivel az állítás csak az élek arányaitól függ, így választhatjuk azt, hogy a leghosszabb oldal $a=1$, ekkor $e+t-l$ már csak b, c függvénye, továbbá $b, c \in (0, 1]$. Ha ezen a tartományon ábrázoljuk a kérdéses különbséget, akkor látszik, hogy az pozitív. Ez pl. a SAGE és a Mathematica programnyelvekben megtehető a következő parancsokkal:

```
sage:
a,b,c=var('a b c')
e = 4*(a + b + c)
l = 4*(sqrt(a^2 + b^2) + sqrt(a^2 + c^2) + sqrt(c^2 + b^2))
t = 4*sqrt(a^2 + b^2 + c^2)
plot3d((e + t - l).subs({a:1}), (b,0,1), (c,0,1), viewer='threejs')

In[1]:= (* ez a Mathematica kód *)
e = 4 (a + b + c)
l = 4 (Sqrt[a^2 + b^2] + Sqrt[a^2 + c^2] + Sqrt[c^2 + b^2])
t = 4 Sqrt[a^2 + b^2 + c^2]
Plot3D[ReplaceAll[e + t - l, a->1], {b, 0, 1}, {c, 0, 1}]
```

- Az algebrai számításokat szintén sokkal könnyebb géppel elvégezni:

```

sage:
d = (e + t)^2 - l^2
d.expand()
sage:
d2 = (a*sqrt(a^2 + b^2 + c^2) + b*c)^2 \
      - (sqrt(a^2 + b^2)*sqrt(a^2 + c^2))^2
d2.expand()

In[2]:=      (* ez a Mathematica kod *)
d = (e + t)^2 - l^2
Expand[d ]
d2 = (a Sqrt[a^2 + b^2 + c^2] + b c)^2
      - (Sqrt[a^2 + b^2] Sqrt[a^2 + c^2])^2
Simplify[d2]

```

- A komplikált, de triviális algebrai számításoktól eltekintve a bizonyítás egyetlen nemtriviális lépése az volt, hogy az

$$(e + t)^2 - l^2 > 0$$

egyenlőtlenséget három másik (az egyikük pl.)

$$a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + bc > \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + c^2}$$

egyenlőtlenség következményeként kaptuk. Itt szerencsénk volt, mivel a három egyenlőtlenség biztosítja, hogy $(e + t)^2 > l^2$, viszont az $(e + t)^2 > l^2$ egyenlőtlenségnek nem logikai következménye, hogy a három egyenlőtlenség mindegyike teljesül. Itt a tagok csoportosításának a szempontja az volt, hogy az a, b, c szimbólumok összeségében szimmetrikus szerepeket kell, hogy játszanak. Tehát pl. ha a gyökvonás előtt a szerepel a baloldalon, akkor a $+bc$ tag helyett nem állhat $+ac$ vagy $+ab$, mivel ez megbontaná az a kiválasztása után megmaradó $b \leftrightarrow c$ szimmetriát.

Számszerű eredmény: (a) (ea) 5,3851

(b) (eaa) 54,8817

(c) (eb) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \mid \sqrt{a + b + c} \mid \sqrt{ab + bc + cb}$
 $\mid a + b + c \mid \sqrt{(a + b + c)^2}$

(d) (ec) 1,7320 ; 2,2360

(e) (eca) 1,5 ; 3

(f) (ed) $B \mid A \mid C$

(g) (ee) $A \mid B \mid C$

(h) (ef) B | A | C

Mértékegység: (a) (ea) méter

(b) (eaa) cm

(c) (eb)

(d) (ec)

(e) (eca)

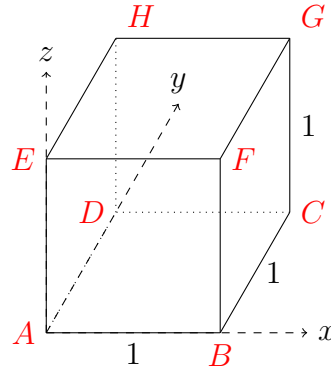
(f) (ed)

(g) (ee)

(h) (ef)

3. kockaVilagitasIranyok.25-36

Feladat: (a) (ea) Vegyük az ábrán látható átlátszatlan egységkockát.

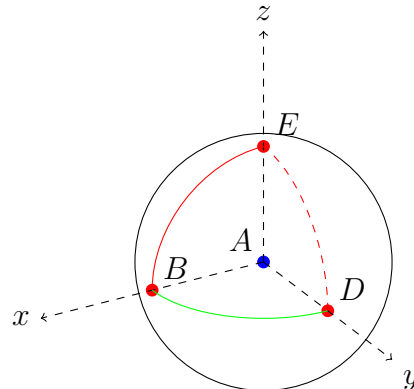
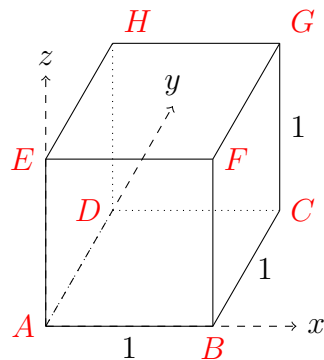


Add meg azoknak a pontoknak a halmazát, ahonnan egy pontszerű fényforrás csak a

- i. $BFGC$,
- ii. $BFGC$ és a $EFGH$,
- iii. $BFGC$, $EFGH$ és a $ABFE$

oldalakat világítja meg. (Ezt abban az értelemben értjük, hogy a megvilágító fénysugárnak nem nulla szögben kell beesnie a megvilágított pontba, tehát pl. az x tengelyen levő $(2, 0, 0)$ pont nem világítja meg az $ABFE$ oldalt. Továbbá a fényforrásnak a megvilágított testen kívül kell elhelyezkednie.) Légy nagyon elővigyázatos a halmazok határán levő pontok tekintetében!

(b) (eb) Vegyük a bal oldali ábrán látható átlátszatlan egységkockát.



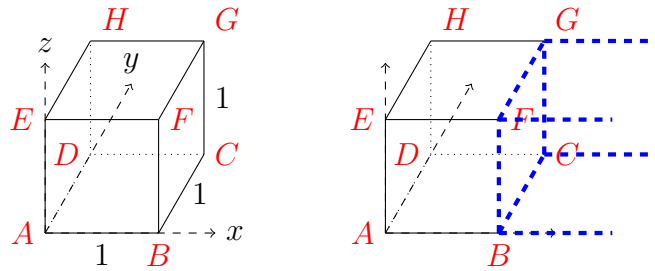
Add meg azoknak az irányoknak a halmazát, ahonnan egy végtelenül messze elhelyezkedő pontszerű fényforrás csak a

- i. $BFGC$,
- ii. $BFGC$ és a $EFGH$,
- iii. $BFGC$, $EFGH$ és a $DCGH$

oldalakat világítja meg. (Ezt abban az értelemben értjük, hogy a megvilágító fénysugárnak nem nulla szögben kell beesnie a megvilágított pontba.) A megvilágító fényforrás irányát a jobb oldali Földgömb szélességi és hosszúsági (θ, ϕ) gömbi koordinátaival reprezentáljuk. Az jobb oldali ábrán a BD ív az egyenlítőnek a $(0^\circ, 0^\circ)$ ponttól a $(0^\circ, 90^\circ)$ pontig terjedő szakasza, míg E az Északi sark. Légy nagyon elővigyázatos a halmazok határán levő pontok tekintetében!

Megoldás: (a) (ea)

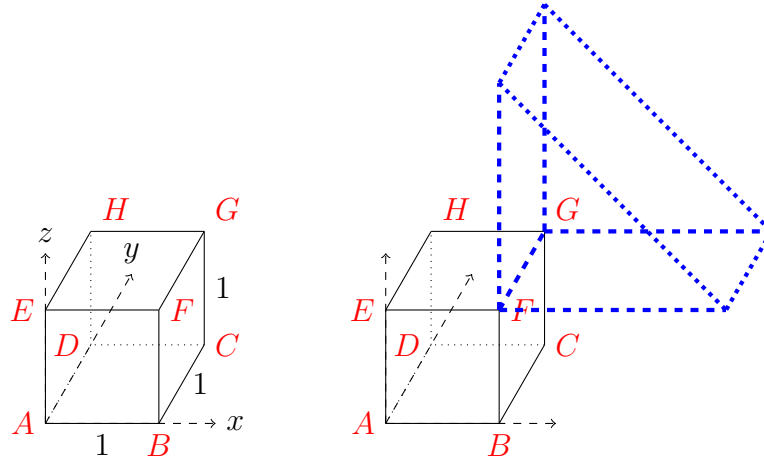
i.



A megoldás a $BCGF$ alapú, az x tengely irányába a végtelenbe nyúló tartomány. Ez nem tartalmazza a $BCGF$ oldallapot, viszont tartalmazza a négy végtelenbe nyúló oldallapját, leszámítva a $BCGF$ oldallap eleit. Ezt a halmazt meghatározhatjuk a következőképpen:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

ii. A megoldás az ábrán látható:

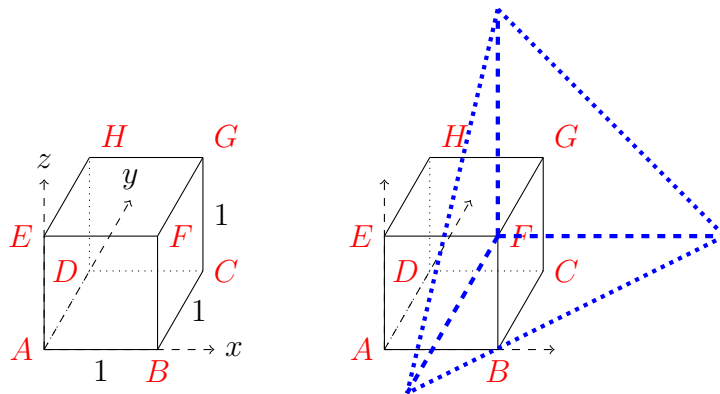


Ezt a halmazt meghatározhatjuk a következőképpen:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, 0 \leq y \leq 1, z > 1\}.$$

A megoldás tartalmazza az F és G csúcsú kék háromszögeket (ezek igazából a végtelenbe nyúló síknegyedek), leszámítva az F és G csúcsokat. Viszont nem tartalmazza a GF alapú vízszintesen, illetve függőlegesen a végtelenbe nyúló téglalapokat.

iii. A megoldás az ábrán látható:



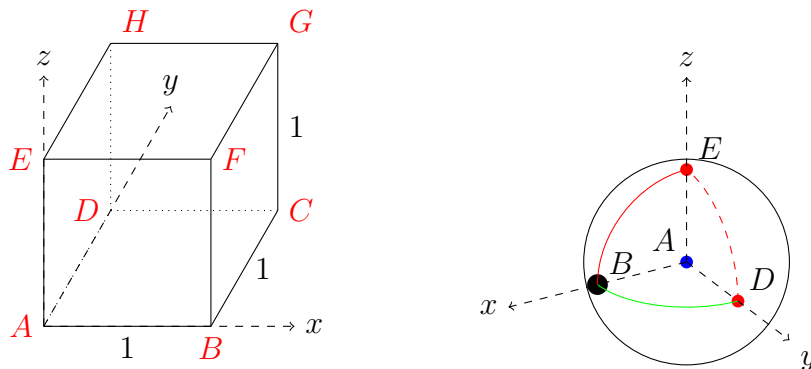
Ezt a halmazt meghatározhatjuk a következőképpen:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, y < 0, z > 1\}.$$

Ez a tartomány az F csúcsú nyílt tér nyolcad, vagyis nem tartalmazza a határán levő pontokat.

(b) (eb)

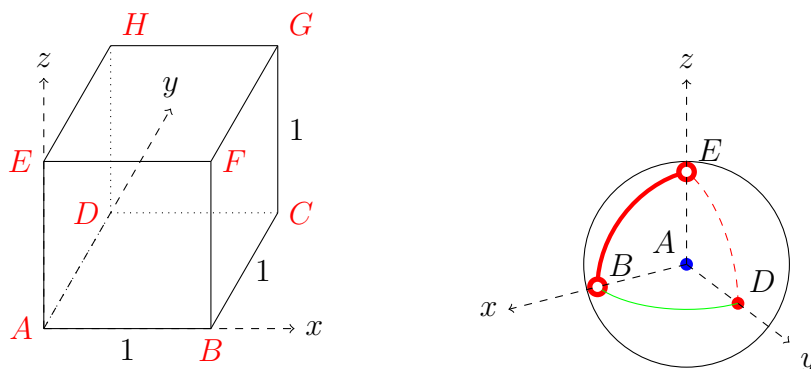
- i. Ha csak a $BCGF$ oldalt akarjuk megvilágítani, akkor a fénysugárnak az x tengely irányából kell érkeznie, ezt a jobb oldali, az irányokat reprezentáló ábrán a B pontnál látható fekete nagyméretű pötty reprezentálja.



Tehát a megoldás:

$$\{(\theta, \phi) \mid \theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ\}$$

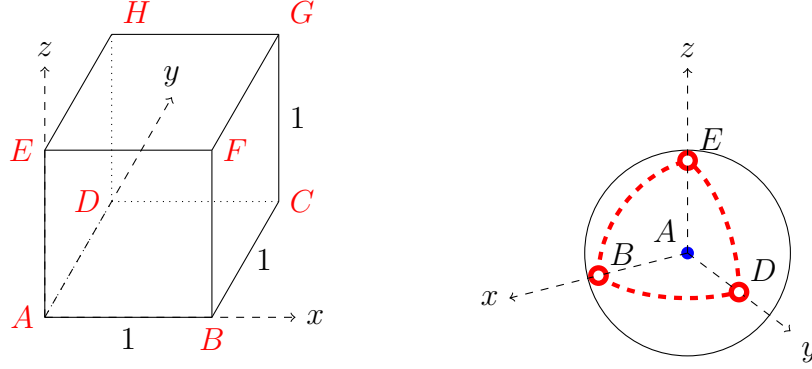
- ii. Ha csak a $BCGF$, $EFGH$ oldalakat akarjuk megvilágítani, akkor a fénysugárnak az x, z síkkal párhuzamosan kell érkeznie, ezt a jobb oldali, az irányokat reprezentáló ábrán az E és B pontokat összekötő vastag piros hosszúsági kör 90° fokos ívdarabja reprezentálja. A végpontok nem tartoznak a megoldáshoz, mivel az ő irányukból érkező fénysugár már csak egy oldalt világítanak meg.



Tehát a megoldás:

$$\{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta < 90^\circ, \phi = 0^\circ\}$$

- iii. Ebben az esetben a megvilágító fényforrás irányának a pozitív x, y, z tengelyek által határolt tér nyolcadban kell lennie. Így a megoldás a Földgömb nyílt nyolcadrésze:



A megoldást a vastag szaggatott piros vonallal határolt nyílt térszolc adja meg. Képletekkel ugyanez:

$$\{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta < 90^\circ, 0^\circ < \phi < 90^\circ\}$$

- Számszerű eredmény:** (a) (ea) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < z \leq 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, 0 < y < 1, 0 \leq z \leq 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 < z \leq 1\}$
 ;
 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, 0 \leq y \leq 1, z > 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq 1, z > 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z \geq 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, 0 < y < 1, z > 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1\}$
 ;
 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, y < 0, z > 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y < 0, z > 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, y < 1, z > 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, y < 0, z > 1\}$
 $\mid \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1, y < 1, z > 1\}$
 (b) (eb)
 $\{(\theta, \phi) \mid \theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ\}$
 $\mid \{(\theta, \phi) \mid \theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ\}$

$$\begin{aligned}
 & | \{(\theta, \phi) \mid \theta = 0^\circ, \phi = 90^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid \theta = 90^\circ, \phi = 90^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid \theta = 180^\circ, \phi = 0^\circ\} \\
 & ; \\
 & \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta < 90^\circ, \phi = 0^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ \leq \theta < 90^\circ, \phi = 0^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta \leq 90^\circ, \phi = 0^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, \phi = 0^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ > \theta > -90^\circ, \phi = 0^\circ\} \\
 & ; \\
 & \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta < 90^\circ, 0^\circ < \phi < 90^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta < 180^\circ, 0^\circ < \phi < 90^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta < 90^\circ, 0^\circ < \phi < 180^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, 0^\circ < \phi < 90^\circ\} \\
 & | \{(\theta, \phi) \mid 0^\circ < \theta < 90^\circ, 0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ\}
 \end{aligned}$$

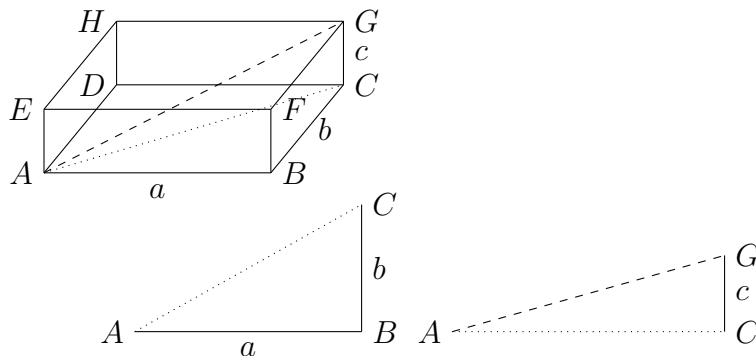
Mértékegység:

4. TeglaMertaniSor.37-44

- Feladat:**
- (a) (ea) Legyen egy téglatest három élé a , b és c hosszú. Milyen hosszú a téglatest testátlója? Bizonyítsd az eredményed!
 - (b) (eb) Legyenek a térbeli \overline{e}_1 , \overline{e}_2 és \overline{e}_3 vektorok egységnyi hosszúak, továbbá legyenek merőlegesek egymásra. (Az ilyen rendszereket ortonormált bázisnak szokás nevezni.) Milyen hosszú a $\overline{v} = v_1\overline{e}_1 + v_2\overline{e}_2 + v_3\overline{e}_3$ vektor?
 - (c) (ec) Egy téglatest három különböző élhosszúságú élé közül a legrövidebb 3 méter. Továbbá ezen három él hosszúságai mértani sorozatot alkotnak, és az összegük 21 m. Mennyi a téglatest térfogata?
 - (d) (eca) Egy téglatest három különböző élhosszúságú élé közül a legrövidebb 3 méter. Továbbá ezen három él hosszúságai mértani sorozatot alkotnak, és az összegük 93 m. Mennyi a téglatest térfogata?
 - (e) (ecb) Egy téglatest három különböző élhosszúságú élé közül a középső 5 méter. Továbbá ezen három él hosszúságai mértani sorozatot alkotnak, és az összegük 31 m. Mennyi a téglatest térfogata?
 - (f) (ed) Egy téglatest három különböző élhosszúságú éleinek a hosszai mértani sorozatot alkotnak. A téglatest összes éleinek az összhossza 140 méter, míg a térfogata egymillió liter. Ány méter az élek hossza? Sorold fel őket növekvő sorrendben!
 - (g) (eda) Egy téglatest három különböző élhosszúságú éleinek a hosszai mértani sorozatot alkotnak. A téglatest összes éleinek az összhossza 104 centiméter, míg a térfogata 0.216 liter. Hány centiméter az élek hossza? Sorold fel őket növekvő sorrendben!

Megoldás: (a) (ea) A Pitagorasz tétel kétszeri alkalmazásával kiszámítható a

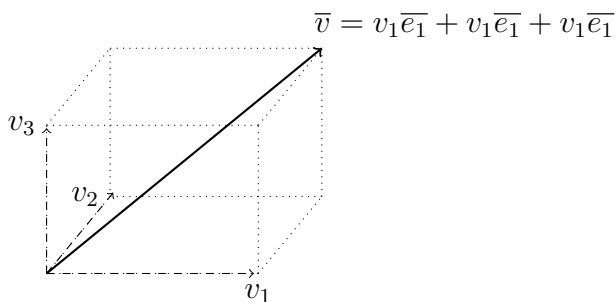
testátló hossza.



$$|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|\overline{AG}| = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + |\overline{CG}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

- (b) (eb) Az \overline{e}_i , $i = 1, 2, 3$ vektorok által koordináta-rendszerben elhelyezhetünk egy téglatestet $|v_i|$ (ahol $i = 1, 2, 3$) hosszúságú oldalakkal úgy, hogy a \overline{v} vektor a téglatest egyik testátlója.



Vagyis \overline{v} hossza ugyanaz, mint a testátló hossza:

$$|\overline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \left(\sum_{i=1}^3 v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Megjegyzés 1. Láthatjuk, hogy az egy, kettő és három dimenziós Euklideszi terekben a vektorok hosszának a kiszámítása (egy

ortonormált bázishoz viszonyítva) a következő:

$$\begin{aligned} |(v_1)| &= \sqrt{v_1^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^1 v_i^2} = |v_1|, \\ |(v_1, v_2)| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 v_i^2}, \\ |(v_1, v_2, v_3)| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}. \end{aligned}$$

Ez jól motiválja az n dimenziós Euklideszi vektorterek definícióját, ahol egy $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vektor \bar{v} hosszát a

$$\bar{v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

képlet definiálja.

- (c) (ec) Legyen a mértani sorozat hányadosa q , így a különböző oldalhosszak

$$3, \quad 3q, \quad 3q^2.$$

Ha az összegük 21, akkor

$$\begin{aligned} 3 + 3q + 3q^2 &= 21 \implies 3q^2 + 3q - 18 = 0 \implies \\ q_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-18)}}{2 \cdot 3}, \quad \text{vagyis} \quad q_1 = 2, \quad q_2 = -3. \end{aligned}$$

Mivel az oldalhosszak pozitívak, így az oldalak

$$3, \quad 3 \cdot 2^1 = 6, \quad 3 \cdot 2^2 = 12$$

méter hosszúak. Tehát a térfogat

$$3 \cdot 6 \cdot 12 = 216$$

köbméter.

- (d) (eca) Legyen a mértani sorozat hányadosa q , így a különböző oldalhosszak

$$3, \quad 3q, \quad 3q^2.$$

Ha az összegük 93, akkor

$$3 + 3q + 3q^2 = 93 \implies 3q^2 + 3q - 90 = 0 \implies q_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-90)}}{2 \cdot 3}, \text{ vagyis } q_1 = 5, q_2 = -6.$$

Mivel az oldalhosszak pozitívak, így az oldalak

$$3, \quad 3 \cdot 5^1 = 15, \quad 3 \cdot 5^2 = 75$$

méter hosszúak. Tehát a térfogat

$$3 \cdot 15 \cdot 75 = 3375$$

köbméter.

- (e) (ecb) Legyen a mértani sorozat hányadosa q , így a különböző oldalhosszak

$$5q^{-1}, \quad 5, \quad 5q.$$

Ha az összegük 31, akkor

$$5q^{-1} + 5 + 5q = 31 \implies 5q^2 + 5q - 26 = 0 \implies q_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-26)}}{2 \cdot 5}, \text{ vagyis } q_1 = 5, q_2 = \frac{1}{5}.$$

A két megoldásnak megfelelő oldalhosszak:

$$1, 5, 25 \quad \text{és} \quad 25, 5, 1.$$

méterben mérve. Ezek persze ugyanazt a téglateetet reprezentálják. Tehát a térfogat

$$1 \cdot 5 \cdot 25 = 125$$

köbméter.

- (f) (ed)

Mivel a három el hosszai egy mértani sorozatot alkotnak, így felírhatóak

$$a, \quad aq, \quad aq^2$$

alakban. Mivel méterben szeretnénk számolni, a térfogatot átírjuk m^3 -re:

$$1 \text{ millió liter} = 10^6 \cdot (0.1 \text{ m})^3 = 1000 \text{ m}^3.$$

Így az L összélhossz és a V térfogat

$$L = 4(a + aq + aq^2) = 140, \quad V = a \cdot aq \cdot aq^2 = (aq)^3 = 1000.$$

Tehát meg kell oldanunk az

$$a + aq + aq^2 = \frac{140}{4} = 35, \quad aq = \sqrt[3]{1000} = 10$$

egyenletrendszert. Az $a = 10/q$ helyettesítés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{10}{q}(1 + q + q^2) = 35 &\implies 10q^2 - 25q + 10 = 0 \\ &\implies q_1 = 2, \quad q_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Így az egyenletrendszerünk megoldásai:

$$q_1 = 2, \quad a_1 = 5, \quad q_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 20.$$

Ezek persze ugyanazt a téglatestet reprezentálják, csak más sorrendben vannak az oldalak felsorolva:

$$(a_1, a_1q_1, a_1q_1^2) = (5, 10, 20), \quad (a_2, a_2q_2, a_2q_2^2) = (20, 10, 5).$$

Tehát az élek hosszai növekvő sorrendben:

$$5, \quad 10, \quad 20,$$

méterben mérve.

(g) (eda)

Mivel a háromél hosszai mértani sorozatot alkotnak, így felírhatóak

$$a, \quad aq, \quad aq^2$$

alakban. Mivel centiméterben szeretnénk számolni, a térfogatot átírjuk cm^3 -re:

$$0.216 \text{ liter} = 0.216 \times (10 \text{ cm})^3 = 216 \text{ cm}^3.$$

Így az L összehossz és a V térfogat

$$L = 4(a + aq + aq^2) = 104, \quad V = a \cdot aq \cdot aq^2 = (aq)^3 = 216.$$

Tehát meg kell oldanunk az

$$a + aq + aq^2 = \frac{104}{4} = 26, \quad aq = \sqrt[3]{216} = 6$$

egyenletrendszert. Az $a = 6/q$ helyettesítés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{6}{q}(1+q+q^2) &= 26 \implies 6q^2 - 20q + 6 = 0 \\ \implies q_1 &= 3, \quad q_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Így az egyenletrendszerünk megoldásai:

$$q_1 = 3, \quad a_1 = 2, \quad q_2 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = 18.$$

Ezek persze ugyanazt a téglatestet reprezentálják, csak más sorrendben vannak az oldalak felsorolva:

$$(a_1, a_1q_1, a_1q_1^2) = (2, 6, 18), \quad (a_2, a_2q_2, a_2q_2^2) = (18, 6, 2).$$

Tehát az élek hosszai növekvő sorrendben:

$$2, \quad 6, \quad 18,$$

centiméterben mérve.

- Számszerű eredmény:**
- (a) (ea) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \mid \sqrt{a + b + c} \mid \sqrt{ab + bc + cb}$
 $\mid a + b + c \mid \sqrt{(a + b + c)^2}$
 - (b) (eb) $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \mid \sqrt{v_1 + v_2 + v_3} \mid \sqrt{v_1v_2 + v_2v_3 + v_2v_3}$
 $\mid v_1 + v_2 + v_3 \mid \sqrt{(v_1 + v_2 + v_3)^2}$
 - (c) (ec) 216
 - (d) (eca) 3375
 - (e) (ecb) 125
 - (f) (ed) 5 ; 10 ; 20
 - (g) (eda) 2 ; 6 ; 18

- Mértékegység:**
- (a) (ea)
 - (b) (eb)
 - (c) (ec) m³
 - (d) (eca) m³
 - (e) (ecb) m³
 - (f) (ed) m ; m ; m
 - (g) (eda) cm ; cm ; cm

5. KockaArnyekCsillagfeny.45-52

- Feladat:** (a) (ea) Hány szögletű lehet egy átlátszatlan kocka árnyéka? Ez persze ebben a formában nem egy jól definiált kérdés, a válasz nyilván függ a megvilágítás módjától, és attól, hogy milyen felületre vetül az árnyék. (Milyen pl. egy test árnyéka sötétben, hogy csak egy extrém esetet említsünk.) Próbáld a feladatot pontosan megfogalmazni, úgy, hogy a feladatnak legyen egyértelmű megoldása, hasonlítson a való világban előforduló szituációkhoz, és persze a megoldás kezelhető bonyolultságú legyen! Sikerült elgondolkodnod a problémán?
- (b) (eb) Hány szögletű lehet egy átlátszatlan kocka árnyéka? A megvilágító fénysugarak érkezenek a függőleges z tengely irányából, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Lehetséges-e, hogy a kocka árnyéka
- i. 3,
 - ii. 4,
 - iii. 5,
 - iv. 6,
 - v. 7
- szögletű? Bizonyítsd az állításodat!
- (c) (ec) Egy átlátszatlan kockát megvilágító fénysugarak érkezenek a függőleges z tengely irányából, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Ha a fénysugarak csak a kocka egyetlen oldallapját világítják meg, akkor hány szögletű a kocka árnyéka?
- (d) (ed) Egy átlátszatlan kockát megvilágító fénysugarak érkezenek a függőleges z tengely irányából, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Ha a fénysugarak csak a kocka két oldallapját világítják meg, akkor hány szögletű a kocka árnyéka?
- (e) (ee) Egy átlátszatlan kockát megvilágító fénysugarak érkezenek a függőleges z tengely irányából, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Ha a fénysugarak csak a kocka három oldallapját világítják meg, akkor hány szögletű a kocka árnyéka?

Megoldás: (a) (ea)

Erre a feladatra nincs egyértelmű válasz. Először is az árnyék vetüljön egy sík felületre, hogy ez milyen szögben történik, az szerencsére csak az árnyék alakját és méretét befolyásolja, de pl. egy szögletes árnyék csucsainak a számát már nem.

A megvilágító fényforrás tekintetében a két legegyszerűbb eset:

- A kockán kívül legyen elhelyezve egy pontszerű fényforrás.
- A fénysugarak érkezzenek egy adott irányból. (Ez az eset jól közelíthető egy nagyon messze elhelyezett kisméretű fényforrással.)

Ezeknél az eseteknél lényegesen komplikáltabb az, ha a fényforrás nem pontszerű, itt egy gömb alakú fényforrás lenne az esetleg megkezelhető bonyolultságú eset. Itt megint megkülönböztethetünk két esetet:

- A kockán kívül egy adott középponttal legyen elhelyezve egy világító gomb alakú fényforrás.
- Használjuk pl. a Napot fényforrásként, ez praktikusán végtelenül messze van, a fénysugarak az Éggömb egy kör alakú tartományából érkeznek.

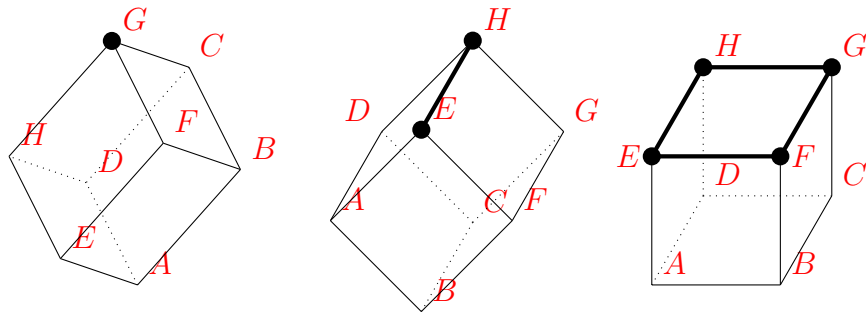
Ha a fényforrásnak véges látható kiterjedése van, akkor persze az árnyék definíciója is komplikáltabb. Itt megkülönböztethetnénk minimum kétféle árnyékot:

- A felület azon pontjait, ahonnan nézve a kocka teljesen kitakarja a fényforrást.
- A felület azon pontjait, ahonnan nézve a kocka legalább részlegesen kitakarja a fényforrást.

Ezek az árnyékok már nem feltétlenül lesznek szögletesek, szóval ebben az esetben a dolog kezd elbonyolódni.

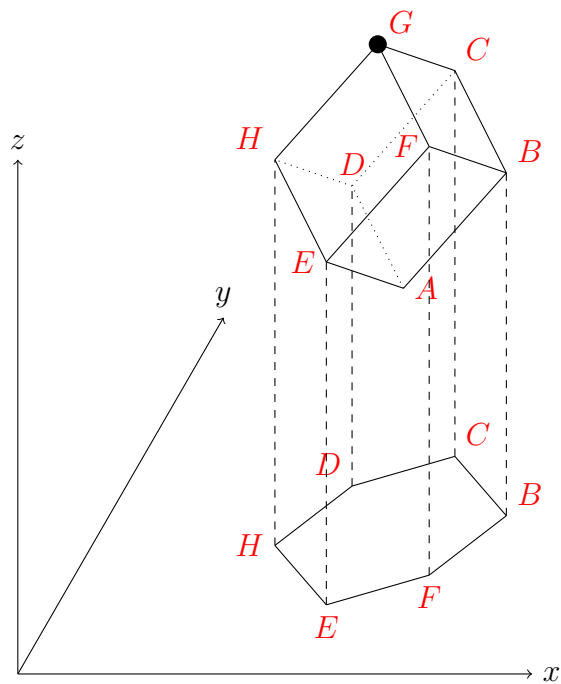
(b) (eb) Vegyük a kocka legmagasabban elhelyezkedő (vagyis maximális z koordinátájú) csúcsát vagy csúcsait Itt három eset lehetséges:

- Csak egy ilyen csúcs van. (A bal ábrán G .)
- Két ilyen csúcs van, vagyis a kocka maximális magasságú pontjai egy élen helyezkednek el. (A középső ábrán ezek D, H , itt a DH élen vannak a kocka maximális z koordinátájú pontjai.)
- Négy ilyen csúcs van, vagyis a kocka maximális magasságú pontjai egy oldallapon helyezkednek el. (A jobb ábrán E, F, G, H , itt a $EFGH$ oldallapon vannak a kocka maximális z koordinátájú pontjai.)



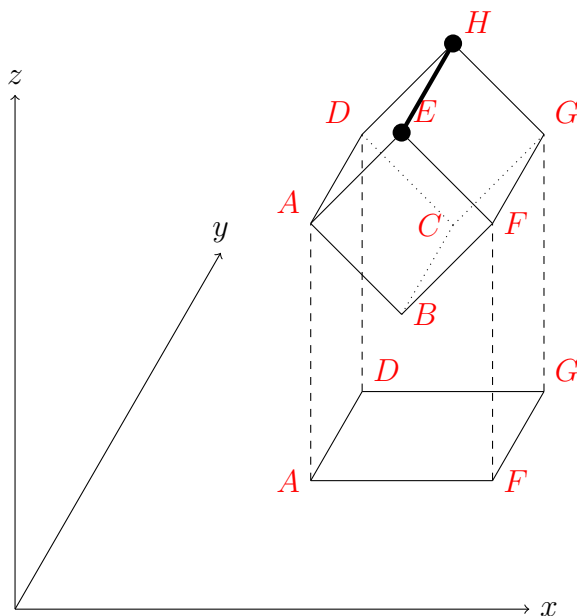
Most vetítsük le ezeket az ábrákat az xy síkra merőlegesen, vagyis a z tengely irányából.

- Az ábrán látható, hogy ha csak egy csúcs van legfelül, akkor kocka vetülete az xy síkra hatszögletes.



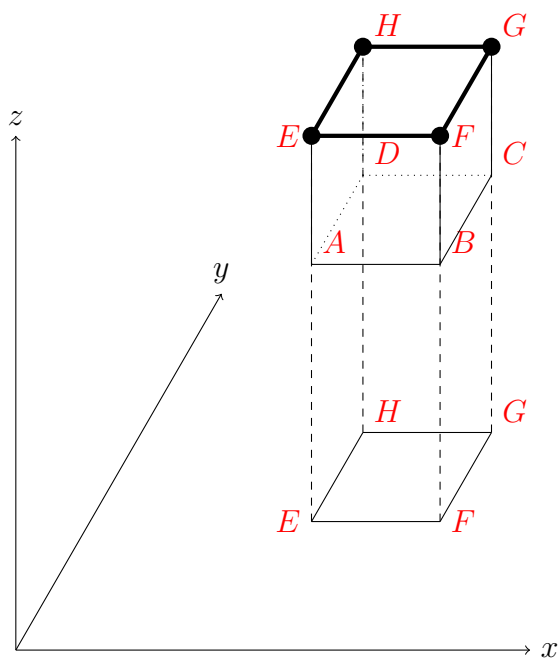
- Az ábrán látható, hogy ha csak két csúcs van legfelül, akkor

kocka vetülete az xy síkra négyszögletes.



Itt az árnyék az $AFGD$ téglalap.

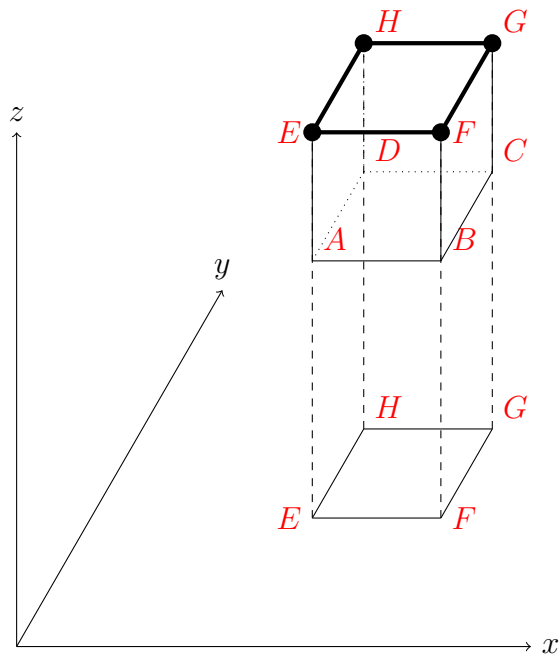
- Ugyanez történik, ha négy csúcs van legfelül:



Itt az $EFGH$ árnyék az xy síkon pontosan egy négyzet.

Tehát a válasz

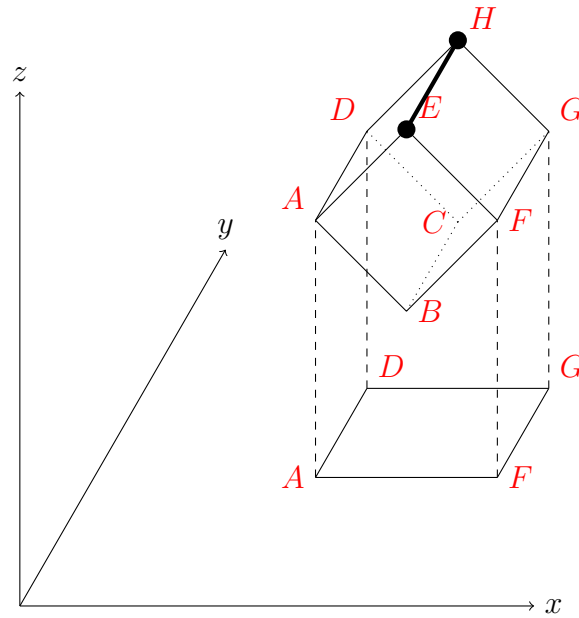
- i. Hamis
 - ii. Igaz
 - iii. Hamis
 - iv. Igaz
 - v. Hamis
- (c) (ec) Az, hogy csak egyetlen lap legyen megvilágítva, az a következőképpen történhet meg:



Itt a megvilágított oldallapot $EFGH$ -val jelöltük. Ekkor az $EFGH$ árnyék az xy síkon pontosan egy négyzet, tehát a válasz 4.

- (d) (ed) Az, hogy csak két lap legyen megvilágítva, az a következő-

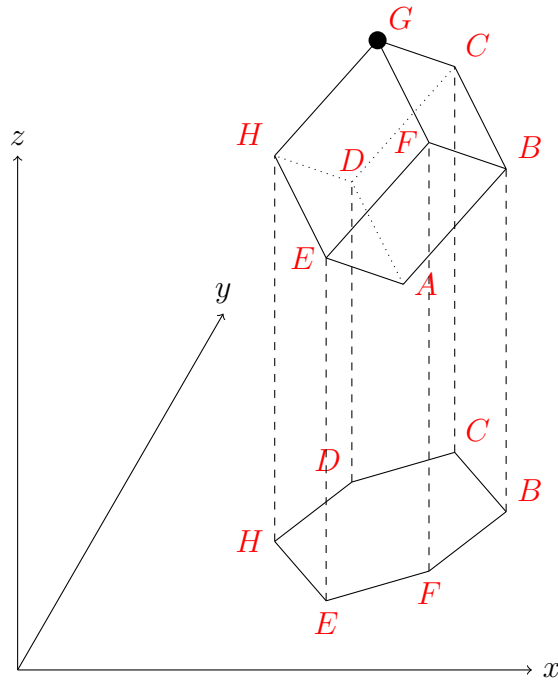
képpen történhet meg:



Itt a megvilágított oldallapokat $AEHD$ és $EFGH$ -val jelöltük. Az árnyék az $AFGD$ téglalap, tehát az árnyék 4 szögű.

- (e) (ee) Az, hogy három lap legyen megvilágítva, az a következőkép-

pen történhet meg:



Itt a megvilágított oldallapok: $EFGH$, $FBCG$ és $HDCG$. Az árnyék pedig a $HEFBCD$ hatszög, tehát az árnyék hatszögű.

- Számszerű eredmény:**
- (a) (ea) Igen | Nem
 - (b) (eb)
 - Hamis | Igaz ; Igaz | Hamis ; Hamis | Igaz ; Igaz | Hamis ; Hamis | Igaz
 - (c) (ec) 4
 - (d) (ed) 4
 - (e) (ee) 6

Mértékegység:

6. kockaArnyekPontlampa.53-61

- Feladat:** (a) (ea) Hány szögletű lehet egy átlátszatlan kocka árnyéka? Ez persze ebben a formában nem egy jól definiált kérdés, a válasz nyilván függ a megvilágítás módjától, és attól, hogy milyen felületre vetül az árnyék. (Milyen pl. egy test árnyéka sötétben, hogy csak egy extrém esetet említsünk.) Próbáld a feladatot pontosan megfogalmazni, úgy, hogy a feladatnak legyen egyértelmű megoldása, hasonlítsd a való világban előforduló szituációkhoz, és persze a megoldás kezelhető bonyolultságú legyen! Sikerült-e ?
- (b) (eb) Hány szögletű lehet egy átlátszatlan kocka árnyéka? A megvilágító fénysugarak érkezenek egy, a kocka *fölött* (a rettenetesen unatkozó diákok megoldhatják a feladatot ezen feltétel nélkül is) elhelyezkedő pontból, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Lehetséges-e, hogy a kocka árnyéka
- i. 3,
 - ii. 4,
 - iii. 5,
 - iv. 6,
 - v. 7
- szögletű? Bizonyítsd az állításodat!
- (c) (ec) Egy átlátszatlan kockát megvilágító fénysugarak érkezenek egy, a kocka *fölött* elhelyezkedő pontból, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Ha a fénysugarak csak a kocka egyetlen oldallapját világítják meg, akkor hány szögletű a kocka árnyéka?
- (d) (ed) Egy átlátszatlan kockát megvilágító fénysugarak érkezenek egy, a kocka *fölött* elhelyezkedő pontból, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Ha a fénysugarak csak a kocka két oldallapját világítják meg, akkor hány szögletű lehet a kocka árnyéka?
- (e) (ee) Egy átlátszatlan kockát megvilágító fénysugarak érkezenek egy, a kocka *fölött* elhelyezkedő pontból, az árnyék pedig vetüljön az xy síkra, amely fölött helyezkedik el a kocka. Ha a fénysugarak a kocka három oldallapját világítják meg, akkor hány szögletű a kocka árnyéka?

Megoldás: (a) (ea)

Erre a feladatra nincs egyértelmű válasz. Először is az árnyék vetüljön egy sík felületre, hogy ez milyen szögben történik, az szerencsére csak az árnyék alakját és méretet befolyásolja, de pl. egy szögletes árnyék csúcsainak a számát már nem.

A megvilágító fényforrás tekintetében a két legegyszerűbb eset:

- A kockán kívül legyen elhelyezve egy pontszerű fényforrás.
- A fénysugarak érkezzenek egy adott irányból. (Ez az eset jól közelíthető egy nagyon messze elhelyezett kisméretű fényforrással.)

Ezeknél az eseteknél lényegesen komplikáltabb az, ha a fényforrás nem pontszerű, itt egy ömb alakú fényforrás lenne az esetleg megkezelhető bonyolultságú eset. Itt megint megkülönböztethetünk két esetet:

- A kockán kívül egy adott középponttal legyen elhelyezve egy világító gomb alakú fényforrás.
- Használjuk pl. a Napot fényforrásként, ez praktikusán végtelenül messze van, a fénysugarak az Éggömb egy kör alakú tartományából érkeznek.

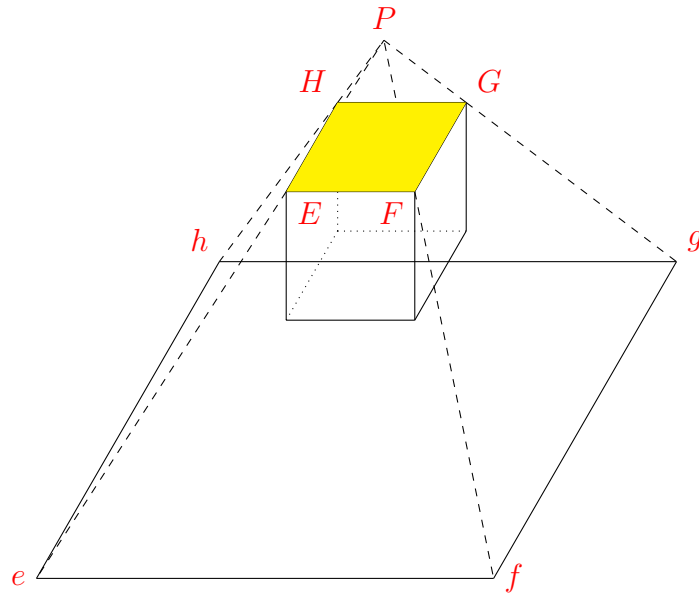
Ha a fényforrásnak véges látható kiterjedése van, akkor persze az árnyék definíciója is komplikáltabbbb. Itt megkülönböztethetünk minimum kétfelé árnyékot:

- A felület azon pontjait, ahonnan nézve a kocka teljesen kitakarja a fényforrást.
- A felület azon pontjait, ahonnan nézve a kocka legalább részlegesen kitakarja a fényforrást.

Ezek az árnyékok már nem feltétlenül lesznek szögletesek, szóval ebben az esetben a dolog kezd elbonyolódni.

- (b) (eb) A fényforrás egy, kettő, vagy három lapját világíthatja meg a kockának.

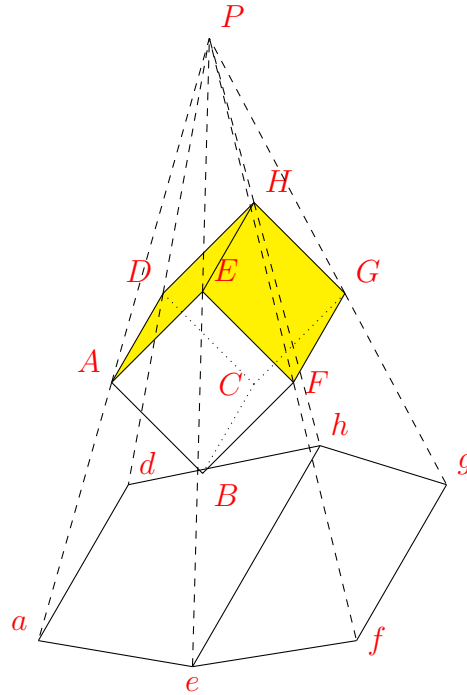
- Vegyük az első, vagyis az egy megvilágított oldallap esetét.



Itt az $EFGH$ oldallap van megvilágítva, ennek a P fényforrás középpontú vetülete az vízszintes xy síkra az $efgh$ négyszög. Így ebben az esetben az árnyék négyszögű.

- Ha a P pontban elhelyezkedő fényforrás két lapot világít meg,

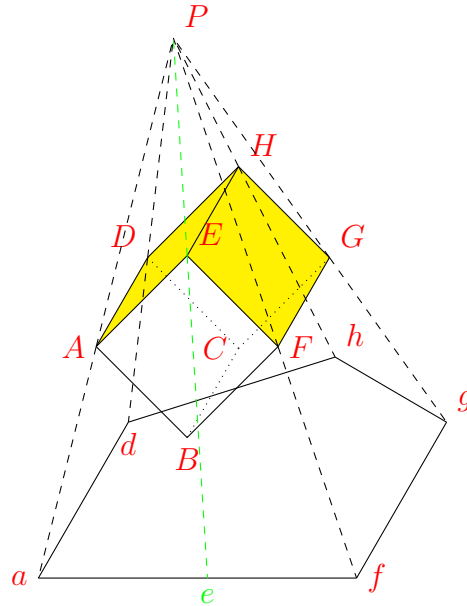
akkor az árnyék tipikusan hatszögű lesz:



Itt a megvilágított $AEHD$ és $EFGH$ oldalak árnyéka az $aefghd$ hatszög.

Előfordulhat, hogy a P fényforrás az $ABFE$ (vagy a $CGHD$) oldallap síkjába esik, ekkor az árnyékon az a, e, f (vagy a d, h, g) pontok egy vonalba esnek, így az árnyék csak ötszögű

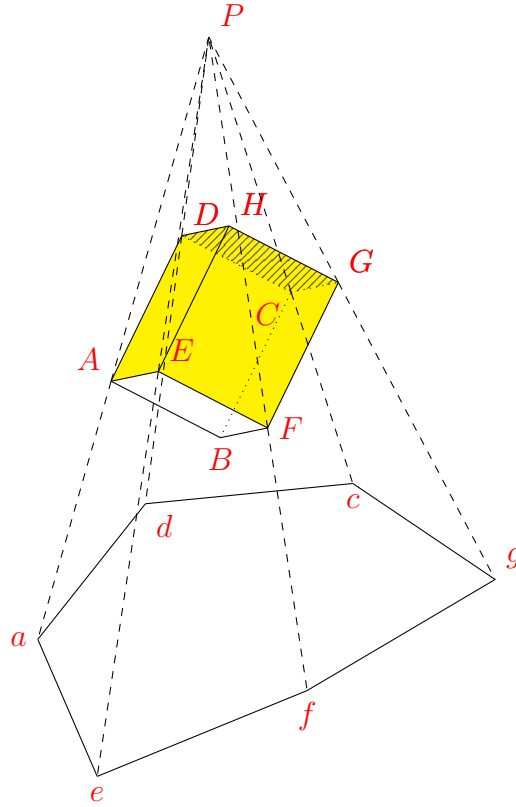
lesz:



Így a megvilágított $AEHD$ és $EFGH$ oldalak árnyéka az $afghd$ ötszög.

- Az ábrán három, a H csúcsnál találkozó oldallap van megvilágítva. (A bevonalazott $DCGH$ oldalt igazából kitakarja az

$AEDH$ és a $EFGH$ oldallap.)



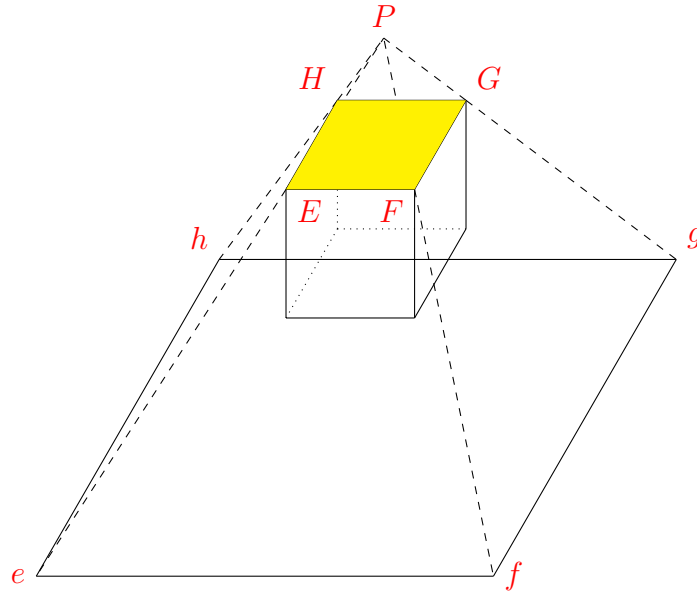
A hatszögletű $aefgcd$ árnyék csucsait az A, E, F, G, C, D csúcsok vetületei adják.

Tehát a válasz

- i. Hamis
- ii. Igaz
- iii. Igaz
- iv. Igaz
- v. Hamis

(c) (ec) Tegyük fel, hogy csak egy megvilágított oldallap van, legyen

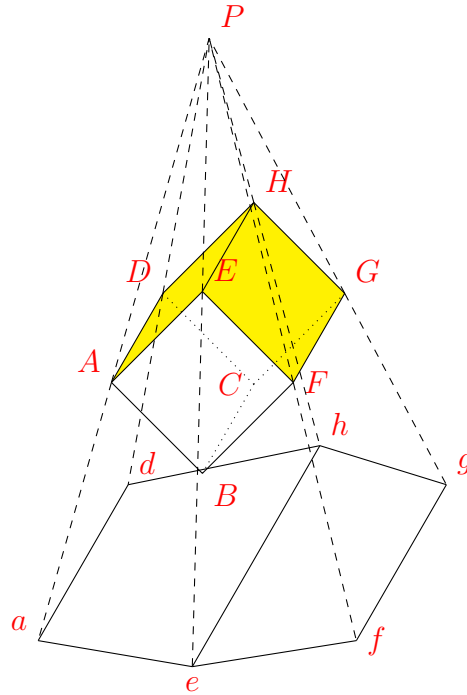
ez $EFGH$.



Itt az $EFGH$ oldallap van megvilágítva, ennek a P fényforrás középpontú vetülete az vízszintes xy síkra az $efgh$ négyszög. Így ebben az esetben az árnyék négyszögű.

- (d) (ed) Ha a P pontban elhelyezkedő fényforrás két lapot világít meg,

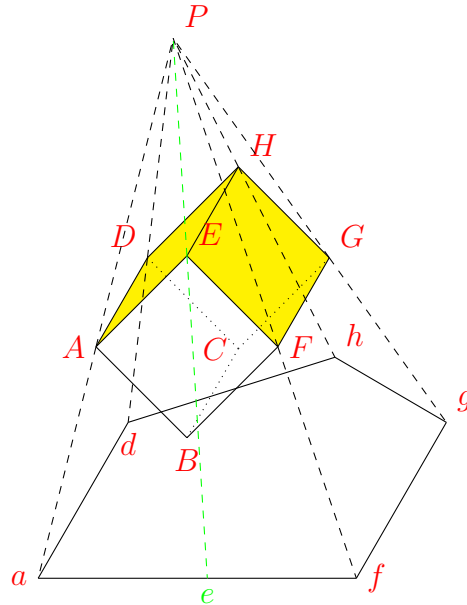
akkor az árnyék tipikusan hatszögű lesz:



Itt a megvilágított $AEHD$ és $EFGH$ oldalak árnyéka az $ae fghd$ hatszög.

Előfordulhat, hogy a P fényforrás az $ABFE$ (vagy a $CGHD$) oldallap síkjába esik, ekkor az árnyékon az a, e, f (vagy a d, h, g)

pontok egy vonalba esnek, így az árnyék csak ötszögű lesz:

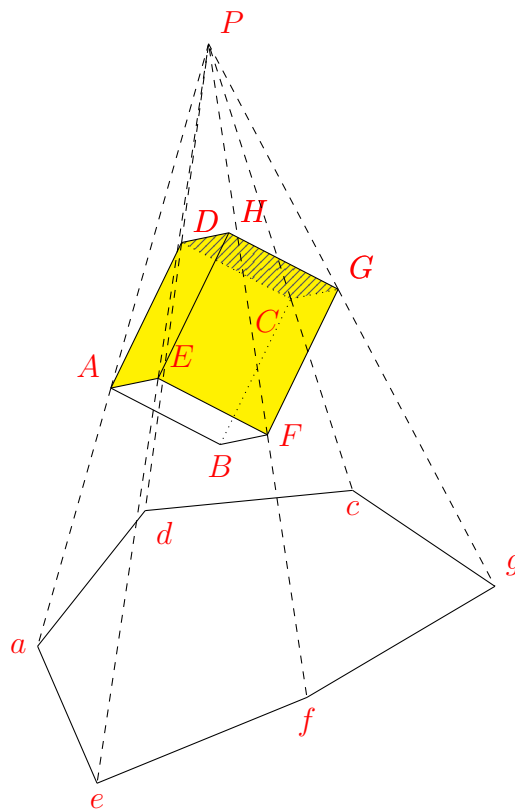


Így a megvilágított $AEHD$ és $EFGH$ oldalak árnyéka az $afghd$ ötszög.

Tehát a válasz lehet 6 és 5 is.

- (e) (ee) Az ábrán három, a H csúcsnál tálakózó oldallap van megvilágítva. (A bevonalmazott $DCGH$ oldalt igazából kitakarja az $AEDH$

és a $EFGH$ oldallap.)



A hatszögletű $ae f g c d$ árnyék csúcsait az A, E, F, G, C, D csúcsok vetületei adják.

Tehát a válasz 6.

Számszerű eredmény: (a) (ea) Igaz | Hamis

(b) (eb)

Hamis | Igaz ; Igaz | Hamis ; Igaz | Hamis ; Igaz | Hamis ; Hamis
| Igaz

(c) (ec) 4

(d) (ed) $\{5, 6\}$ | $\{4, 5\}$ | $\{4, 6\}$ | $\{5\}$ | $\{6\}$ | $\{4\}$

(e) (ee) 6

Mértékegység: (a) (ea)

(b) (eb)

(c) (ec)

(d) (ed)

(e) (ee)

7. Kerek AsztalArnyek.62-64

Feladat: (a) (ea) Helyezkedjen el egy 2 méter átmerőjű kör alakú átlátszatlan asztallap 1 méter magasságban a vízszintes talaj fölött. Süssön a Nap merőlegesen a talajra. Mekkora lesz az asztallap árnyéka? Mivel a Nap nem pontszerű, így az árnyéknak többfelé definíciója is lehet. Adj meg két szélsőséges definíciót, és számold ki az árnyék területet mindkettő szerint! A feladatban a Nap szögátmerője (vagyis a szög módjuk a Nap bal és jobb szele között) legyen $32'$. Add meg válaszként, hogy mekkora az árnyék területe, ha azt a definíciót használod, ahol az árnyék területe

- minimális,
- maximális.

(b) (eb) Helyezkedjen el egy 2 méter átmerőjű kör alakú átlátszatlan asztallap 1 métermagasságban a vízszintes talaj fölött. Süssön a Nap merőlegesen a talajra. Mekkora területű lesz az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap egyáltalán nem látható? A feladatban a Nap szögátmerője (vagyis a szög mondjuk a Nap bal és jobb széle között) legyen $32'$.

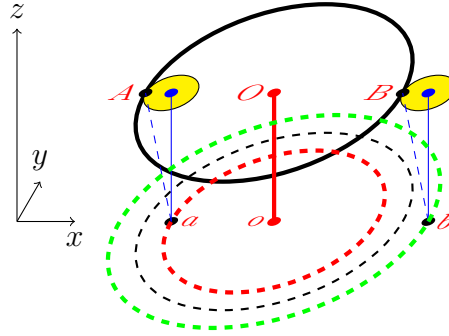
(c) (ec) Helyezkedjen el egy 2 méter átmerőjű kör alakú átlátszatlan asztallap 1 méter magasságban a vízszintes talaj fölött. Süssön a Nap merőlegesen a talajra. Mekkora területű lesz az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap legalább részlegesen látható? A feladatban a Nap szögátmérője (vagyis a szög mondjuk a Nap bal és jobb széle között) legyen $32'$.

Megoldás: (a) (ea) Megkülönböztethetjük az asztal minimális és maximális árnyékait:

- Minimális árnyék: az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap egyáltalán nem látható.
- Maximális árnyék: az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap csak részlegesen látható.

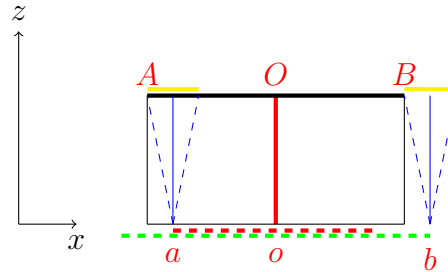
Mindkettő kör alakú lesz, először számoljuk ki a sugaraikat. A

következő ábra megadja a feladat geometriai viszonyait:



A vastag fekete kör az asztal széle, a talajon az a, b pontokban levő pontszerű bogarak az A, B pontokhoz csatlakozó sárga köröknek látnák a Napot. Persze az a pontból nézve a Nap éppen teljesen ki van takarva, az ilyen pontok lennének a minimális (szaggatott legbelső piros kör) árnyék határán. Ezzel szemben a maximális árnyék (zöld szaggatott legkülső kör) határán ülő b bogár egyedül a B pont irányából érkező napsugarat nem látná.

Szeretnénk tudni, hogy mennyi $|\overline{ao}|$ és $|\overline{bo}|$. Ehhez vesszük a háromdimenziós ábra $y = 0$ síkmetszetet:



Itt az asztal magassága $|\overline{oO}| = 1$, sugara $|\overline{AO}| = |\overline{BO}| = 1$, míg az a és b csúcspontokkal rendelkező és a kék szaggatott vonalakkal határolt szögek nagysága a Nap szögátmérője, vagyis $\delta = 32'$.

Ezért a minimális árnyék $r = |\overline{oa}|$ sugara

$$\begin{aligned} r &= |\overline{AO}| - \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \\ &= 1 - 1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360}\right) = 0.9953457 \dots \end{aligned}$$

tehát a minimális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{min} = \pi r^2 = 3.112417 \dots$$

Ezzel szemben a maximális árnyék $R = |\overline{ob}|$ sugara

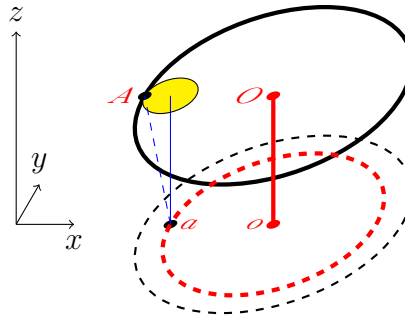
$$\begin{aligned} R &= |\overline{BO}| + \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \\ &= 1 + 1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360}\right) = 1.004654 \dots \end{aligned}$$

tehát a minimális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{max} = \pi R^2 = 3.170904 \dots$$

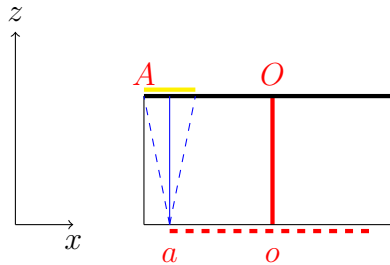
A minimális, illetve a maximális árnyékok határai (vagyis a szaggatott piros és zöld körök) távolságát nevezhetnénk az árnyék elmosódottságának, ez esetünkben úgy 1 cm.

(b) (eb) A következő ábra megadja a feladat geometriai viszonyait:



A vastag fekete kör az asztal széle, a talajon az a pontban levő pontszerű bogár az A pontokhoz csatlakozó sárga köröknek látnák a Napot. Persze az a pontból nézve a Nap éppen teljesen ki van takarva, az ilyen pontok lennének a minimális (szaggatott piros kör) árnyék határán.

Szeretnénk tudni, hogy mennyi $|\overline{ao}|$. Ehhez vesszük a háromdimenziós ábra $y = 0$ síkmetszetét:



Itt az asztal magassága $|\overline{oO}| = 1$, sugara $|\overline{AO}| = 1$, míg az a csúccsal rendelkező és a kék szaggatott vonalakkal határolt szög nagysága a Nap szögátmérője, vagyis $\delta = 32'$.

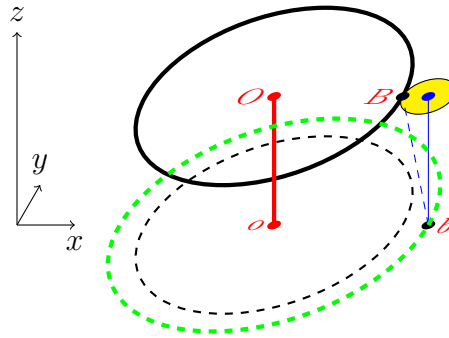
Ezért a minimális árnyék $r = |\overline{oa}|$ sugara

$$\begin{aligned} r &= |\overline{AO}| - \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \\ &= 1 - 1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360}\right) = 0.9953457 \dots \end{aligned}$$

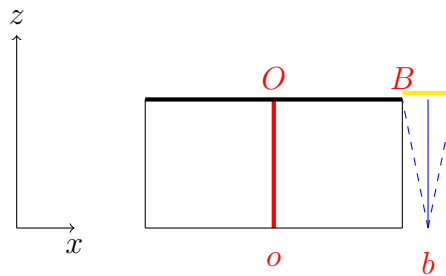
tehát a minimális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{min} = \pi r^2 = 3.112417 \dots$$

(c) (ec) A következő ábra megadja a feladat geometriai viszonyait:



A vastag fekete kör az asztal széle, a talajon a b pontokban levő pontszerű bogár az B ponthoz csatlakozó sárga körnek latnak a Napot. A maximális árnyék (zöld szaggatott kör) határán ülő b bogár egyedül a B pont irányából érkező napsugarat nem látná. Szeretnénk tudni, hogy mennyi $|\overline{bo}|$. Ehhez vesszük a háromdimenziós ábra $y = 0$ síkmetszetét:



Itt az asztal magassága $|\overline{oO}| = 1$, sugara $|\overline{BO}| = 1$, míg a b csúsponttal rendelkező és a kék szaggatott vonalakkal határolt szög nagysága a Nap szögátmérője, vagyis $\delta = 32'$.

A maximális árnyék $R = |\overline{ob}|$ sugara

$$\begin{aligned} R &= |\overline{BO}| + \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \\ &= 1 + 1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360}\right) = 1.004654 \dots \end{aligned}$$

tehát a maximális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{max} = \pi R^2 = 3.170904 \dots$$

Számszerű eredmény: (a) (ea) 3,1124 ; 3,1709

(b) (eb) 3,1124

(c) (ec) 3,1709

Mértékegység: (a) (ea) m²

(b) (eb) m²

(c) (ec) m²

8. NegyzetAsztalArnyek.65-67

Feladat: (a) (ea) Helyezkedjen el egy 2 méter élhosszú négyzet alakú átlátszatlan asztallap 1 méter magasságban a vízszintes talaj fölött. Süssön a Nap merőlegesen a talajra. Mekkora lesz az asztallap árnyéka? Mivel a Nap nem pontszerű, így az árnyéknak többféle definíciója is lehet. Adj meg két szélsőséges definíciót, és számold ki az árnyék területét mindkettő szerint! A feladatban a Nap szögátmerője (vagyis a szög módjuk a Nap bal és jobb széle között) legyen $32'$. Add meg válaszként, hogy mekkora az árnyék területe, ha azt a definíciót használod, ahol az árnyék területe

- minimális,
- maximális.

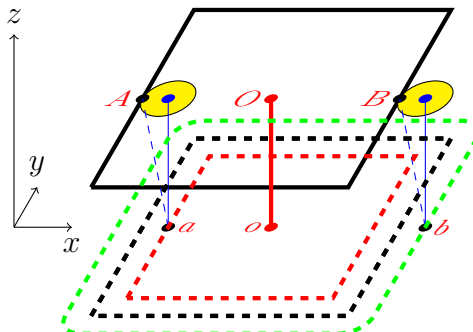
(b) (eb) Helyezkedjen el egy 2 méter élhosszú négyzet alakú átlátszatlan asztallap 1 méter magasságban a vízszintes talaj fölött. Süssön a Nap merőlegesen a talajra. Mekkora területű lesz az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap egyáltalán nem látható? A feladatban a Nap szögátmérője (vagyis a szög mondjuk a Nap bal és jobb széle között) legyen $32'$.

(c) (ec) Helyezkedjen el egy 2 méter élhosszú négyzet alakú átlátszatlan asztallap 1 méter magasságban a vízszintes talaj fölött. Süssön a Nap merőlegesen a talajra. Mekkora területű lesz az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap csak részlegesen látható? A feladatban a Nap szögátmérője (vagyis a szög mondjuk a Nap bal és jobb széle között) legyen $32'$.

Megoldás: (a) (ea) Megkülönböztethetjük az asztal minimális és maximális árnyékait:

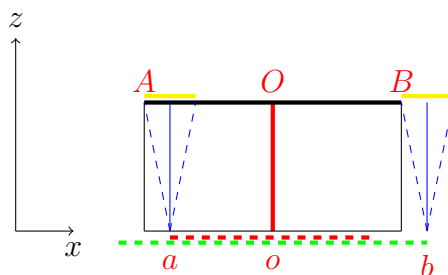
- Minimális árnyék: az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap egyáltalán nem látható.
- Maximális árnyék: az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap legalább részlegesen látható.

A következő ábra megadja a feladat geometriai viszonyait:



A vastag fekete négyzet az asztal séle, a talajon az a, b pontokban levő pontszerű bogarak az A, B pontokhoz csatlakozó sárga köröknek látnák a Napot. Persze az a pontból nézve a Nap éppen teljesen ki van takarva, az ilyen pontok lennének a minimális (szaggatott piros négyzet) árnyék határán. Ezzel szemben a maximális árnyék (zöld szaggatott lekerekített sarkú négyzet) határán ülő b bogár egyedül a B pont irányából érkező napsugarat nem látna.

Szeretnénk tudni, hogy mennyi $|\overline{ao}|$ és $|\overline{bo}|$. Ehhez vesszük a háromdimenziós ábra $y = 0$ síkmetszetét:



Itt az asztal magassága $|\overline{oO}| = 1$, élhossza $|\overline{AB}| = 2$, míg az a és b csúcspontokkal rendelkező és a kék szaggatott vonalakkal határolt szögek nagysága a Nap szögátmérője, vagyis $\delta = 32'$.

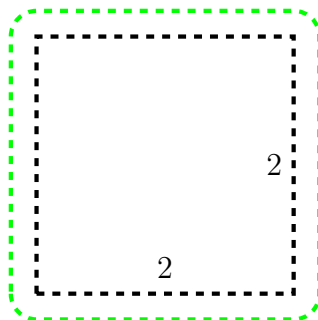
Ezért a minimális árnyék élhossza $d = 2|\overline{oa}|$:

$$\begin{aligned} d &= 2 (|\overline{AO}| - \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|) \\ &= 2 \left(1 - 1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360} \right) \right) \end{aligned}$$

tehát a minimális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{min} = d^2 = 3.981404 \dots$$

Ezzel szemben a maximális árnyék egy $D = 2|\overline{ob}|$ nagyságú leke-
rekített sarkú négyzetben helyezkedik el,



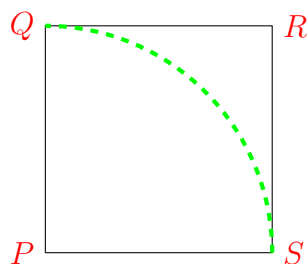
ahol

$$\begin{aligned} D &= 2 \left(|\overline{BO}| + \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right) \\ &= 2 \left(1 + 1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360} \right) \right) \end{aligned}$$

tehát a maximális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{max} = D^2 - \left(\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right)^2 (4 - \pi) = 4.018620 \dots$$

Itt a $\left(\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right)^2 (4 - \pi)$ tag a sarkok lékerekítése miatti területcsökkenést adja meg.



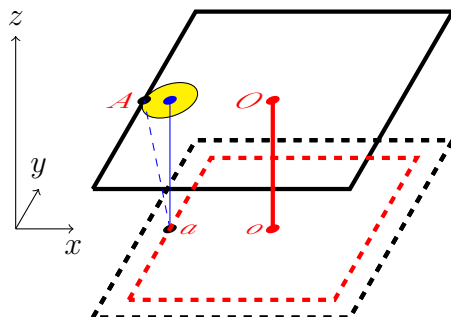
$$|\overline{PS}| = |\overline{PQ}| = \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|$$

$$T_{QRS} = \left(\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right)^2 \cdot (1 - \pi/4)$$

Tehát a válasz az árnyék minimális és maximális méretére:

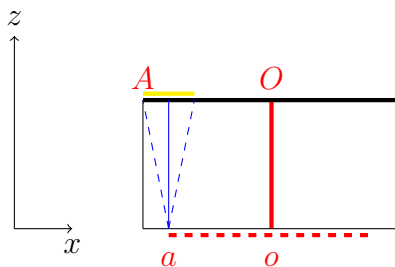
$$T_{min} = 3.981404 \dots \quad T_{max} = 4.018620 \dots$$

(b) (eb) A következő ábra megadja a feladat geometriai viszonyait:



A vastag fekete négyzet az asztal séle, a talajon az a pontban levő pontszerű bogár az A ponthoz csatlakozó sárga köröknek átnák a Napot. Persze az a pontból nézve a Nap éppen teljesen ki van takarva, az ilyen pontok lennének a minimális (szaggatott piros négyzet) árnyék határán.

Szeretnénk tudni, hogy mennyi $|\overline{ao}|$. Ehhez vesszük a háromdimenziós ábra $y = 0$ síkmetszetét:



Itt az asztal magassága $|\overline{oO}| = 1$, élhossza 2, míg az a csúcsponttal rendelkező és a kék szaggatott vonalakkal határolt szög nagysága a Nap szögátmérője, vagyis $\delta = 32'$.

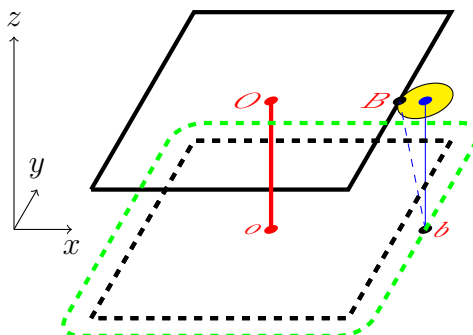
Ezért a minimális árnyék élhossza $d = 2|\overline{oa}|$:

$$\begin{aligned} d &= 2 (|\overline{AO}| - \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|) \\ &= 2 \left(1 - 1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360} \right) \right) \end{aligned}$$

tehát a minimális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

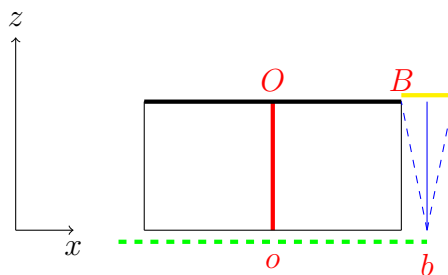
$$T_{min} = d^2 = 3.981404 \dots$$

(c) (ec) A következő ábra megadja a feladat geometriai viszonyait:



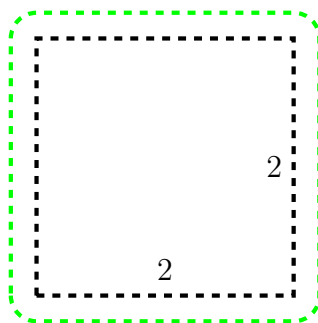
A vastag fekete négyzet az asztal széle, a talajon az b pontban levő pontszerű bogár a B pontokhoz csatlakozó sárga köröknek látnák a Napot. A maximális árnyék (zöld szaggatott lekerekített sarkú négyzet) határán ülő b bogár egyedül a B pont irányából érkező napsugarat nem látná.

Szeretnénk tudni, hogy mennyi $|\overline{bo}|$. Ehhez vesszük a háromdimenziós ábra $y = 0$ síkmetszetét:



Itt az asztal magassága $|\overline{oO}| = 1$, élhossza 2, míg az a és b csúcspontokkal rendelkező és a kék szaggatott vonalakkal határolt szögek nagysága a Nap szögátmérője, vagyis $\delta = 32'$.

A maximális árnyék egy $D = 2|\overline{ob}|$ nagyságú lekerekített sarkú négyzetben helyezkedik el,



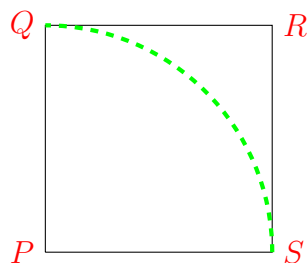
ahol

$$\begin{aligned} D &= 2 \left(|\overline{BO}| + \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right) \\ &= 2 \left(1 + 1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360} \right) \right) \end{aligned}$$

tehát a maximális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{max} = D^2 - \left(\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right)^2 (4 - \pi) = 4.018620 \dots$$

Itt a $\left(\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right)^2 (4 - \pi)$ tag a sarkok lekerekítése miatti területcsökkenést adja meg.



$$|\overline{PS}| = |\overline{PQ}| = \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|$$

$$T_{QRS} = \left(\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}| \right)^2 \cdot (1 - \pi/4)$$

Tehát a válasz az árnyék maximális mérete:

$$T_{max} = 4.018620 \dots$$

Számszerű eredmény: (a) (ea) 3,9814 ; 4,0186

(b) (eb) 3,9814

(c) (ec) 4,0186

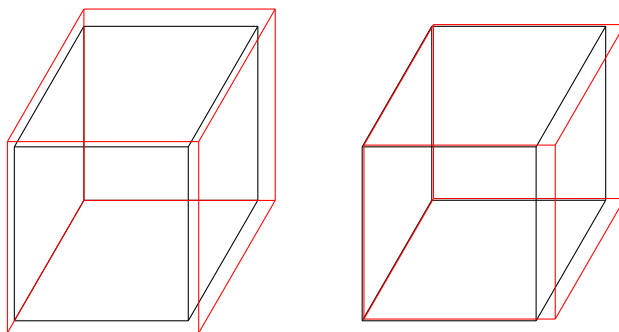
Mértékegység: (a) (ea) m²

(b) (eb) m²

(c) (ec) m²

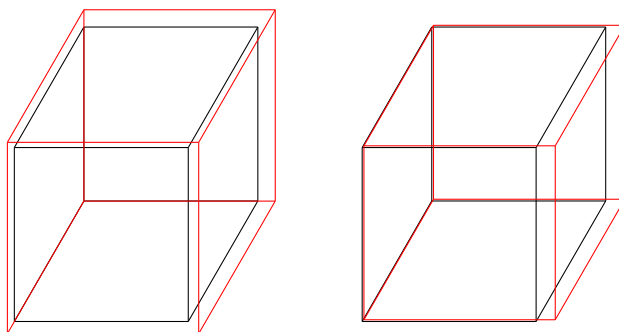
9. KockaFestes.68-74

- Feladat:** (a) (ea) Jancsi és Juliska kertjében van két nagyon ronda 1 méter élhosszú betonkocka. Úgy döntenek, hogy befestik a két kocka három-három, egy-egy csúcsban találkozó oldalát. Jancsi kékre az egyik kockát, míg Juliska zöldre a másikat. Jancsi 1 mm vastagon keni fel a festéket a kockája oldalaira, ezzel szemben Juliska 2 mm vastag festékréteget akar a kockájára. Mindkét színű festék ára 1234 Forint/Liter. Igaz-e, hogy Juliskának kétszer annyiba kerül a festék, mint Jancsinak? Válaszold meg ezt a kérdést, indokold az igazadat! Ezután hozz fel érveket az ellentétes válasz érdekében is! (Ez persze nem egy *matematikai* típusú kérdés, de ha valaki megkérdez egy festőmestert, akkor ő valószínűleg az igaz/hamis válaszokból az egyiket sokkal értelmesebbnek fogja gondolni.) Sikered-e elgondolkodnod a kérdésen?
- (b) (eb) Jancsi és Juliska kertjében van két nagyon ronda 1 méter élhosszú betonkocka. Úgy döntenek, hogy befestik a két kocka három-három, egy-egy csúcsban találkozó oldalát. Jancsi kékre az egyik kockát, míg Juliska zöldre a másikat. Jancsi $\Delta x_{Jani} = 1$ mm vastagon keni fel a festéket a kockája oldalaira, ezzel szemben Juliska $\Delta x_{Juli} = 2$ mm vastag festékréteget akar a kockájára. Igaz-e, hogy Juliskának kétszer annyi festék kell, mint Jancsinak? (Ez persze eddig nem egy *matematikai* típusú kérdés ebben a formában, így nincs rá egyértelmű válasz.) Válaszold meg a kérdést azokban az esetekben, ha Jancsi és Juliska ugyanolyan festési stílust alkalmaz és ez a következő:
- A befestendő oldallap és annak Δx távolsággal kifelé eltolt másolata közötti teret töltik ki festékkal (jobb ábra).
 - A festékkal kitöltik az eredeti kocka és a befestendő oldallapok irányában Δx élhosszal megnagyobbított kocka közötti űrt (bal ábra).



- (c) (ec) Jancsi és Juliska kertjében van két nagyon ronda 1 méter élhosszú betonkocka. Úgy döntenek, hogy befestik a két kocka három-három, egy-egy csúcsban találkozó oldalát. Jancsi kékre az egyik kockát, míg Juliska zöldre a másikat. Jancsi és Juliska egyaránt Δx mm vastagon ken fel a festéket a kockája oldalaira. Tegyük fel, hogy a festési stílusuk a következő:

- Jancsi: A befestendő oldallap és annak Δx távolsággal kifele eltolt másolata közötti teret töltik ki festékkel (jobb ábra, ami egy oldal befestését illusztrálja).
- Juliska: A festékkel kitöltik az eredeti kocka és a befestendő oldallapok irányában Δx élhosszal megnagyobbított kocka közötti űrt (bal ábra).



Hány milliméter Δx , ha Juliska

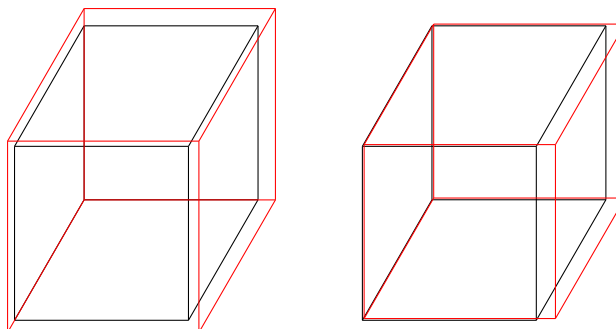
- egy százalékkal több,
 - egy ezreléssel kevesebb festéket használ fel mint Jancsi?
- (d) (ed) Jancsi és Juliska kertjében van két nagyon ronda 1 méter élhosszú betonkocka. Úgy döntenek, hogy befestik a két kocka három-három, egy-egy csúcsban találkozó oldalát. Jancsi kékre az egyik kockát, míg Juliska zöldre a másikat. Jancsi $\Delta x_{Jani} = 1$ mm

vastagon keni fel a festéket a kockája oldalaira, Juliska ugyancsak egy $\Delta x_{Juli} = 1$ mm vastag festékréteget akar a kockájára. Hány ezrelkkel több festéket fog Juliska felhasználni, ha a festési stílusuk a következő:

- Jancsi: A befestendő oldallap és annak Δx távolsággal kifele eltolt másolata közötti teret tölti ki festékkal.
- Juliska: A festékkal kitölti az eredeti kocka és a befestendő oldallapok irányában Δx élhosszal megnagyobbított kocka közötti űrt.

Megoldás: (a) (ea) A szükséges festékmennyiség nagyjából a festékréteg vastagságával és a befestendő felület méretével arányos, így Juliskának kétszer annyi festék kell, ami kétszer annyiba kerül. A feladat által nem specifikált részletek persze árnyalhatják ezt az egyszerű választ.

- Nem egészen (bár majdnem) mindegy, hogy hogyan kenjük fel a festéket. Vegyük pl. a következő két eshetőséget.



Tegyük fel, hogy valaki úgy festi be a kocka három lapját egy Δx vastagságú réteggel, hogy kitölti a bal ábrán látható fekete (1 élhosszú) és a nagyobb piros $((1 + \Delta x)$ élhosszú) kockák közötti teret. Ehhez

$$(1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3$$

köbméter festék szükséges.

Ellenben, ha valaki egy oldalt úgy fest be, hogy kitölti a jobb ábrán látható fekete (1 élhosszú) kocka és a nagyobb piros $((1 + \Delta x), 1, 1$ élhosszú) téglatest közötti teret, akkor ezt három oldal esetében megismételve összesen $3 \cdot 1 \cdot \Delta x$ köbméter festékre lesz szüksége.

A második esetben *pontosan* arányos a szükséges festékmennyiség a festés vastagságával, míg az első esetben csak *közelítőleg*, akkor, ha

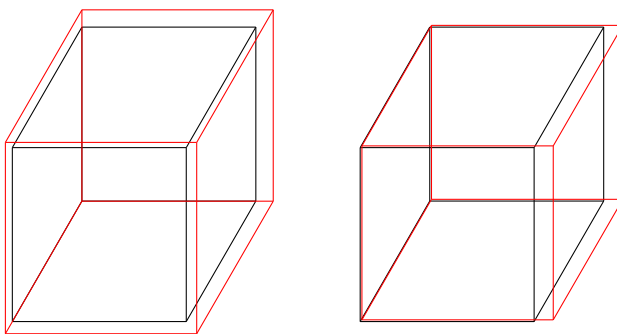
$$3\Delta x^2 + \Delta x^3 \ll 3\Delta x.$$

A valóságban valószínűleg a két eset közötti állapot valósulhat meg, az éleknél feltehetőleg valamilyen lekerekített festékréteget kapunk.

- Most tegyük fel egy pillanatra, hogy *pontosan* arányos a szükséges festékmennyiség a festés vastagságával. Vegyen mondjuk Juliska hat liter festéket, Jancsi meg hármát. Ekkor Juliska az $6 \times 1234 = 7404$ Forint helyett 7405 Forintot fizet a kasszánál, mivel öt forintra kerekítenek a boltosok. Jancsi pedig $3 \times 1234 = 3702$ Forint helyett csak 3700-at fizet, ami nem pontosan a fele a 7405-nek.
- Az árak 5 Forintos kerekítése már eleve csökkenti annak az esélyét, hogy kétszer annyi festékért kétszer annyit fizetünk. Ez a hatás viszont csökken, ha egyszerre több terméket is vásárolunk, hiszen ekkor a kerekítési hiba megoszlik a termékek között.

A felsorolt problémáktól függetlenül gyakorlatilag nem tévedünk nagyot, ha azt mondjuk, hogy kétszeres vastagságú festéshez a festék kétszer annyiba kerül.

(b) (eb)



- i. Az első, bal ábrán látható esetben a szükség festékmennyiség kitölti a bal ábrán látható fekete (1 élhosszú) és a nagyobb piros $(1 + \Delta x)$ élhosszú kockák közötti teret. Ehhez

$$(1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3$$

köbméter festék szükséges. A feladatban

$$\Delta x_{Juli} = 2\Delta x_{Jani} = 2 \cdot 0.001 \text{ m},$$

viszont ekkor

$$\begin{aligned}
 & 3\Delta x_{Juli} + 3\Delta x_{Juli}^2 + \Delta x_{Juli}^3 \\
 &= 3 \cdot (2\Delta x_{Jani}) + 3 \cdot (2\Delta x_{Jani})^2 + (2\Delta x_{Jani})^3 \\
 &= 6\Delta x_{Jani} + 12\Delta x_{Jani}^2 + 8\Delta x_{Jani}^3 \\
 &\neq 2 \cdot (3\Delta x_{Jani} + 3\Delta x_{Jani}^2 + \Delta x_{Jani}^3).
 \end{aligned}$$

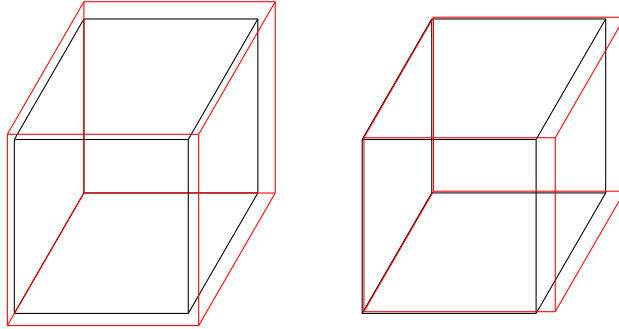
Tehát nem igaz, hogy Julinak pontosan kétszer annyi festékre lesz szüksége.

- ii. A jobb ábrán látható, hogy egy oldal befestéséhez $1 \cdot \Delta x$ köbméter festék szükséges, három oldalhoz pedig $3 \cdot \Delta x$. Így a szükséges festékmennyiség arányos a festés Δx vastagságával, és mivel

$$\Delta x_{Juli} = 2\Delta x_{Jani} = 2 \cdot 0.001 \text{ m},$$

Julinak pontosan kétszer annyi festékre lesz szüksége, mint Janinak.

(c) (ec)



Juliska összesen

$$(1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3$$

köbméter festéket használ fel, míg Jancsi csak $3\Delta x$ -et. Ezek különbsége $3\Delta x^2 + \Delta x^3$, ha ennek aránya Jancsi által felhasznált festékhez képest q , akkor

$$(3\Delta x^2 + \Delta x^3) : 3\Delta x = q.$$

Tehát, hogy megkeressük Δx -et, meg kell oldanunk a

$$\begin{aligned}
 3\Delta x^2 + \Delta x^3 &= 3q\Delta x, \\
 \Delta x (\Delta x^2 + 3\Delta x - 3q) &= 0
 \end{aligned}$$

egyenletet. Esetünkben a $\Delta x = 0$ megoldás használhatatlan (persze egy kötözködő természetű filozófus mondhatná, hogy ha egyikük sem használt fel semennyi festéket, akkor mondjuk Juliska megspórolt tizenöt százaléknnyit Jancsihoz képest) így a zárójelben szereplő másodfokú polinom pozitív gyökei:

i.

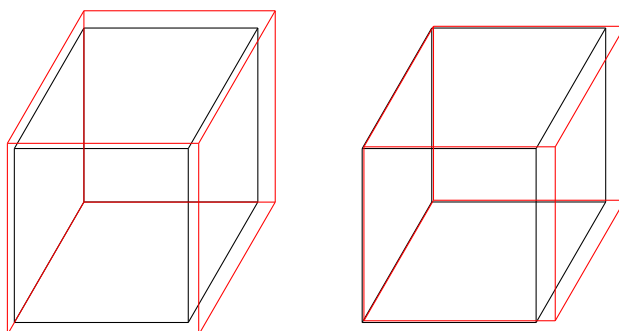
$$q = 0.01, \quad \Delta x = 0.009966 \dots$$

ii.

$$q = -0.01, \quad \text{Nincs pozitív gyök.}$$

Tehát ha $\Delta x = 9.966 \dots$ milliméter, akkor Juliska egy százalékkal több festéket, fog elhasználni mint Jancsi. (Persze egy centi vastagon elég nehéz valamit befesteni, a feladatnak több értelme lenne, ha festés helyett vakolnánk a kockákat.) Az viszont nem fordulhat elő, hogy Juliska megspórol festéket Jancsihoz képest (ez igazából az ábrából ránézésre nyilvánvaló).

(d) (ed)



i. Az első, bal ábrán látható esetben (Juliska) a szükség festékmennyiség kitölti a bal ábrán látható fekete (1 élhosszú) és a nagyobb piros $((1 + \Delta x)$ élhosszú) kockák közötti teret. Ehhez

$$V_{Juliska} = (1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3$$

köbméter festék szükséges. A második (Jancsi) esetben pedig a szükség festékmennyiség egyszerűen $V_{Jancsi} = 3\Delta x$. A feladatban

$$\Delta x = 0.001 \text{ m.}$$

Tehát

$$\begin{aligned} & (V_{Juliska} - V_{Jancsi}) / V_{Jancsi} \\ &= (3\Delta x^2 + \Delta x^3) / (3\Delta x) = 0.0010003 \dots, \end{aligned}$$

így azt mondhatjuk, hogy Jancsi 1 ezrelékkal több festéket használt el Juliskához képest.

Számszerű eredmény: (a) (ea) Igen | Nem
(b) (eb) Igaz | Hamis ; Hamis | Igaz
(c) (ec) 9,966 | 8,866 | 10,066 | 7,766 | Nincs ilyen eset
;
Nincs ilyen eset | 0,9966 | 0,8866 | 1,066 | 0,7766
(d) (ed) 1

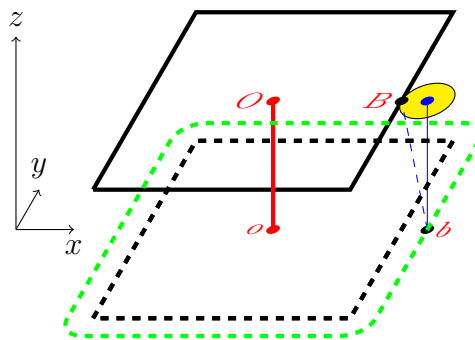
Mértékegység: (a) (ea)
(b) (eb)
(c) (ec) mm ; mm
(d) (ed) ezrelék

10. NegyszogKornyezetTerulet.75-92

- Feladat:**
- (a) (ea) Helyezkedjen el egy 2 méter élhosszú négyzet alakú átlátszatlan asztallap 1 métermagasságban a vízszintes talaj fölött. Süssön a Nap merőlegesen a talajra. Mekkora területű lesz az asztal alatt a talaj azon tartománya, ahonnan a Nap legalább részlegesen látható? A feladatban a Nap szögátmérője (vagyis a szög mondjuk a Nap bal és jobb széle között) legyen $32'$.
 - (b) (eb) Az előző feladatban az asztal maximális árnyéka azon pontok halmaza volt, amelyek maximum egy, a feladatban kiszámolt r értéknél nem voltak messzebb egy adott négyzettől. Legyen adott a síkon egy $T = 1 \text{ m}^2$ területű és $K = 8 \text{ m}$ kerületű \mathcal{H} háromszög. Legyen a \mathcal{D} tartomány azon halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{H} -tol mint $r = 10 \text{ cm}$. Mennyi \mathcal{D} területe? Ha ezt nem lehet egyértelműen kiszámolni, akkor a válasz legyen nulla!
 - (c) (ec) Legyen adott a síkon egy $T = 1 \text{ m}^2$ területű és $K = 8 \text{ m}$ kerületű \mathcal{H} háromszög. Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{H} oldalaitól mint $r = 10 \text{ cm}$, továbbá a háromszögön belül helyezkednek el. Mennyi \mathcal{D} területe? Ha ezt nem lehet egyértelműen kiszámolni, akkor a válasz legyen nulla!
 - (d) (ed) Legyen adott a síkon egy $T = 1 \text{ m}^2$ területű és $K = 8 \text{ m}$ kerületű \mathcal{H} négyszög. Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{H} -tol mint $r = 10 \text{ cm}$. Mennyi \mathcal{D} területe? Ha ezt nem lehet egyértelműen kiszámolni, akkor a válasz legyen nulla!
 - (e) (ee) Legyen adott a síkon egy $T = 1 \text{ m}^2$ területű és $K = 8 \text{ m}$ kerületű \mathcal{H} konvex négyszög. Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{H} -tol mint $r = 10 \text{ cm}$. Mennyi \mathcal{D} területe? Ha ezt nem lehet egyértelműen kiszámolni, akkor a válasz legyen nulla!
 - (f) (ef) (Ebben a feladatban higgyük el azt, hogy az azonos kerületű négyszögek közül a négyzet területe a legnagyobb.) Legyen adott a síkon egy $T = 1 \text{ m}^2$ területű és $K = 4 \text{ m}$ kerületű \mathcal{H} négyszög. Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{H} -tol mint $r = 10 \text{ cm}$. Mennyi \mathcal{D} területe? Ha ezt nem lehet egyértelműen kiszámolni, akkor a válasz legyen nulla!
 - (g) (eg) Legyen adott a háromdimenziós térben egy \mathcal{P} konvex poliéder (síkláppokkal határolt test). Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{P} -tol mint $r = 1 \text{ cm}$. Ha

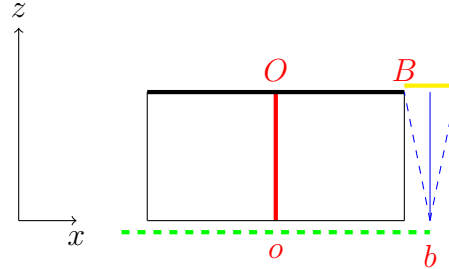
- adott \mathcal{P} térfogata és felülete, akkor ki lehet-e ezekből az adatokból számolni \mathcal{D} térfogatát? Tippeld meg, hogy a válasz igen vagy nem! (Ez a feladat kissé bonyolultabb, mint a kétdimenziós eset. Próbáld legalább indokolni az egyszavas IGEN/NEM válaszodat!)
- (h) (eh) Legyen adott a háromdimenziós térben egy \mathcal{P} poliéder (síklappal határolt test). Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{P} -tol mint $r = 1$ cm. Ha adott \mathcal{P} térfogata és felülete, akkor ki lehet-e ezekből az adatokból számolni \mathcal{D} térfogatát? Tippeld meg, hogy a válasz igen vagy nem! (Ez a feladat kissé bonyolultabb, mint a kétdimenziós eset. Próbáld legalább indokolni az egyszavas IGEN/NEM válaszodat!)
- (i) (ei) Legyen adott a háromdimenziós térben egy \mathcal{P} konvex poliéder (síklappal határolt test). Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{P} -tol mint $r = 1$ cm. Ha adott \mathcal{P} térfogata, felület és az éleinek az összhossza, akkor ki lehet-e ezekből az adatokból számolni \mathcal{D} térfogatát? Tippeld meg, hogy a válasz igen vagy nem!
- (j) (ej) Legyen adott a háromdimenziós térben egy \mathcal{P} poliéder (síklappal határolt test). Legyen a \mathcal{D} tartomány azon pontok halmaza, amelyek nincsenek messzebb \mathcal{P} -tol mint $r = 1$ cm. Ha adott \mathcal{P} térfogata, felülete és az éleinek az összhossza, akkor ki lehet-e ezekből az adatokból számolni \mathcal{D} térfogatát? Tippeld meg, hogy a válasz igen vagy nem!

Megoldás: (a) (ea) A következő ábra megadja a feladat geometriai viszonyait:



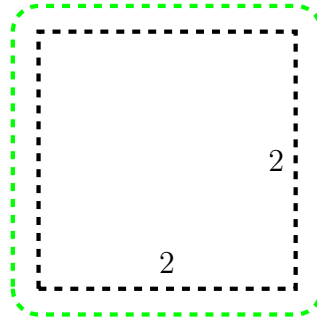
A vastag fekete négyzet az asztal szele, a talajon az b pontban levő pontszerű bogár a B pontokhoz csatlakozó sárga köröknek latnak a Napot. A maximális árnyék (zöld szaggatott lekerekített sarkú négyzet) határán ülő b bogár egyedül a B pont irányából érkező napsugarat nem látná.

Szeretnénk tudni, hogy mennyi $|\overline{bo}|$. Ehhez vesszük a háromdimenziós ábra $y = 0$ síkmetszetét:



Itt az asztal magassága $|\overline{oO}| = 1$, élhossza 2, míg az a és b csúcspontokkal rendelkező és a kék szaggatott vonalakkal határolt szögek nagysága a Nap szögátmérője, vagyis $\delta = 32'$.

A maximális árnyék egy $D = 2|\overline{ob}|$ nagyságú lekerekített sarkú négyzetben helyezkedik el,



amelynek a párhuzamos elei egymástól

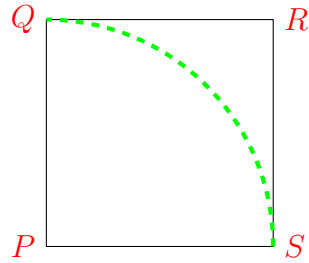
$$\begin{aligned} D &= 2 (|\overline{BO}| + \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|) \\ &= 2 \left(1 + 1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{(32/2) \cdot 2\pi}{60 \cdot 360} \right) \right) \end{aligned}$$

távolságra vannak, tehát a maximális árnyék területe (négyzetméterben számolva)

$$T_{max} = D^2 - (\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|)^2 (4 - \pi) = 4.018620 \dots$$

Itt a $(\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|)^2 (4 - \pi)$ tag a sarkok lekerekítése miatti te-

rületcsökkenést adja meg.



$$|\overline{PS}| = |\overline{PQ}| = \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|$$

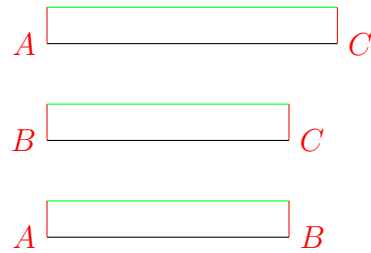
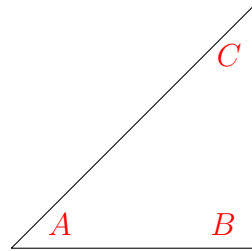
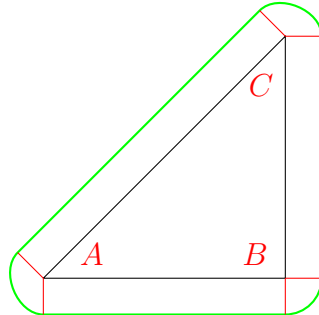
$$T_{QRS} = (\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot |\overline{oO}|)^2 \cdot (1 - \pi/4)$$

Tehát az árnyék maximális mérete:

$$T_{max} = 4.018620 \dots$$

(b) (eb) A válasz IGEN, mint azt a következő érvelés bizonyítja.

A zöld vonalon belüli \mathcal{D} tartományt felvághatjuk az ábrán látható darabokra:



Az A, B, C pontoknál elhelyezkedő körcikkek szögösszege pontosan 360° fokot ad, hiszen a körcikkek szögei az A, B, C pontoknál rendre

$$180^\circ - \alpha, \quad 180^\circ - \beta, \quad 180^\circ - \gamma,$$

ezen szögek összege pedig

$$3 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ,$$

mivel a háromszög α, β, γ szögeinek az összege 180° . Tehát az összterület:

$$\begin{aligned} \text{Terület}(\mathcal{D}) &= T_{ABC} + r \cdot |\overline{AB}| + r \cdot |\overline{BC}| + r \cdot |\overline{AC}| + \pi r^2 \\ &= T_{ABC} + r \cdot K_{ABC} + \pi r^2. \end{aligned}$$

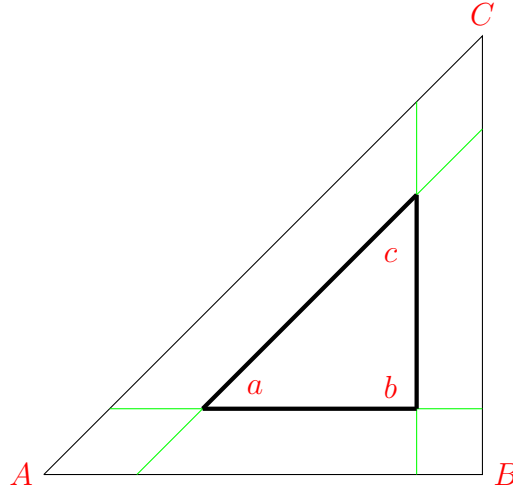
Itt T_{ABC}, K_{ABC} a háromszög területe és kerülete. Az érvelésünk nem függ a háromszög aktuális alakjától, tehát általánosan is igaz, nem csak az ábrán látható derékszögű háromszögre.

Esetünkben

$$\text{Terület}(\mathcal{D}) = 1 + 0.1 \cdot 8 + \pi \cdot (0.1)^2 = 1.83141593 \dots$$

négyzetméterben számolva.

- (c) (ec) A kérdéses \mathcal{D} tartomány a következő ábrán látható ABC háromszög és a kisebb, de vastag fekete vonallal jelzett abc háromszögek között helyezkedik el.



Az ábrán az AB és ab (hasonlóan a $BC \leftrightarrow bc$, $AC \leftrightarrow ac$ párokhoz) egyenespárok távolsága r . Az a, b, c pontok az α, β, γ szögek szögfelezőin helyezkednek el. Az ABC háromszöghöz hasonló az abc háromszög, a kicsinyítési $\lambda = |\overline{ab}|/|\overline{AB}|$ faktor a következőképpen számolható ki:

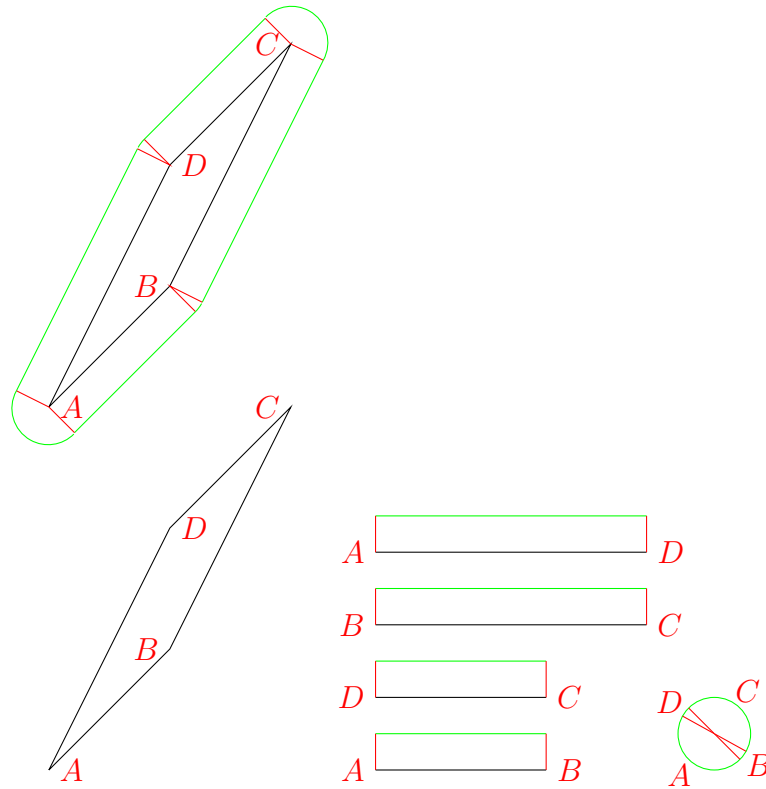
$$\begin{aligned} |\overline{ab}| &= |\overline{AB}| - r \cdot \text{ctg}(\alpha/2) - r \cdot \text{ctg}(\beta/2), \\ \lambda &= 1 - \frac{r}{|\overline{AB}|} (\text{ctg}(\alpha/2) + \text{ctg}(\beta/2)). \end{aligned}$$

Természetesen ugyanannak a λ számnak kell kijönnie, ha az AB oldal helyett a AC vagy BC oldalakat használtuk volna. (A rettenetesen unatkozó diákok megpróbálhatják levezetni ezt, mint az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ feltétel következményét.)

Viszont α és β többbe-kevésbe tetszőlegesek (pozitívak és összegük kevesebb mint 180°) tehát λ változik, ha pl. megváltoztatjuk α -t. Így a \mathcal{D} tartomány területe függ a háromszög alakjától, hiszen a \mathcal{D} tartományból hiányzó abc háromszög területe függ az α, β, γ szögektől. Tehát az ABC háromszög területe és kerülete NEM határozza meg a \mathcal{D} tartomány területet.

- (d) (ed) NEM. Ha a négyszög konvex, akkor a válasz igen lenne, mint azt az alábbi érvelés bizonyítja:

A zöld vonalon belüli \mathcal{D} tartományt felvághatjuk az ábrán látható darabokra:



Az A, B, C, D pontoknál elhelyezkedő körcikkek szögösszege pontosan 360° fokot ad, hiszen a körcikk szöge pl. a B pontnál azt mondja meg, hogy mennyivel kell az AB oldal irányát elforgatni ahhoz, hogy megkapjuk a BC szakasz irányát. Hasonlóan a körcikk szöge a C pontnál azt mondja meg, hogy mennyivel kell az

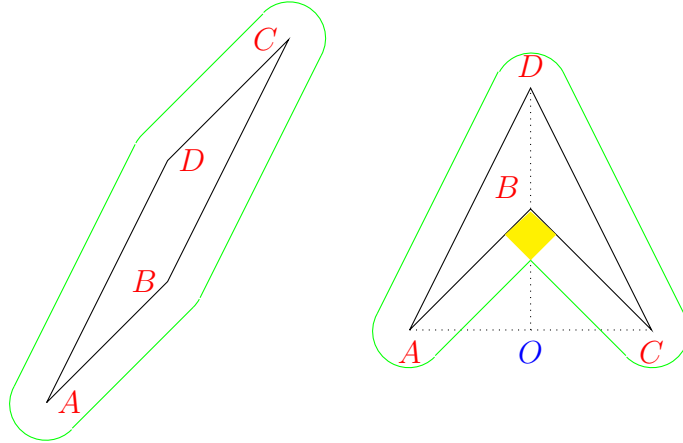
BC oldal irányát elforgatni ahhoz, hogy megkapjuk a CD szakasz irányát. Megismételve mindezt mind a négy csúcsnál, az AB oldal összesen 360° fokot fog elforgatni.

Tehát az összterület:

$$\begin{aligned} \text{Terület}(\mathcal{D}) &= T_{ABC} + r \cdot |\overline{AB}| + r \cdot |\overline{BC}| + r \cdot |\overline{CD}| + r \cdot |\overline{DA}| + \pi r^2 \\ &= T_{ABCD} + r \cdot K_{ABCD} + \pi r^2. \end{aligned}$$

Itt T_{ABCD}, K_{ABCD} a négyszög területe és kerülete. Az érvelésünk nem függ a négyszög aktuális alakjától, tehát általánosan is igaz, nem csak az ábrán látható négyszögre.

Azonban ha konkáv négyszögeket is megengedünk, akkor a \mathcal{D} tartomány területe már nem lesz kiszámítható a négyszög területéből és kerületéből. Vegyük pl. az ábrán látható ugyanolyan területű és kerületű négyszögpárt:



A négyszögeket úgy konstruáltuk meg, hogy ha a két ábrán a négyszögeket felvágjuk a BD átló mentén, akkor egybevágó háromszögeket kapunk. Legyen továbbá a jobb oldali ábrán

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = \sqrt{2}, \quad |\overline{DB}| = 1, \quad |\overline{AC}| = 2,$$

$$|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = |\overline{BD}| = 1.$$

Ekkor a kerület

$$K_{ABCD} = 2 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{1^2 + 2^2} \right),$$

mivel az AC egyenesétől a D pont távolsága 2. A terület pedig:

$$T_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot 1 = 1.$$

A négyszög A és C -nel levő $\alpha = \gamma$ szögei

$$\alpha = \arctg(2) - \arctg(1),$$

továbbá a D csúcsnál levő δ szög

$$\delta = 2 \cdot \arctg(1/2).$$

Itt az \arctg függvény a tangens függvény $(-\pi/2, \pi/2)$ fölötti darabjának az inverze. Mindezek alapján ki tudjuk számolni a jobboldali nyílhegy \mathcal{D} környezetének a területet:

$$\begin{aligned} \text{Terület}(\mathcal{D}) &= T_{ABCD} + (r \cdot K_{ABCD} - r^2) \\ &\quad + (r^2 ((\pi - \alpha) + (\pi - \gamma) + (\pi - \delta))) \end{aligned}$$

Itt a második tagban az r^2 levonására azért volt szükség, mivel a jobboldali ábrán a B pont alatti sárga négyzetet az AB és a BC oldalakra emelt r szélességű téglalapok is tartalmazzak.

Numerikusan

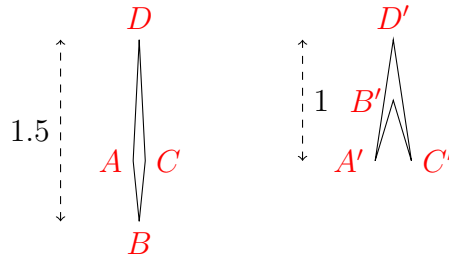
$$\text{Terület}(\mathcal{D}) = 1.868539 \dots$$

Ezzel szemben a konvex négyszög környezetének a területe csak

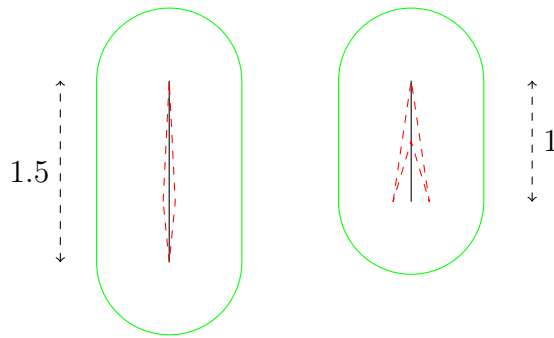
$$T_{ABCD} + r \cdot K_{ABCD} + \pi r^2 = 1.831415 \dots$$

Tehát T_{ABCD} és K_{ABCD} önmagukban nem határozzak meg a környezet területet.

Megjegyzés: Azt, hogy a négyszögek területe és kerülete NEM határozza meg \mathcal{D} területet, azt konkrét numerikus számításokkal demonstráltuk. Ennél érthetőbb magyarázatot adna a következő, kissé elfajult ellenpélda:

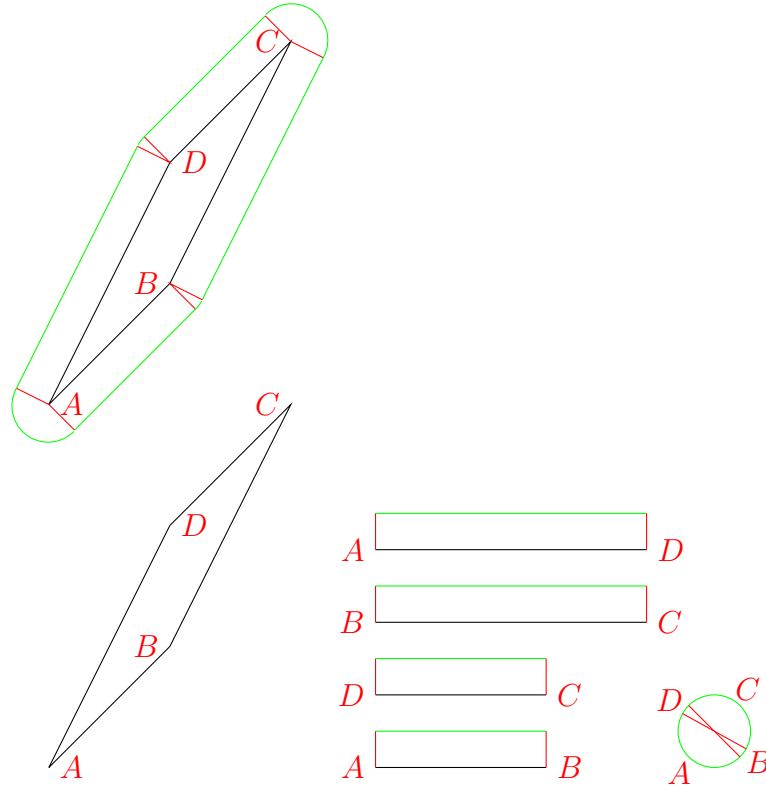


Ha a $w = |\overline{AC}|$ távolság nagyon kicsi és $|\overline{A'C'}| = 3 \cdot |\overline{AC}|$, akkor a jobb oldalon látható nyílhegy alakú négyszög területe és kerülete megegyezik a bal konvex négyszög megfelelő adataival igen nagy pontossággal. Ez annál inkább igaz, minél kisebb $w = |\overline{AC}|$, az ábra ez 0.1 értékű. A konvex bal négyszög pontjai nagyon közel vannak a \overline{BD} szakaszhoz, amelynek hossza másfél. Hasonlóképpen a jobb nyílhegy pontjai nagyon közel vannak egy 1 hosszúságú szakaszhoz, a \mathcal{D} környezet területének megkeresésekor nem tévedünk túl sokat, ha az ezektől a szakaszoktól maximum r távolságra levő pontok területeit keressük meg. Ez a terület pedig nyilván több lesz egy 1.5 hosszú szakasz esetében, mint egy egységszakasznál.



- (e) (ee) A válasz IGEN, mint azt a következő érvelés bizonyítja. A zöld vonalon belüli \mathcal{D} tartományt felvághatjuk az ábrán látható

darabokra:



Az A, B, C, D pontoknál elhelyezkedő korcikkek szögösszege pontosan 360° fokot ad, hiszen a korcikk szöge pl. a B pontnál azt mondja meg, hogy mennyivel kell az AB oldal irányát elforgatni ahhoz, hogy megkapjuk a BC szakasz irányát. Hasonlóan a korcikk szöge a C pontnál azt mondja meg, hogy mennyivel kell az BC oldal irányát elforgatni ahhoz, hogy megkapjuk a CD szakasz irányát. Megismételve mindezt mind a négy csúcsonál, az AB oldal összesen 360° fokot fog elforgogni.

Tehát az összterület:

$$\begin{aligned} & \text{Terület}(\mathcal{D}) \\ &= T_{ABC} + r \cdot |\overline{AB}| + r \cdot |\overline{BC}| + r \cdot |\overline{CD}| + r \cdot |\overline{DA}| + \pi r^2 \\ &= T_{ABCD} + r \cdot K_{ABCD} + \pi r^2. \end{aligned}$$

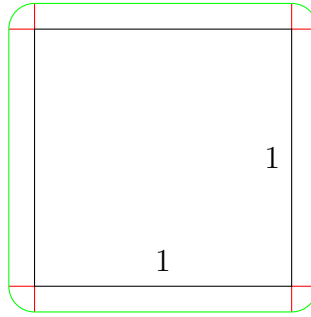
Itt T_{ABCD}, K_{ABCD} a négyszög területe és kerülete. Az érvelésünk nem függ a négyszög aktuális alakjától, tehát általánosan is igaz, nem csak az ábrán látható négyszögre.

Esetünkben

$$\text{Terület}(\mathcal{D}) = 1 + 0.1 \cdot 8 + \pi \cdot (0.1)^2 = 1.83141593 \dots$$

négyzetméterben számolva.

- (f) (ef) Mivel a $K = 4$ kerületű négyszögek közül a legnagyobb területű a négyzet, így ennek a területe $(K/4)^2 = 1$ lesz. Ez pont ugyanannyi, mint a feladatban megadott T terület, így a síkidomunk szükségszerűen egy egységnyi oldalú négyzet lesz. A \mathcal{D} tartomány a következő ábrán látható, ahol a zöld görbe határolja.



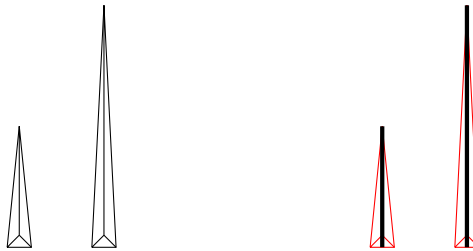
Itt a belső fekete négyzet és a külső zöld görbe távolsága $r = 0.1$. \mathcal{D} területe a belső fekete négyzet, az oldalakra emelt r vastagságú téglalapok és a négy negyed körívek területéből áll, ennek a numerikus értéke

$$\text{Terület}(\mathcal{D}) = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0.1 + 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.1^2 = 1.431415 \dots$$

négyzetméterben számolva.

- (g) (eg) A válasz: NEM.

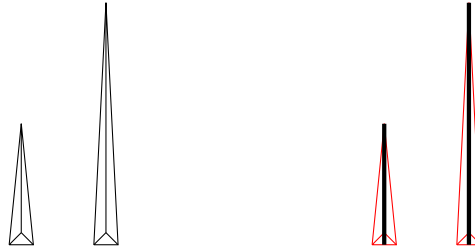
Ennek az egzakt bizonyításához pl. meg kellene konstruálni két poliédert ugyanolyan térfogattal és felülettel, de különböző térfogatú \mathcal{D} tartománnyal. Mi beérjük azzal, hogy prezentálunk két konvex testet *közelítőleg* ugyanolyan térfogattal és területtel, de százalékosan merte nagyban különböző térfogatú \mathcal{D} tartományokkal:



Itt a baloldali háromszögek közepén levő csomópont egy kissé kiemelkedik a határoló háromszögek síkjából. Így a csomópont és a határoló háromszög csucsai tetraédereket generálnak. Ezek felülete és térfogata egyaránt közel van nullához, legalábbis akkor, ha a függőleges távolságokat fixen tartjuk, de a vízszintes szélességeket nagyon közel választjuk nullához. Viszont az ábra jobb oldali részen látható tetraéderek pontjainak a távolsága nem túl sok a vastag fekete vonalakkal jelölt szakaszoktól, így majdnem mindegy, hogy a szakaszok vagy a tetraéderek környezetének a térfogatát számoljuk ki. A hosszabb vastag fekete szakasz környezete térfogata persze nagyobb, ha a szakasz hossza több, ez igen erős érv a Nemleges válaszuk mellett.

(h) (eh) A válasz: NEM.

Ennek az egzakt bizonyításához pl. meg kellene konstruálni két poliédert ugyanolyan térfogattal és felülettel, de különböző térfogatú \mathcal{D} tartománnyal. Mi beérjük azzal, hogy prezentálunk két konvex testet *közelítőleg* ugyanolyan térfogattal és területtel, de százalékosan mérve nagyban különböző térfogatú \mathcal{D} tartományokkal:

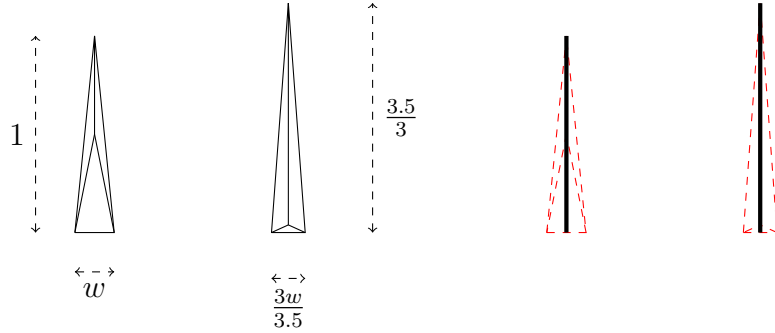


Itt a baloldali háromszögek közepén levő csomópont egy kissé kiemelkedik a határoló háromszögek síkjából. Így a csomópont és a határoló háromszög csucsai tetraédereket generálnak. Ezek területe és térfogata egyaránt közel van nullához, legalábbis akkor, ha a függőleges távolságokat fixen tartjuk, de a vízszintes szélességeket nagyon közel választjuk nullához. Viszont az ábra jobb oldali részen látható tetraéderek pontjainak a távolsága nem túl sok a vastag fekete vonalakkal jelölt szakaszoktól, így majdnem mindegy, hogy a szakaszok vagy a tetraéderek környezetének a térfogatát számoljuk ki. A hosszabb vastag fekete szakasz környezete térfogata persze nagyobb, ha a szakasz hossza több, ez igen erős érv a Nemleges válaszuk mellett.

Megjegyzés: Ennek a feladatnak a kétdimenziós megfelelőjében a válasz IGEN lenne konvex sokszögekre, de NEM lenne, ha konkáv sokszögeket is megengednénk (a poliéderek helyett).

(i) (ei) A válasz: NEM.

Ennek az egzakt bizonyításához pl. meg kellene konstruálni két ugyanolyan összéhhosszú, térfogatú és felületű konvex poliédert különböző térfogatú \mathcal{D} tartományokkal. Mi beérjük azzal, hogy prezentálunk két konvex testet *közelítőleg* ugyanolyan összéhhosszal, térfogattal és felülettel, de százalékosan mervé nagyban különböző térfogatú \mathcal{D} tartományokkal:

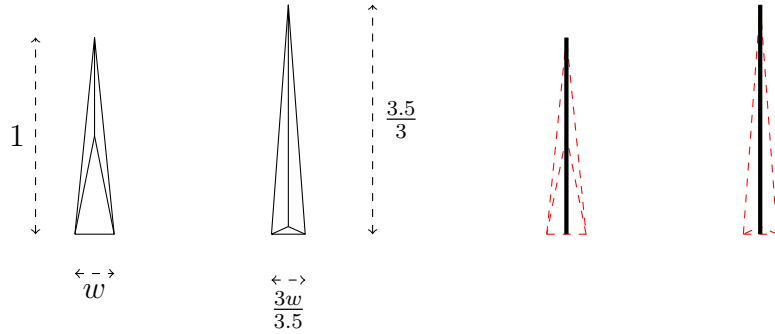


Itt a baloldali háromszögek közepén levő csomópont egy kissé kiemelkedik (h távolsággal) a határoló háromszögek síkjából. A csomópont és a határoló háromszög csúcsai tetraédereket generálnak. Feltesszük, hogy h meg az amúgy is nagyon kicsi w -hez viszonyítva is nagyon kicsi, tehát a nagyon lapos tetraéderek alig különböztethetők meg egy síkidomtól. Ezek területe és térfogata egyaránt közel van nullához, legalábbis akkor, ha az ábrán függőleges távolságokat fixen tartjuk, de a vízszintes szélességeket nagyon közel választjuk nullához. Viszont az ábra jobb oldali részen látható tetraéderek pontjainak a távolsága nem túl sok a vastag fekete vonalakkal jelölt szakaszoktól, így majdnem mindegy, hogy a szakaszok vagy a tetraéderek környezetének a térfogatát számoljuk ki. A hosszabb vastag fekete szakasz környezetének térfogata persze nagyobb, ha a szakasz hossza nagyobb ($3.5/3$ egy helyett), ez igen erős érv a Nemleges válaszunak mellett. Az ábrán az 1, illetve $3.5/3$ magasságokat és a $w \approx 0$, illetve a $3w/3.5$ magasságokat úgy választottuk meg, hogy az alacsonyabb és a magasabb tetraéderek térfogata pontosan megegyezik, továbbá a felületeik és összéhhosszaik csak igen kis százalékban térnek el egymástól.

(j) (ej) A válasz: NEM.

Ennek az egzakt bizonyításához pl. meg kellene konstruálni két ugyanolyan összéhhosszú, térfogatú és területű konvex poliédert különböző térfogatú \mathcal{D} tartományokkal. Mi beérjük azzal, hogy

prezentálunk két konvex testet *közelítőleg* ugyanolyan összehosszal, térfogattal és felülettel, de százalékosan merve nagyban különböző térfogatú \mathcal{D} tartományokkal:



Itt a baloldali háromszögek közepén levő csomópont egy kissé kiemelkedik (h távossággal) a határoló háromszögek síkjából. A csomópont és a határoló háromszög csúcsai tetraédereket generálnak. Feltesszük, hogy h meg az amúgy is nagyon kicsi w -hez viszonyítva is nagyon kicsi, tehát a nagyon lapos tetraéderek alig különböztethetők meg egy síkidomtól. Ezek területe és térfogata egyaránt közel van nullához, legalábbis akkor, ha az ábrán függőleges tagolatlanokat fixen tartjuk, de a vízszintes szélességeket nagyon közel választjuk nullához. Viszont az ábra jobb oldali részen látható tetraéderek pontjainak a távolsága nem túl sok a vastag fekete vonalakkal jelölt szakaszoktól, így majdnem mindegy, hogy a szakaszok vagy a tetraéderek környezetének a térfogatát számoljuk ki. A hosszabb vastag fekete szakasz környezetének térfogata persze nagyobb, ha a szakasz hossza nagyobb ($3.5/3$ egy helyett), ez igen erős érv a Nemleges válaszuk mellett. Az ábrán az 1, illetve $3.5/3$ magasságokat és a $w \approx 0$, illetve a $3w/3.5$ magasságokat úgy választottuk meg, hogy az alacsonyabb és a magasabb tetraéderek térfogata pontosan megegyezik, továbbá a felületeik és összehosszaik csak igen kis százalékban térnek el egymástól.

Megjegyzés: Ennek a feladatnak a kétdimenziós megfelelőjében a válasz IGEN lenne konvex sokszögekre, de NEM lenne, ha konkáv sokszögeket is megengednénk (a poliéderek helyett).

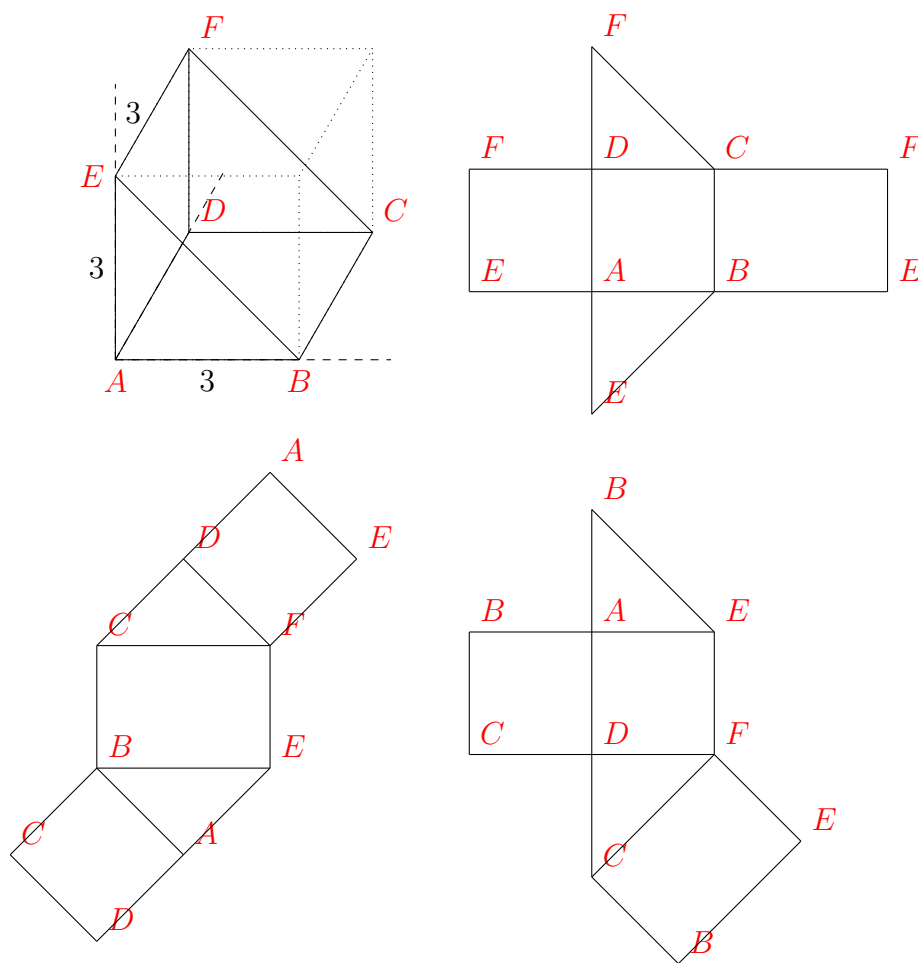
- Számszerű eredmény:**
- (a) (ea) 4,0186
 - (b) (eb) 1,8314
 - (c) (ec) 0
 - (d) (ed) 0

- (e) (ee) 1,8314
- (f) (ef) 1,4314
- (g) (eg) Nem | Igen
- (h) (eh) Nem | Igen
- (i) (ei) Nem | Igen
- (j) (ej) Nem | Igen

- Mértékegység:**
- (a) (ea) m^2
 - (b) (eb) m^2
 - (c) (ec) m^2
 - (d) (ed) m^2
 - (e) (ee) m^2
 - (f) (ef) m^2
 - (g) (eg)
 - (h) (eh)
 - (i) (ei)
 - (j) (ej)

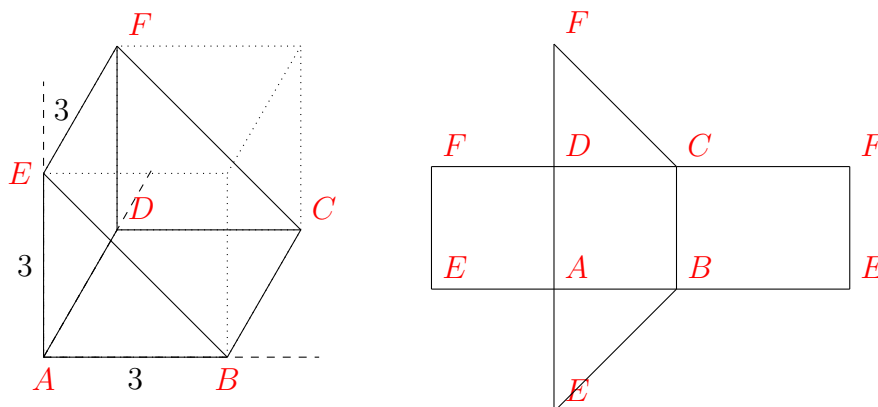
11. Kivagas.93-95

Feladat: Vegyük egy konvex poliédert (síklapokkal határolt térbeli sokszöget)! Képzeletben vágd fel a test néhány élét úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.) Ezt persze többféleképpen is meg lehet tenni, itt egy példa:



- (ea) Függ-e a kiterítés módjától az, hogy hány külső éle van az így kapott síkidomnak? Adj ellenpéldát, vagy bizonyítsd az állításodat, ne csak erre a lerajzolt poliéderre! (A feladatban pl. a bal-also ábrán a $C - D - A$ szakasz két élnek számít.)
- (eb) Függ-e a kiterítés módjától az, hogy mekkora az így kapott síkidom kerülete? Adj ellenpéldát, vagy bizonyítsd az állításodat! Nem kell feltétlenül az ábrán látható poliédert használnod!

Megoldás: (a) (ea)



A jobb oldali ábrát felépíthetjük a következőképpen.

- Vágjuk szét a térbeli poliédert az oldallapjaira. Az így kapott különálló oldallapok eleinek száma a kétszerese a térbeli test éleinek a számának.
- Vegyük pl. az $ABCD$ négyzetet, mint az első lapot. A következő lépésben ragasszuk ehhez hozzá a CB él mentén a $BEFC$ sokszöget.
- Ezután az $ABEFC$ síkidomhoz ragasszunk hozzá meg egyet a hiányzó ABE , DCF , $EADF$ lapokból.
- Ismételjük meg ezt az eljárást, addig, amíg el nem fogynak a lapok.

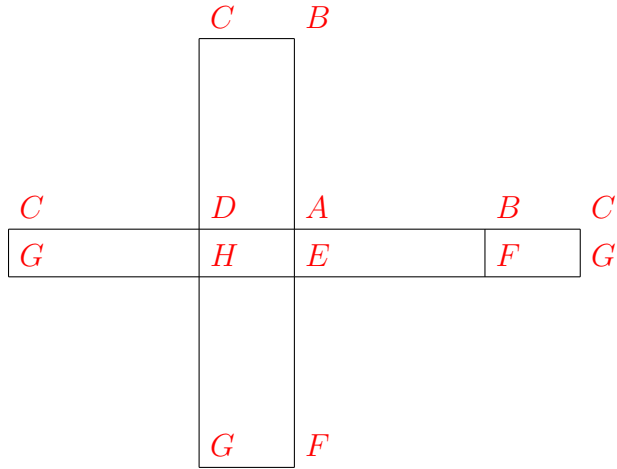
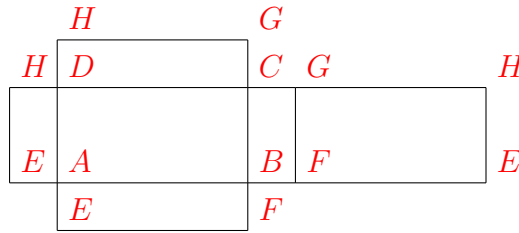
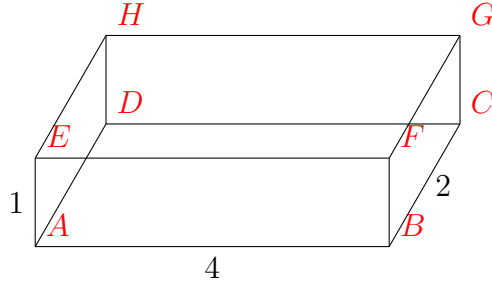
Ezt az oldallap hozzáragasztási eljárást eggyel kevesebbszer kell megismételni, mint a poliéder lapjainak a száma. Minden egyes hozzáragasztás a síkidomból belső elvesz két külső élt, így a végleges síkidom külső éleinek a száma

$$2 \cdot (\text{poliéder éleinek a száma}) - 2 \cdot (\text{poliéder lapjainak a szám} - 1).$$

Az ábrán ez az érték $2 \cdot 9 - 2 \cdot (5 - 1) = 10$. Ez az érték csak a kiindulási poliédertől függ. Tehát a kiterítés módjától független a kapott síkidom kerületén levő élek száma.

- (b) (eb) A kiterített lapokból kapott síkidom területe függ a kiterítés módjától. Itt egy példa: terítsük ki az 1, 2, 4 élhosszúságú tégl-

testet két különböző módon.



Itt már ránézésre is nagyobbnek tűnik a legalsó ábra kerülete az előzőéhez viszonyítva.

A kapott síkidomok területet megkaphatjuk úgy, hogy a test élhosszainak az összegének kétszereséből levonjuk a síkidomok belső élhosszainak a kétszeresét. Az első esetben a levonás mértéke

$$3 \cdot |\overline{AD}| + 2 \cdot |\overline{AB}| = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14,$$

míg a második esetben

$$3 \cdot |\overline{DH}| + 2 \cdot |\overline{HE}| = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7.$$

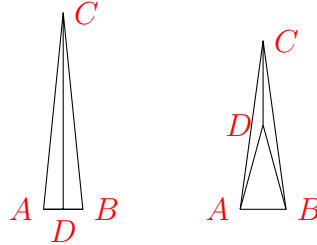
Mivel ezek nem egyenlőek, így a két síkidom kerületei különböznek.

Számszerű eredmény: (a) (ea) Nem | Igen
(b) (eb) Igen | Nem

Mértékegység:

12. KetTetraeder.96-102

Feladat: Vegyük az ábrán látható két tetraéder felülnézeti képét



A csúcspontok koordinátái a baloldali, magasabb tetraédernél legyenek

$$A = (-W, 0, 0), \quad B = (W, 0, 0), \quad C = (0, 1, 0), \quad D = (0, 0, H).$$

A csúcspontok koordinátái a jobboldali, alacsonyabb tetraédernél pedig legyenek

$$A = (-w, 0, 0), \quad B = (w, 0, 0), \quad C = (0, d, 0), \quad D = (0, d/2, h).$$

A feladatban szeretnénk meghatározni a w, h, d paramétereket úgy, hogy a két tetraédernek ugyanaz a térfogata, felülete és összélhossza legyen.

- (a) (ea) Vegyük azt az elfajult esetet, amikor $W = H = 0 = w = h$. Mennyi d , ha az így kapott degenerált tetraéderek összélhosszai megegyeznek? (Abban az értelemben, hogy az egybeeső, vagy egymást átfedő élek hosszait külön-külön figyelembe vesszük.)
- (b) (eb) Használjuk az előző pontban kapott d értéket, h ess H legyen továbbra is nulla. Mennyi λ , ha $w = \lambda W$, és a két degenerált tetraéder felülete megegyezik? (Abban az értelemben, hogy az egybeeső, vagy egymást átfedő oldallapok területeit külön-külön figyelembe vesszük.)
- (c) (ec) Használjuk az előző pontban kapott d és $w = \lambda W$ értéket. Mennyi μ , ha $h = \mu H$, és a két tetraéder térfogata megegyezik?
- (d) (ed) Legyen $W = H = 0.0001$, továbbá legyen $w = \lambda W$ és $h = \mu H$, ahol a λ, μ értéket az előző feladatokban kaptuk meg. Számold ki a bal és jobboldali tetraéderek összélhosszait, felületeit, térfogatait! Azt reméljük, hogy a jobb, illetve a baloldali tetraéderek eseten kapott értékek egymáshoz viszonyított aránya nagyon közel (mondjuk egy ezrelékes pontossággal) van egyhez. Igaz-e ez az

- i. összélhossz,
- ii. felület,
- iii. térfogat,

eseteiben? (Ha nagyon unatkozol, próbáld megtippelni előre, hogy melyik esetben bukik meg a legjobban a közelítő egyenlőség!) Add meg válaszként, hogy mennyi az egytől való eltérés abszolút értéke maximuma a három esetből ezrelékben mérve!

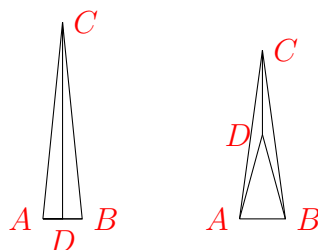
- (e) (ee) Legyen $W = 0.01$, $H = 0.0001$, továbbá legyen $w = \lambda W$ és $h = \mu H$, ahol a λ, μ értéket az előző feladatokban kaptuk meg. Számold ki a bal és jobboldali tetraéderek összélhosszait, felületeit, térfogatait. Azt reméljük, hogy a jobb, illetve a baloldali tetraéderek eseten kapott értékek egymáshoz viszonyított aránya nagyon közel (mondjuk egy ezrelékes pontossággal) van egyhez. Igaz-e ez az

- i. összélhossz,
- ii. felület,
- iii. térfogat,

eseteiben? Add meg válaszként, hogy mennyi az egytől való eltérés abszolút értéke maximuma a három esetből ezrelékben mérve!

- (f) (ef) Legyen $W = 0.1$, $H = 0.03$. Írd fel azokat az egyenleteket, amelyek meghatározzák a jobboldali tetraéder d, w, h paramétereit, ha a jobb és baloldali tetraéderek térfogata, felülete és összélhossza ugyanaz! Válaszként válaszd ki a felületre vonatkozó egyenletet!
- (g) (eg) Legyen $W = 0.1$, $H = 0.03$. Írd fel azokat az egyenleteket, amelyek meghatározzák a jobboldali tetraéder d, w, h paramétereit, ha a jobb és baloldali tetraéderek térfogata, felülete és összélhossza ugyanaz! Ezeket az egyenleteket szinte biztos, hogy csak numerikusan lehet megoldani. Próbálj keresni egy komputer algebrai programcsomagot, ami megkeresi a megoldást! (Ilyen lehet pl. a SAGE és a MAXIMA ingyenes, illetve a Mathematica és Maple kereskedelmi szoftverek.) Tehát közelítőleg mennyi d, w, h ? Válaszként add meg w értéket!

Megoldás: (a) (ea)



Ha $W = H = 0 = w = h$, akkor a baloldali ábrán az összélhossz

$$|\overline{AC}| + |\overline{DC}| + |\overline{BC}| = 3,$$

míg a jobboldali ábrán

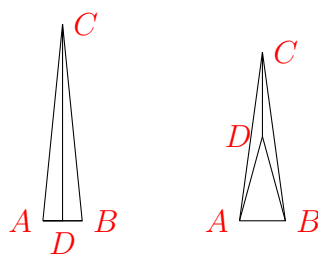
$$\begin{aligned} & |\overline{AC}| + |\overline{BC}| + |\overline{AD}| + |\overline{BD}| + |\overline{DC}| \\ &= d + d + d/2 + d/2 + d/2 = 3.5 \cdot d. \end{aligned}$$

Ezek szerint, ha $3 = 3.5 \cdot d$, akkor

$$d = \frac{3}{3.5} = 0.8571428 \dots$$

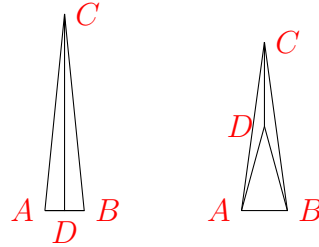
Ebben a degenerált esetben csak a szinte függőleges élek számítanak.

(b) (eb)



Ha $H = h = 0$, vagyis a D pont az ABC pontok síkjába esik, akkor a két degenerált tetraéder felülete a bal és a jobb oldalon az ABC háromszögek területének a kétszerese. A baloldalon a magasság 1, míg a jobb oldalon a magasság az előző feladat alapján $d = 3/3.5$, így ha a két felület megegyezik, akkor a jobboldali ábra AB alapja a baloldalinak a $3.5/3$ -szorosa. Lehat $\lambda = 3.5/3 = 1.1666 \dots$

(c) (ec)



Ha $d = 3/3.5$ és $w = (3.5/3)W$, akkor az ABC háromszögek területe ugyanaz a bal és a jobboldalon. Így, ha azt szeretnénk, hogy a két tetraéder térfogata megegyezzen, akkor ugyanolyan magasságúaknak kell lenniük, vagyis mivel $h = H = \mu H$, így $\mu = 1$, tehát a két tetraéder magassága (D harmadik koordinátája) megegyezik.

(d) (ed) A keresett mennyiségek kiszámításához szükségünk van a következő dolgokra:

- Legyen adott $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$. Mennyi $|\overline{PQ}|$?

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

- Legyen egy háromszög három oldala hossza a, b, c . Mennyi a háromszög területe?

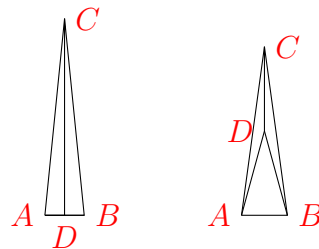
Jelöljük a háromszög kerülete felét s -sel. Ekkor a háromszög területe

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

Héron formulája szerint.

- Egy tetraéder térfogata az alaplapp területe és a magassága szorzatának a harmada. Esetünkben pl. a bal tetraédernél

$$\text{Terfogat}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \text{Terület}_{ABC} \cdot H$$



Ezekkel a képletekkel kiviszontláthatjuk a kérdéses mennyiségeket. Pl. a bal tetraédernél az ACD háromszög területet a következőképpen kapjuk meg:

$$\begin{aligned} |\overline{AC}| &= |(W, 1, 0)| = \sqrt{W^2 + 1^2} = 1.00000001 \dots \\ |\overline{AD}| &= |(W, W, 0)| = \sqrt{W^2 + W^2} = 0.000141421356 \dots \\ |\overline{CD}| &= |(0, -H, 1)| = \sqrt{H^2 + 1^2} = 1.00000001 \dots \\ s &= (|\overline{AC}| + |\overline{AD}| + |\overline{CD}|)/2 = 1.00007072 \dots \\ \text{Terület}_{ACD} &= 0.0000707106783 \dots \end{aligned}$$

Alkalmazva ezeket a típusú számolásokat a jobb és bal oldali tetraéderekre a következő eredményeket kapjuk :

	<i>bal</i>	<i>jobb</i>	$ bal/jobb - 1 $
<i>elhossz</i>	3.00048286	3.00023342	0.00008314
<i>felület</i>	0.000241431357	0.000249231745	0.03129
<i>terfogat</i>	0.3333×10^{-8}	0.3333×10^{-8}	0

A bal és jobboldali mennyiségek eltérésének a maximuma a felület esetében következik be, ott az értéké úgy 31 ezrelék. Ha a $W = H$ mennyiségeket meg sokkal kisebbre választanánk, akkor is hasonló eredményt kapnánk, ellenben az élhosszakra vonatkozó adat egyre pontosabban közelítene meg a nullát. A felület esetében a problémát az okozza, hogy a bal és a jobb ábrám pl. az AC élnél csatlakozó oldallapok más-más szöget zárnak be egymással, ez a szög a H/W aranytól fog leginkább függeni, így nem elég az, hogy H és W egyaránt kicsi, ez önmagában nem biztosítja a felületek arányának az egyhez közelítő értéket.

- (e) (ee) A keresett mennyiségek kiszámításához szükségünk van a következő dolgokra:

- Legyen adott $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$. Mennyi $|\overline{PQ}|$?

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

- Legyen egy háromszög három oldala hossza a, b, c . Mennyi a háromszög területe?

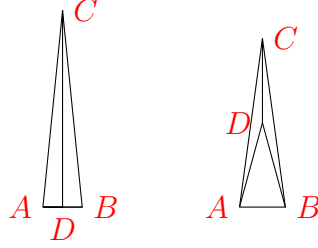
Jelöljük a háromszög kerülete felét s -sel. Ekkor a háromszög területe

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

Héron formulája szerint.

- Egy tetraéder térfogata az alaplap területe és a magassága szorzatának a harmada. Esetünkben pl. a bal tetraédernél

$$\text{Terfogat}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \text{Terület}_{ABC} \cdot H$$



Ezekkel a képletekkel kiszámíthatjuk a kérdéses mennyiségeket. Pl. a bal tetraédernél az ACD háromszög területet a következőképpen kapjuk meg:

$$\begin{aligned} |\overline{AC}| &= |(W, 1, 0)| = \sqrt{W^2 + 1^2} = 1.00005 \dots \\ |\overline{AD}| &= |(W, W, 0)| = \sqrt{W^2 + W^2} = 0.0141421356 \dots \\ |\overline{CD}| &= |(0, -H, 1)| = \sqrt{H^2 + 1^2} = 1.00000001 \dots \\ s &= (|\overline{AC}| + |\overline{AD}| + |\overline{CD}|)/2 = 1.00709607 \dots \\ \text{Terület}_{ACD} &= 0.00707102364 \dots \end{aligned}$$

Alkalmazva ezeket a típusú számolásokat a jobb és bal oldali tetraéderekre a következő eredményeket kapjuk :

	<i>bal</i>	<i>jobb</i>	$ bal/jobb - 1 $
<i>elhossz</i>	3.040101	3.02380969	0.0053876775
<i>felület</i>	0.0200015	0.0200007349	0.000038254
<i>terfogat</i>	0.3333×10^{-6}	0.3333×10^{-6}	0

A bal és jobboldali mennyiségek eltérésének a maximuma az összérlhossz esetében következik be, ott az értékek úgy 5 ezrelék.

Mindkét tetraéderünk olyan, hogy kicsi a szélessége (az AB elhossza viszonyítva mondjuk AC -hez), továbbá a tetraéderek nagyon laposak, abban az értelemben, hogy a D pontnak a $H = h$ kiemelkedése az ABC oldallap síkjából meg az amúgy is csekély szélességhez viszonyítva sem túl sok. Így a tetraéderek mindkét

esetben olyan laposak, hogy alig lehet őket megkülönböztetni az ABC háromszögektől.

Azt mondhatjuk, hogy ha W értéket egyre kisebbre választjuk, továbbá ügyelünk arra, hogy H értéket úgy válasszuk meg, hogy a H/W hányados is egyre közelebb kerüljön a nullához, akkor a bal és jobboldali tetraéderek esetében a $|bal/jobb - 1|$ mennyiségek egyre jobban meg fogják közelíteni nullát.

(f) (ef) A feladat megoldásához szükségünk van a következő dolgokra:

- Legyen adott $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$. Mennyi $|\overline{PQ}|$?

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

- Legyen egy háromszög három oldala hossza a, b, c . Mennyi a háromszög területe?

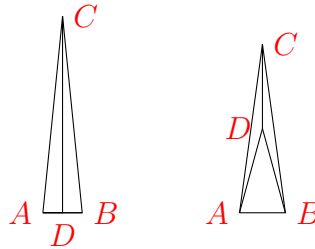
Jelöljük a háromszög kerülete felét s -sel. Ekkor a háromszög területe

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

Héron formulája szerint.

- Egy tetraéder térfogata az alaplapp területe és a magassága szorzatának a harmada. Esetünkben pl. a bal tetraédernél

$$\text{Terfogat}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \text{Terület}_{ABC} \cdot H$$



Ezekkel a képletekkel kiszámíthatjuk a kérdéses mennyiségeket. Pl. a bal tetraédernél az ACD háromszög területét a következőképpen kapjuk meg:

$$|\overline{AC}| = |(W, 1, 0)| = \sqrt{W^2 + 1^2} = 1.00498756 \dots$$

$$|\overline{AD}| = |(W, W, 0)| = \sqrt{W^2 + W^2} = 0.141421356 \dots$$

$$|\overline{CD}| = |(0, -H, 1)| = \sqrt{H^2 + 1^2} = 1.0004499 \dots$$

$$s = (|\overline{AC}| + |\overline{AD}| + |\overline{CD}|)/2 = 1.07342941 \dots$$

$$\text{Terület}_{ACD} = 0.0706899878 \dots$$

Ilyen típusú számítások eredményeképpen megkaphatjuk a bal oldali tetraéder (összélhosszat, felületet, térfogatát) :

$$(3.41923115\dots, 0.207446158\dots, 0.001).$$

Ezeket a mennyiségeknek meg kell egyezniük a jobboldali, d, w, h paraméterekkel jellemzett tetraédernél hasonló adataival.

$$\begin{aligned} & 3.41923115\dots \\ &= 2\sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2 + w^2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2} + 2\sqrt{d^2 + w^2} + 2w \\ & 0.207446158\dots \\ &= \frac{1}{2} \left(w\sqrt{d^2 + 4h^2} + \sqrt{d^2(4h^2 + w^2) + 4h^2w^2} + 2dw \right) \\ & 0.001 = \frac{dhw}{3} \end{aligned}$$

Tipikusan három egyenlet meghatározza a három ismeretlent, persze lehet hogy több megoldás is van mint az pl. a másodfokú egyenletek esetében is gyakran előfordul. Persze abszolút semmi garancia nincs arra, hogy az egyenletrendszernek lesz valós megoldása.

(g) (eg) A feladat megoldásához szükségünk van a következő dolgokra:

- Legyen adott $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$. Mennyi $|\overline{PQ}|$?

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

- Legyen egy háromszög három oldala hossza a, b, c . Mennyi a háromszög területe?

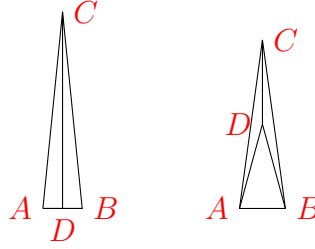
Jelöljük a háromszög kerülete felét s -sel. Ekkor a háromszög területe

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

Héron formulája szerint.

- Egy tetraéder térfogata az alaplapp területe és a magassága szorzatának a harmada. Esetünkben pl. a bal tetraédernél

$$\text{Térfogat}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \text{Terület}_{ABC} \cdot H$$



Ezekkel a képletekkel kiszámíthatjuk a kérdéses mennyiségeket. Pl. a bal tetraédernél az ACD háromszög területet a következőképpen kapjuk meg:

$$\begin{aligned} |\overline{AC}| &= |(W, 1, 0)| = \sqrt{W^2 + 1^2} = 1.00498756 \dots \\ |\overline{AD}| &= |(W, W, 0)| = \sqrt{W^2 + W^2} = 0.141421356 \dots \\ |\overline{CD}| &= |(0, -H, 1)| = \sqrt{H^2 + 1^2} = 1.0004499 \dots \\ s &= (|\overline{AC}| + |\overline{AD}| + |\overline{CD}|)/2 = 1.07342941 \dots \\ \text{Terület}_{ACD} &= 0.0706899878 \dots \end{aligned}$$

Ilyen típusú számítások eredményeképpen megkaphatjuk a bal oldali tetraéder (összélhosszat, felületet, térfogatát) :

$$(3.41923115 \dots, 0.207446158 \dots, 0.001).$$

Ezeket a mennyiségeknek meg kell egyezniük a jobboldali, d, w, h paraméterekkel jellemzett tetraédernél hasonló adataival.

$$\begin{aligned} &3.41923115 \dots \\ &= 2\sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2 + w^2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2} + 2\sqrt{d^2 + w^2} + 2w \\ &0.207446158 \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(w\sqrt{d^2 + 4h^2} + \sqrt{d^2 (4h^2 + w^2) + 4h^2 w^2} + 2dw \right) \\ &0.001 = \frac{dhw}{3} \end{aligned}$$

Tipikusan három egyenlet meghatározza a három ismeretlent, persze lehet hogy több megoldás is van, mint az pl. a másodfokú egyenletek esetében is gyakran előfordul. Persze abszolút semmi garancia nincs arra, hogy az egyenletrendszernek lesz valós megoldása.

Nemlineáris tömbismeretlenes egyenletrendszerek összes megoldásának a megkeresése általában elég bonyolult, ha egyáltalán praktikusan lehetséges. Ha viszont van egy ésszerű tippünk az általunk keresett megoldás közelítő pozíciójára, akkor nagyon effektív numerikus módszerek állnak a rendelkezésünkre. Nekünk a

$$d = 3/3.5, \quad w = 0.1 \cdot (3.4/3), \quad h = .03$$

egy viszonylag ésszerű tipp lenne. Ebből a kiindulási pontból megtalálható a megoldás közelítő értéke.

Persze az ilyen típusú numerikus számításokat számítógéppel érdemes elvégezni. Pl. a SAGE ingyenes komputer algebrai programcsomagban ez így nézhetne ki:

```
var('W H h d');
A=vector([-W,0,0]); B=vector([W,0,0]); C=vector([0,1,0]); D=vector([0,0,H]);
a=vector([-w,0,0]); b=vector([w,0,0]); c=vector([0,e,0]); d=vector([0,e/2,h]);

def hossz(v): return sqrt(v[0]^2+v[1]^2+v[2]^2)

AB=hossz((A-B)); AC=hossz((A-C)); AD=hossz((A-D)); BC=hossz((B-C)); BD=hossz((B-D)); CD=hossz((C-D));
ab=hossz((a-b)); ac=hossz((a-c)); ad=hossz((a-d)); bc=hossz((b-c)); bd=hossz((b-d)); cd=hossz((c-d));

def t(p,q,r):
    s=(p+q+r)/2
    return sqrt((s*(s-p)*(s-q)*(s-r)))

Elhossz=AB+AC+AD+BC+BD+CD
elhossz=ab+ac+ad+bc+bd+cd
Felulet=t(AB,AC,BC)+t(AB,AD,BD)+t(BC,BD,CD)+t(AD,AC,CD)
felulet=t(ab,ac,bc)+t(ab,ad,bd)+t(bc,bd,cd)+t(ad,ac,cd)
Terfogat=t(AB,AC,BC)*H/3
terfogat=t(ab,ac,bc)*h/3

EFT=[Elhossz.subs({W:0.1},{H:0.03}), Felulet.subs({W:0.1},{H:0.03}), Terfogat.subs({W:0.1},{H:0.03})]
eft=[elhossz,felulet,terfogat]

f=(eft[0]-EFT[0])^2+(eft[1]-EFT[1])^2+(eft[2]-EFT[2])^2
var('x y z')
minimize(f.subs({w:x},{h:y},{e:z}),[0.1*3.5/3, 0.03, 3/3.5],algorithm="simplex")
```

(A kódban e -vel jelöltük a feladatban szereplő d paramétert.) Ezek a parancsok a tetraéder d, w, h paramétereire

$$(w, h, d) = (0.111312, 0.02980, 0.90084)$$

értékeket produkálnak. Az utolsó *minimize* parancs minimalizálni próbálja az

$$\text{eft}[0] - \text{EFT}[0] = 0, \quad \text{eft}[1] - \text{EFT}[1] = 0, \quad \text{eft}[2] - \text{EFT}[2] = 0$$

egyenletek hibáját. Sajnos SAGE elég gyenge támogatást nyújt a tömbismeretlenes nemlineáris egyenletek megoldásához, ideálisan a

$$\text{solve}([\text{eft}[0] - \text{EFT}[0] = 0, \text{eft}[1] - \text{EFT}[1] = 0, \text{eft}[2] - \text{EFT}[2] = 0], w, d, h)$$

parancs megadna a numerikus megoldásokat.

A kereskedelmi Mathematica program ebből a szempontból jobban teljesít (persze ∞ -szer drágább is), itt a fenti kód részletei a következők lehetnének (itt egy csomó, az előzőekhez hasonló sort kihagytunk, ezeket jelölik a (*....*) kommentárok):

```

A={-W,0,0} (*....*)
hossz[v_]:=Sqrt[ v[[1]]^2+v[[2]]^2+v[[3]]^2 ]
AB=A-B (*....*)
t[p_.,q_.,r_]:=Module[{s=(p+q+r)/2},
  Return[Sqrt[s(s-p)(s-q)(s-r)]]
]
Elhossz=AB+AC+AD+BC+BD+CD (*....*)
eq1= 0==Elhossz/.{W->0.1,H->0.03} (*....*)
FindRoot[{eq1, eq2, eq3}, {{d, (3/3.5)}, {w, W*(3.5/3)}, {h, H}}]

```

Ezek a parancsok a tetraéder w, h, d paramétereire

$$(w, h, d) = (0.11124945, 0.0299336783, 0.900872385)$$

értékeket produkálnak.

Nemlineáris egyenletrendszereknek sokszor több megoldása van akkor is, ha az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik (gondoljunk csak a másodfokú egyenletre). Itt ezekből csak egyet találtunk meg, azt amelyik közel esik a

$$d = 3/3.5, \quad w = W \cdot (3.5/3), \quad h = H$$

közelítő megoldáshoz.

Számszerű eredmény: (a) (ea) 0,8571
 (b) (eb) 1,1667
 (c) (ec) 1
 (d) (ed) 31
 (e) (ee) 5
 (f) (ef)

$$0.2074 = \frac{1}{2} \left(w\sqrt{d^2 + 4h^2} + \sqrt{d^2 (4h^2 + w^2) + 4h^2 w^2} + 2dw \right)$$

|

$$0.2074 = \frac{1}{4} \left(w\sqrt{d^2 + 4h^2} + \sqrt{d^2 (4h^2 + w^2) + 4h^2 w^2} + 2dw \right)$$

|

$$0.2074 = \frac{1}{2} \left(w\sqrt{d^2 + 2h^2} + \sqrt{d^2 (4h^2 + w^2) + 4h^2 w^2} + 2dw \right)$$

|

$$0.2074 = \frac{1}{4} \left(w\sqrt{d^2 + 2h^2} + \sqrt{d^2 (4h^2 + w^2) + 4h^2 w^2} + 2dw \right)$$

|

$$0.2074 = \frac{1}{2} \left(w\sqrt{d^2 + 4h^2} + \sqrt{d^2 (2h^2 + w^2) + 4h^2 w^2} + 2dw \right)$$

(g) (eg) 0,02993

Mértékegység: (a) (ea)

(b) (eb)

(c) (ec)

(d) (ed) ezrelék

(e) (ee) ezrelék

(f) (ef)

(g) (eg)

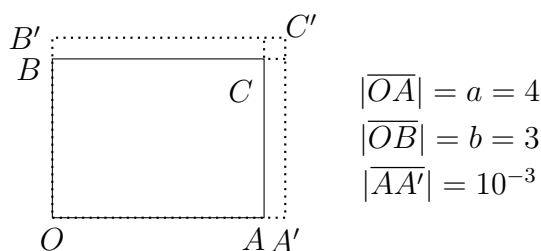
13. NovekvoTeglaLapTest.103-105

- Feladat:** (a) (ea) Legyen egy téglalap két éle $a = 3$, $b = 4$ méter hosszú. Ennek a kerülete 14 m , területe pedig 12 m^2 . Növeljük meg mindkét élt egy milliméterrel, vagyis 10^{-3} m -vel. Mennyivel nőtt a terület? Gondolkozz el azon is, hogy ha csak egy ezredes pontossággal számolunk, mi közé az eredménynek 14 -hez, vagyis az eredeti kerülethez?
- (b) (eb) Legyen egy téglalap három éle $a = 3$, $b = 4$ és $c = 6$ méter hosszú. Ennek a felülete 108 m^2 , térfogata pedig 72 m^3 . Növeljük meg mindhárom élt egy milliméterrel, vagyis 10^{-3} m -vel. Mennyivel nőtt a térfogat? Gondolkozz el azon is, hogy ha ezredes pontossággal számolunk, mi köze az eredménynek 108 -hoz, vagyis az eredeti területhez?

Megoldás: (a) (ea) A területváltozás:

$$\begin{aligned}(3 + 10^{-3}) \cdot (4 + 10^{-3}) - 3 \cdot 4 &= (3 + 4) \cdot 10^{-3} + (10^{-3})^2 \\ &= 0.007001 \approx 0.007 = 7 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Ennek a geometriai magyarázata:

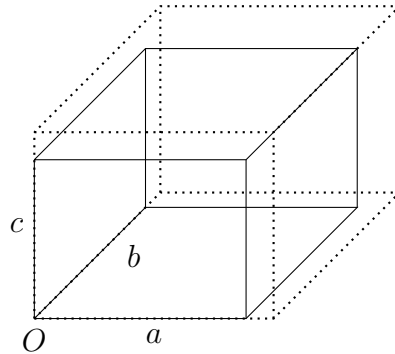


Az ábrán a téglalap területének a növekedését nagyrészt az \overline{AC} és \overline{BC} oldalakhoz csatlakozó 10^{-3} szélességű keskeny téglalapok okozzák, ezekhez képest a meg hiányzó, a C és C' pontokat tartalmazó, $(10^{-3})^2$ területű négyzet elhanyagolható. Tehát a terület növekménye közelítőleg a *kerület* fele (azaz $14/2 = 7$) megszorozva 10^{-3} -mal.

Megjegyzés: Akik már tanultak a deriváltról, azok felismerhetik a területváltozás kiszámításában a lineáris approximáció elvét, miszerint ha x elegendően kicsiny, akkor

$$\begin{aligned}f(x) &\approx f(0) + f'(0)x \quad \text{vagy} \quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \\ f(x) &= (3 + x)(4 + x) = x^2 + 7x + 12, \quad f'(x) = 2x + 7, \\ f(0) &= 12, \quad f'(0) = 7, \\ f(x) &\approx 12 + 7x, \quad f(x) - f(0) \approx 7x.\end{aligned}$$

(b) (eb)



A síkbeli feladathoz hasonlóan a térfogat növekménye közelítőleg az eredeti téglatest *felületének* a fele megszorozva 10^{-3} -mal, vagyis $(108/2) \cdot 10^{-3} = 0.054$. (Hiszen a növekmény nagy része az eredeti téglatest három különböző oldallapjára csatlakozó vékony, 10^{-3} magasságú téglákból származik.) Ezt összehasonlíthatjuk a pontos numerikus értékkel:

$$3.001 \cdot 4.001 \cdot 6.001 - 3 \cdot 4 \cdot 6 = 0.054013001$$

Számszerű eredmény: (a) (ea) 0,007

(b) (eb) 0,054

Mértékegység: (a) (ea) m^2

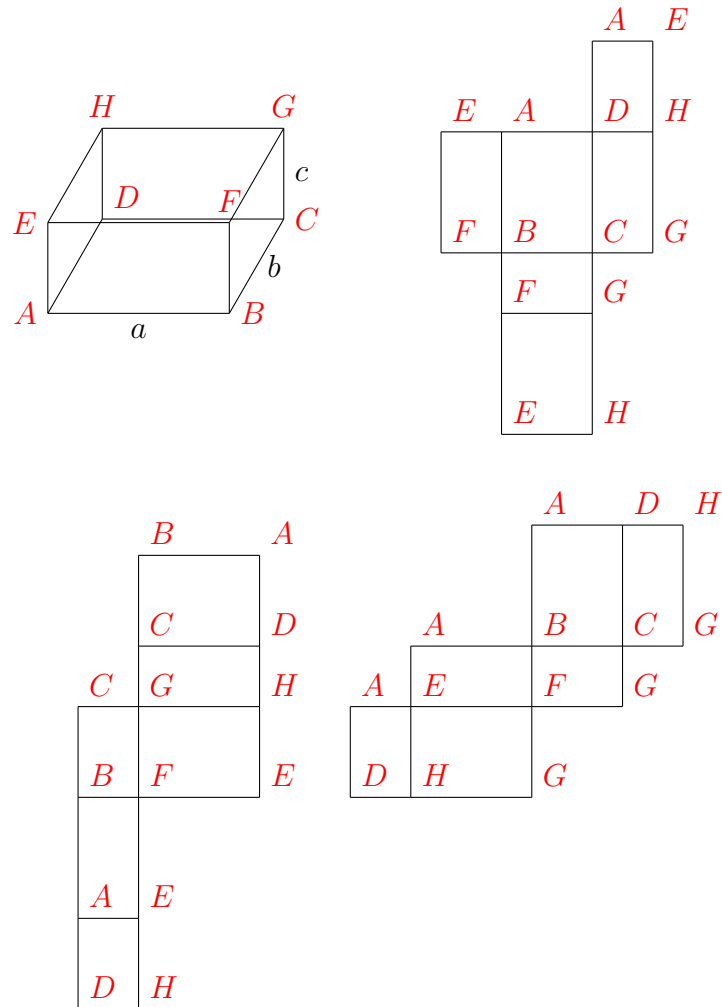
(b) (eb) m^3

14. KivagasTeruletTerfogatTegla.106-112

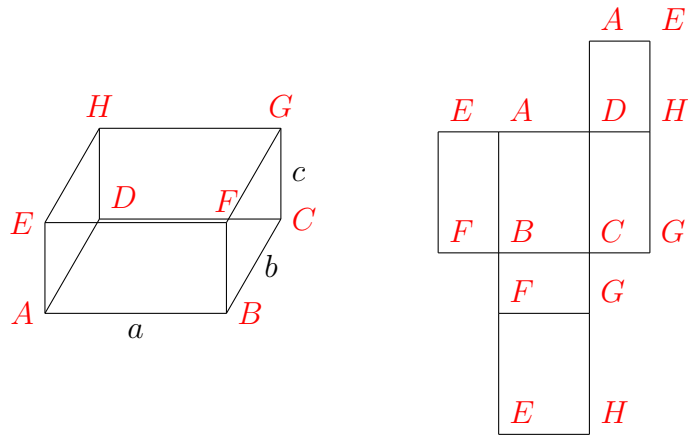
Feladat: Legyen egy téglatest három éle $a = 4$, $b = 3$ és $c = 2$ méter hosszú. Rajzold le a téglatestet! Képzeletben vágd fel a téglatest néhány élét úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.)

- (a) (ea) Rajzolj le legalább három különböző ilyen fajta síkidomot! Hány külső éle lesz az így kapott síkidomnak? Ha a válasz függ a kiterítés módjától, akkor a válasz legyen 0!
- (b) (eb) Rajzolj le egy ilyen fajta síkidomot! Mekkora a téglatest felülete?
- (c) (ec) Mekkora a téglatest térfogata?

Megoldás: (a) (ea) Például:



(b) (eb)



A felület

$$\text{Felület} = 2(ab + bc + ac) = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = 52,$$

négyzetméterben számolva.

(c) (ec)

$$\text{Térfogat} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24,$$

köbméterben számolva.

Számszerű eredmény: (a) (ea) 14

(b) (eb) 52

(c) (ec) 24

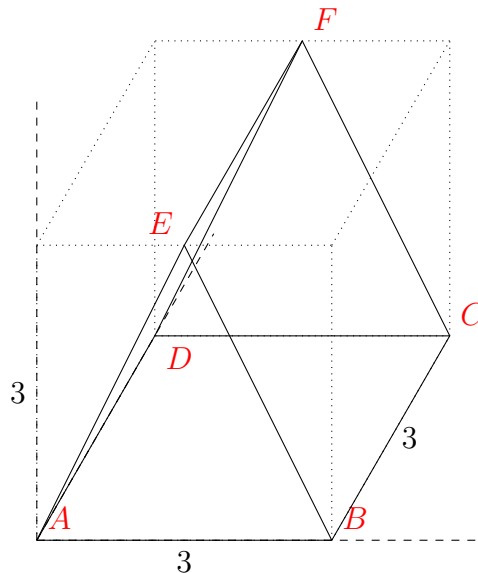
Mértékegység: (a) (ea)

(b) (eb) m²

(c) (ec) m³

15. KivagasTeruletTerfogatEk.113-120

Feladat: Vegyük a következő poliédert (síklapokkal határolt térbeli sokszöget), a távolságokat méterben merve!

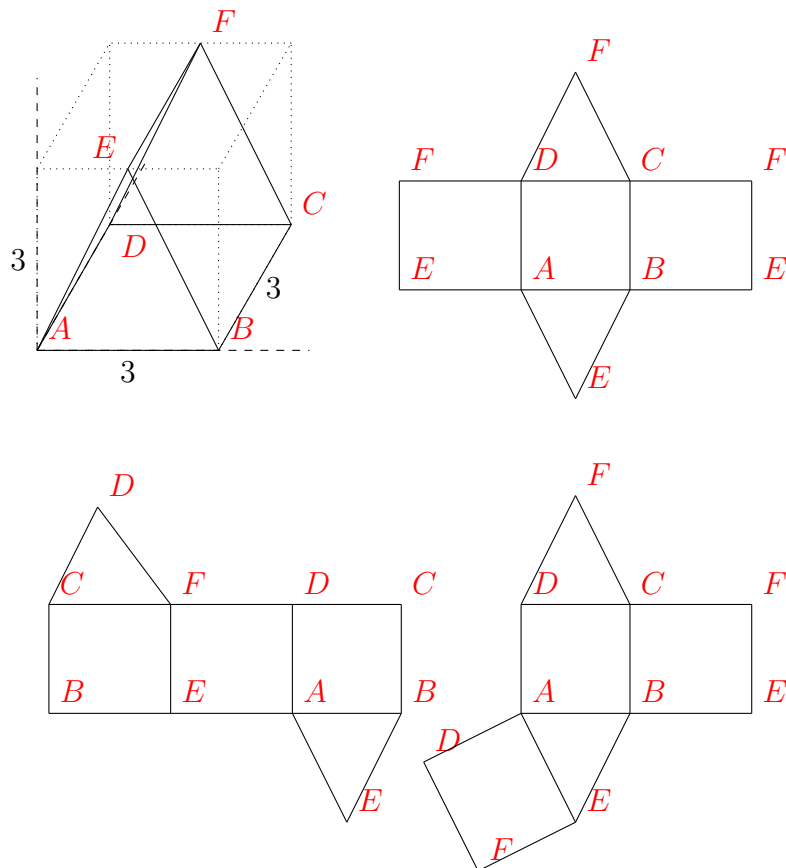


Képzeletben vágd fel a test néhány élet úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.)

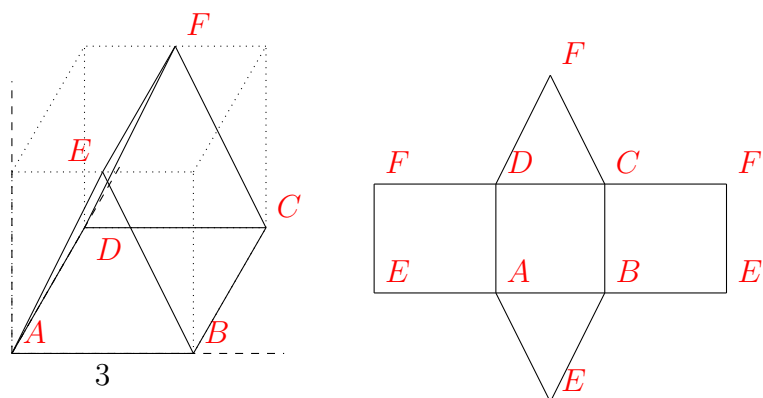
- (ea) Hogy hívják ezt a testet? Rajzolj le legalább három különböző ilyen fajta síkidomot!
- (eb) Mekkora a felülete a testnek?
- (ec) Mekkora a test térfogata?
- (ed) Tegyük fel, hogy a test tömör beton, aminek az anyagköltsége 20 Forint literenként. Továbbá az alaplapot leszámítva fessük be a test lapjait 2 mm vastagon egy olyan festékkal, aminek litere 4000 Forint. Mennyi lenne így az anyagköltség?

Megoldás: (a) (ea) A test egy hasáb, aminek az alapja (vagy teteje) az ABE vagy a DCF háromszög.

Például:



(b) (eb) Felület:



Listázzuk a test oldalapjainak a területet (a továbbiakban méter-

ben merte a hosszúságokat):

$$\begin{aligned} ABCD &: 3^2, \\ AEB, DCF &: \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3, \\ BEFC, ADFE &: 3 \cdot \sqrt{3^2 + 1.5^2} \end{aligned}$$

Így a felület

$$3^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \right) + 2 \cdot \left(\sqrt{3^2 + 1.5^2} \right) = 18 + 9\sqrt{5} = 38.1246$$

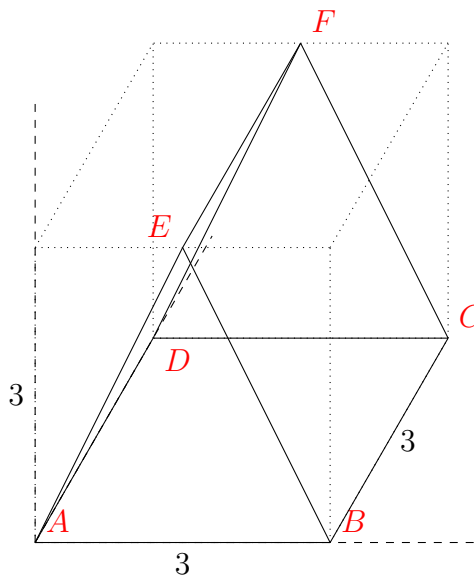
négyszetméter.

(c) (ec)

Térfogat: A hasáb háromszög alakú ABE alapja $(3 \cdot 3)/2$ területű, az AD magasság 3, így a térfogat

$$((3 \cdot 3)/2) \cdot 3 = 27/2 = 13.5 \text{ köbméter.}$$

(d) (ed)



A hasáb háromszög alakú ABE alapja $(3 \cdot 3)/2$ területű, az AD magasság 3, így a térfogat

$((3 \cdot 3)/2) \cdot 3 = 27/2 = 13.5$ köbméter. Mivel 1 köbméter=1000 liter így a beton anyagköltsége

$$13.5 \cdot 1000 \cdot 20 = 270000$$

forint. A kifestendő oldalak területe:

$$\begin{aligned} AEB, DCF &: \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3, \\ BEFC, ADFE &: 3 \cdot \sqrt{3^2 + 1.5^2}, \\ \text{összesen:} & 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3^2 + 1.5^2} \\ &= 29.1246 \end{aligned}$$

négyszetméter. Mivel ezt a felületet 2 mm = 0.002 m vastagon kell bemázolni, így összesen

$$29.1246 \text{ m}^2 \cdot 0.002 \text{ m} = 29.1246 \cdot 0.002 \cdot 1000 \text{ liter} = 58.2492 \text{ liter}$$

festékre lesz szükségünk (hiszen 1000 liter = 1 m³). Így a festek 58.2492 · 4000 = 232997 Forintba kerül. Tehát az anyagköltség 270000 + 232997 = 502997 Forint.

Számszerű eredmény: (a) (ea) 10
(b) (eb) 38,1246
(c) (ec) 13,5
(d) (ed) 502997 | 503997 | 402997 | 602997 | 501997

Mértékegység: (a) (ea)
(b) (eb) m²
(c) (ec) m³
(d) (ed) Forint

16. TéglaSzamTaniSor.121-123

- Feladat:** (a) (ea) Egy téglatest három élének a hosszai számtani sorozatot alkotnak, ahol két szomszédos elem különbsége 50 cm. Ha a téglatest felülete 1.66 m^2 , akkor akkor hány cm^3 a térfogata?
- (b) (eb) Egy téglatest három élének a hosszai számtani sorozatot alkotnak, ahol két szomszédos elem különbsége 2 m. Továbbá tudjuk, hogy az élek hosszai egész számok méterben merve.
- A) Ha a téglatest térfogata 105 m^3 , akkor akkor hány m^2 a felülete?
- B) Mielőtt megoldanád az A) feladatot, próbáld meg explicit számítások nélkül megmondani, hogy hány megoldása lehet ennek a feladatnak!

Megoldás: (a) (ea) A három él és a tégl felülete:

$$a = x, \quad b = x + 50, \quad c = x + 100, \\ \text{felület} = 2(ab + bc + ac) = 10000 + 600x + 6x^2.$$

Mivel $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$, így

$$10000 + 600x + 6x^2 = 16600 \implies x = 10 \text{ vagy } x = -110.$$

A negatív megoldás nem elfogadható, mivel az élhossznak pozitívnak kell lennie, így az élek hosszai és a térfogat:

$$a = 10, \quad b = 60, \quad c = 110, \\ \text{terfog} = abc = 66000,$$

centiben, illetve köbcentiben merve.

- (b) (eb) A) A három él és a tégl térfogata:

$$a = x, \quad b = x + 2, \quad c = x + 4, \\ \text{térfogat} = abc = x(x + 2)(x + 4) = 8x + 6x^2 + x^3.$$

Így

$$8x + 6x^2 + x^3 = 105 \implies x^3 + 6x^2 + 8x - 105 = 0.$$

Sajnos a harmadfokú egyenlet megoldóképlete igen komplikált, így helyette azt használjuk, hogy x egész szám és $x(x+2)(x+4) = 105$, vagyis x , $x + 2$, $x + 4$ mindegyike osztja 105-nek. 105 osztói:

$$1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.$$

Ebben a sorozatban két szomszédos különbsége 2 az első négy tagnál (továbbá máshol ennél nagyobb), így az élek hossza

$$1, 3, 5 \quad \text{vagy} \quad 3, 5, 7.$$

Az első esetben a térfogat 15 lenne, így az élek hossza 3, 5, 7. A téglalap felülete:

$$\text{felület} = 2(ab + bc + ac) = 142$$

négyzetméterben mervé.

B) Legyen $f(x) = x(x+2)(x+4)$. Mi az $f(x) = 105$ egyenlet megoldását keressük az $x > 0$ pozitív félegyenesen. Itt $f(x)$ szigorúan monoton növekvő, az értéke $x = 0$ -nál $f(0) = 0$, továbbá tetszőleges nagy értékeket is felvehet, így $f(x)$ folytonos gráfja csak egyszer metszheti az $y = 105$ szintvonalat. Tehát a megoldások száma biztosan 1. (Egy tetszőleges harmadfokú egyenletnek lehetne három gyöke is.) Ez persze nem egy szigorú matematikai bizonyítás, pl. nem definiáltuk, hogy mi is a *folytonosság* jelentése.

Megjegyzés: Nemlineáris egyenletek csak ritkán oldhatóak meg egzaktul, és ilyenkor is sokszor a megoldás meglehetősen komplikált. A gyakorlatban sokszor célszerű számítógépet és szimbolikus algebrai programcsomagokat használni ilyen célra. Például a harmadfokú egyenletünk megoldása így nézne ki a SAGE (ingyenes) programban:

```
solve(x*(x+2)*(x+4) == 105, x);
find_root(x*(x+2)*(x+4) == 105, 0, 10);
```

Itt a második parancs a megoldást a $[0, 10]$ intervallumban keresne numerikusan, míg az első megpróbálna megkeresni a pontos, szimbolikus megoldást. Ugyanez a Mathematica (kereskedelmi) programban:

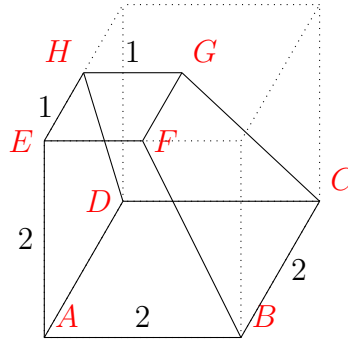
```
Solve[x*(x+2)*(x+4) == 105, x]
NSolve[x*(x+2)*(x+4) == 105, x]
```

Számszerű eredmény: (a) (ea) 66000
(b) (eb) 142 ; 1

Mértékegység: (a) (ea) cm^3
(b) (eb) m^3 ;

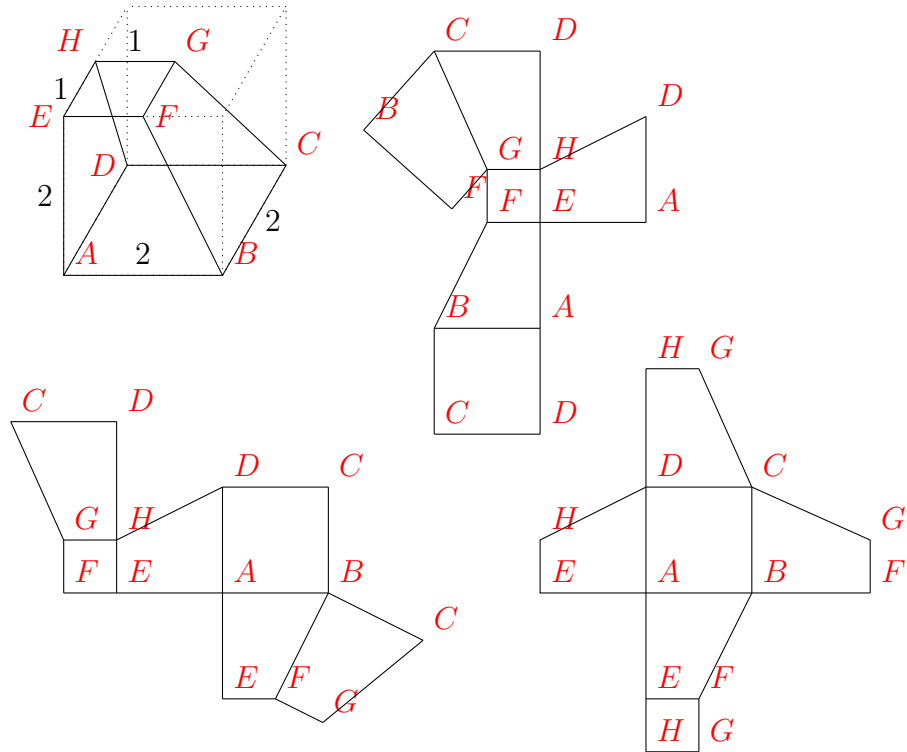
17. KivagasTeruletTerfogatCsonkaGula.124-130

Feladat: Vegyük a következő poliédert (síklapokkal határolt térbeli sokszöget)!

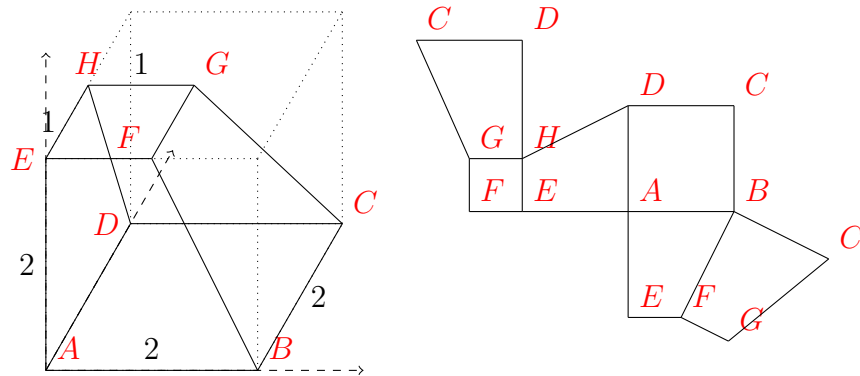


- (a) (ea) Képzeletben vágd fel a test néhány élet úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.) Rajzolj le legalább három különböző ilyen fajta síkidomot! Hány külső éle lesz az így kapott síkidomnak? Ha a válasz függ a kiterítés módjától, akkor a válasz legyen 0!
- (b) (eb) Képzeletben vágd fel a test néhány élet úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.) Rajzolj le egy így kapott síkidomot! Mekkora a felülete a testnek?
- (c) (ec) A) Milyen magasságban lenne az a O pont ahol az AE , BF , CG és a DH élek egyenesei találkoznak? Magyarázd meg, hogy miért találkoznak ezek az egyenesek egy pontban!
 B) Mekkora lenne az $ABCDO$ gúla (itt $ABCD$ az alaplapp) térfogata?
 C) Mekkora az $ABCDEFGH$ test térfogata?

Megoldás: (a) (ea) Például:



(b) (eb)



Listázzuk a különböző lapok felületeit!

$$\begin{aligned} ABCD : & 2^2, \\ EFGH : & 1^2, \\ ADHE, ABFE : & 2 \cdot \frac{2+1}{2}, \\ BCGF, DCGH : & \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \frac{2+1}{2}. \end{aligned}$$

Itt $ABCD, EFGH$ négyzetek, míg a többi oldal trapéz. A trapézok területe a magasságuk megszorozva az alapel és a fedőél hosszainak az átlagával. Pl. a $BCGF$ trapéz területe kiszámításához szükséges adatok:

$$\begin{aligned} \text{alapel, fedőél: } & |\overline{BC}| = 2, |\overline{FG}| = 1, \\ \text{magasság: } & |\overline{BF}| = \sqrt{1^2 + 2^2} \end{aligned}$$

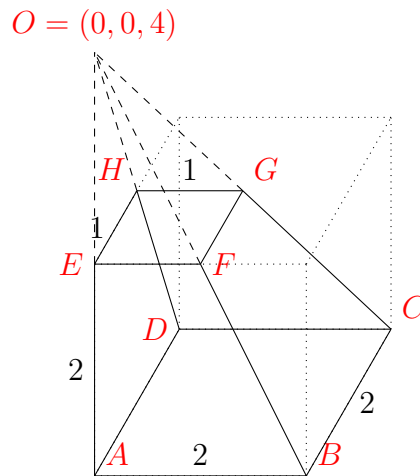
mivel

$$|\overline{BF}| = |(1, 0, 2) - (2, 0, 0)| = |(-1, 0, 2)| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2}.$$

Így a test felülete

$$\begin{aligned} & 2^2 + 1^2 + 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{2+1}{2} \right) + 2 \cdot \left(\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \frac{2+1}{2} \right) \\ & = 11 + 3\sqrt{5} = 17.7082 \end{aligned}$$

(c) (ec) A)



A kérdéses egyenesek azért találkoznak egyetlen O pontban, mert az $ABCD$ és a $EFGH$ vízszintesen elhelyezkedő négyzetek eleve hasonlóak (mivel két négyzet mindig hasonló egymással), és a megfelelő oldalaik párhuzamosak. mivel

$$|\overline{EF}| : |\overline{AB}| = |\overline{OE}| : |\overline{OA}| = 1 : 2,$$

így $|\overline{OE}| = 2$, vagyis $O = (0, 0, 4)$.

B) Az $OABCD$ gúla térfogata:

$$\text{terfogat} = \frac{\text{alapterület} \cdot \text{magassag}}{3} = \frac{2^2 \cdot 4}{3} = 5.3333$$

C) A kisebbik $OEFGH$ gúla térfogata pedig

$$\frac{\text{alapterület} \cdot \text{magassag}}{3} = \frac{1^2 \cdot 4}{3}.$$

Tehát a testünk térfogata a két gúla térfogatának a különbsége, vagyis

$$\frac{2^2 \cdot 4}{3} - \frac{1^2 \cdot 4}{3} = 4.$$

Számszerű eredmény: (a) (ea) 14

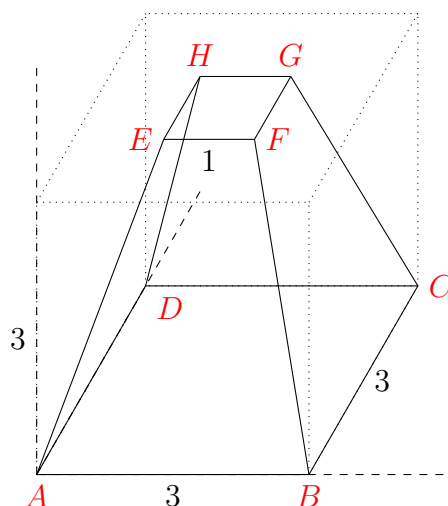
(b) (eb) 17,7082

(c) (ec) 4 ; 5,3333 ; 4

Mértékegység:

18. KivagasTerületTerfogatCsonkaGulaII.131-137

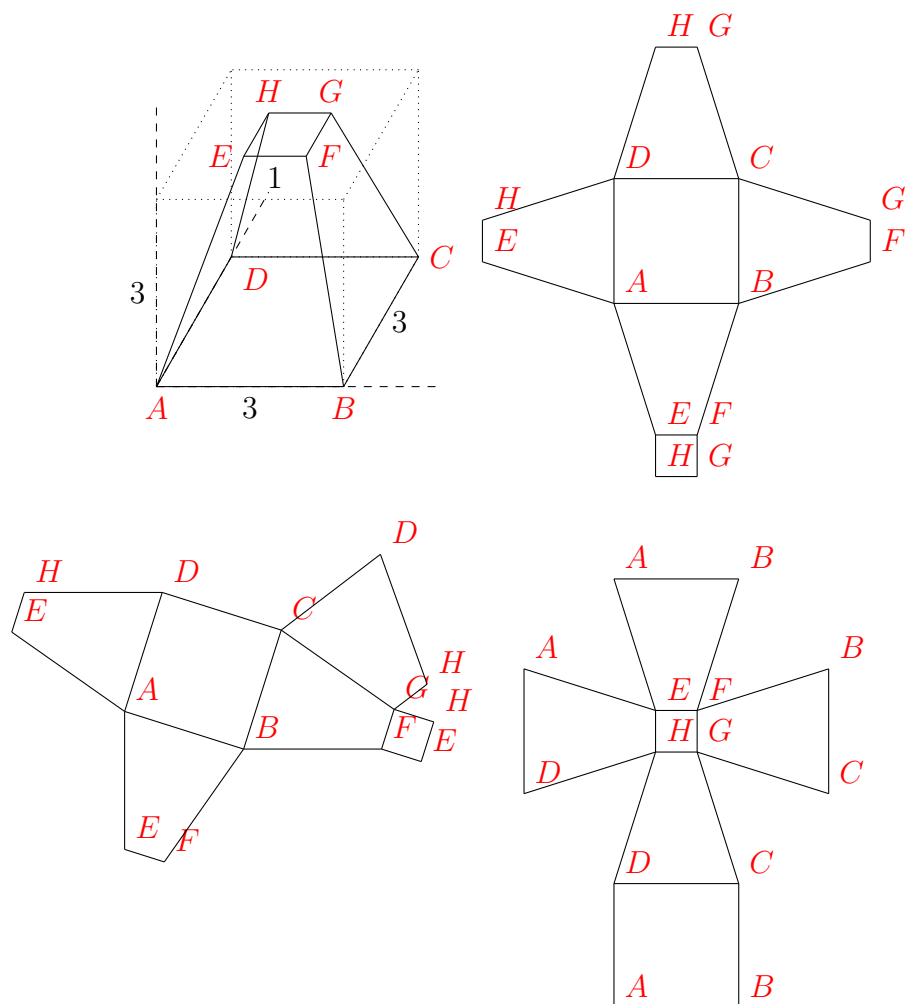
Feladat: Vegyük a következő poliédert (síkláppokkal határolt térbeli sokszöget)!



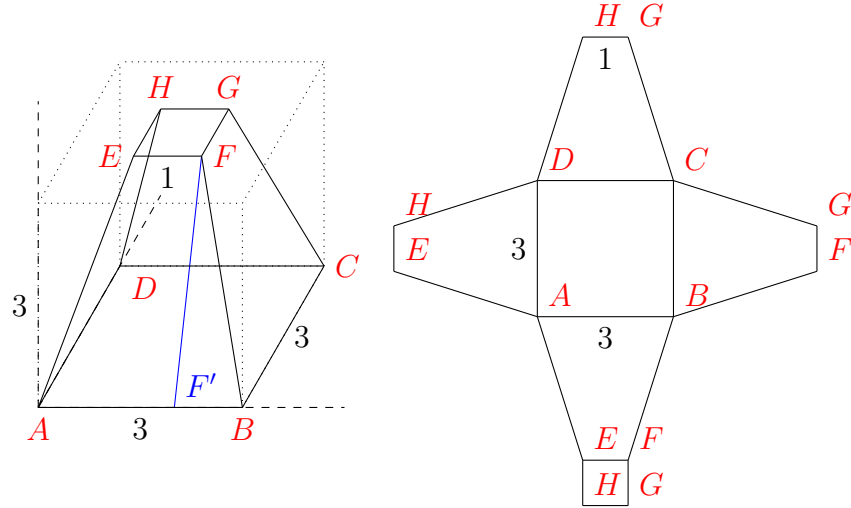
- Hogy hívják ezt a testet? Képzeletben vágd fel a test néhány élet úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.) Rajzolj le legalább három különböző ilyen fajta síkidomot! Hány külső éle lesz az így kapott síkidomnak? Ha a válasz függ a kiterítés módjától, akkor a válasz legyen 0!
- Képzeletben vágd fel a test néhány élet úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.) Rajzolj le egy ilyen fajta síkidomot! Mekkora a felülete a testnek?
- Mekkora a test térfogata?

Megoldás: (a) A test egy csonkagúla vagy csonka kúp.

Például:



(b) Felület:



Listázzuk az oldallapok területeit:

$$\begin{aligned} ABCD : & 3^2, \\ DCGH, BFGC, EFBA, ADHE : & \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \frac{3+1}{2}, \\ EFGH : & 1^2. \end{aligned}$$

Itt $\sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} = |\overline{FF'}|$ a trapéz oldallapok magassága, mivel

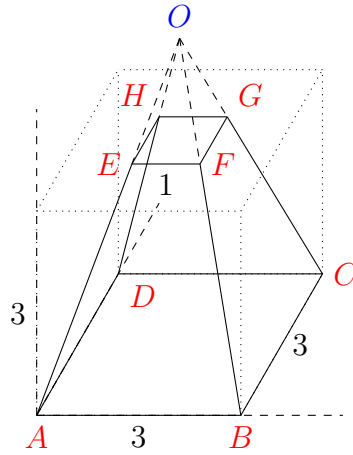
$$F' = (2, 0, 0), \quad F = (2, 1, 3), \quad F - F' = \overrightarrow{FF'} = (0, 1, 3),$$

$(3+1)/2$ pedig a trapézok alapjának és a felső élének a hosszainak az átlaga. Tehát a terület:

$$\begin{aligned} \text{terület} &= 3^2 + 4 \cdot \left(\sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \frac{3+1}{2} \right) + 1^2 \\ &= 10 + 8\sqrt{10} = 35.2982 \end{aligned}$$

(c) Térfogat: A csonka gúlát megkaphatjuk $OABCD$ gúlából úgy,

hogy a 3 feletti részt levágjuk:



Ekkor az O pont $O_z = O_3$ (vagyis a függőleges) koordinátájára teljesül, hogy

$$(O_z - 3) : O_z = 1 : 3 \implies O_z = 4.5 \implies O = (1.5, 1.5, 4.5)$$

Így a csonka gúla térfogata:

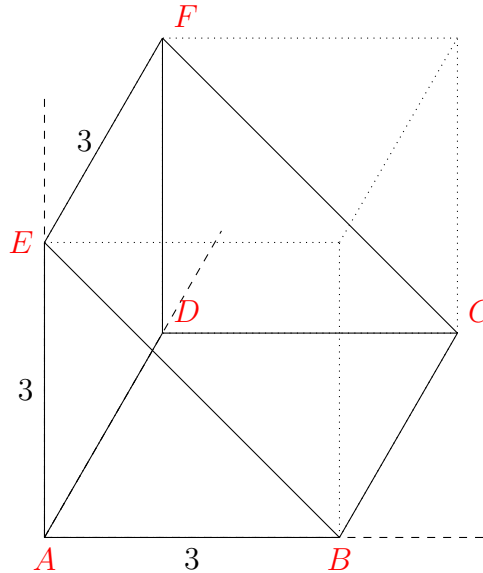
$$\begin{aligned} \text{terfogat}(OABCD) - \text{terfogat}(OFGH) = \\ \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 4.5 - \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1.5 = 13 \end{aligned}$$

Számszerű eredmény: (a) 14
(b) 35,2982
(c) 13

Mértékegység:

19. KivagasTeruletTerfogatEkII.138-144

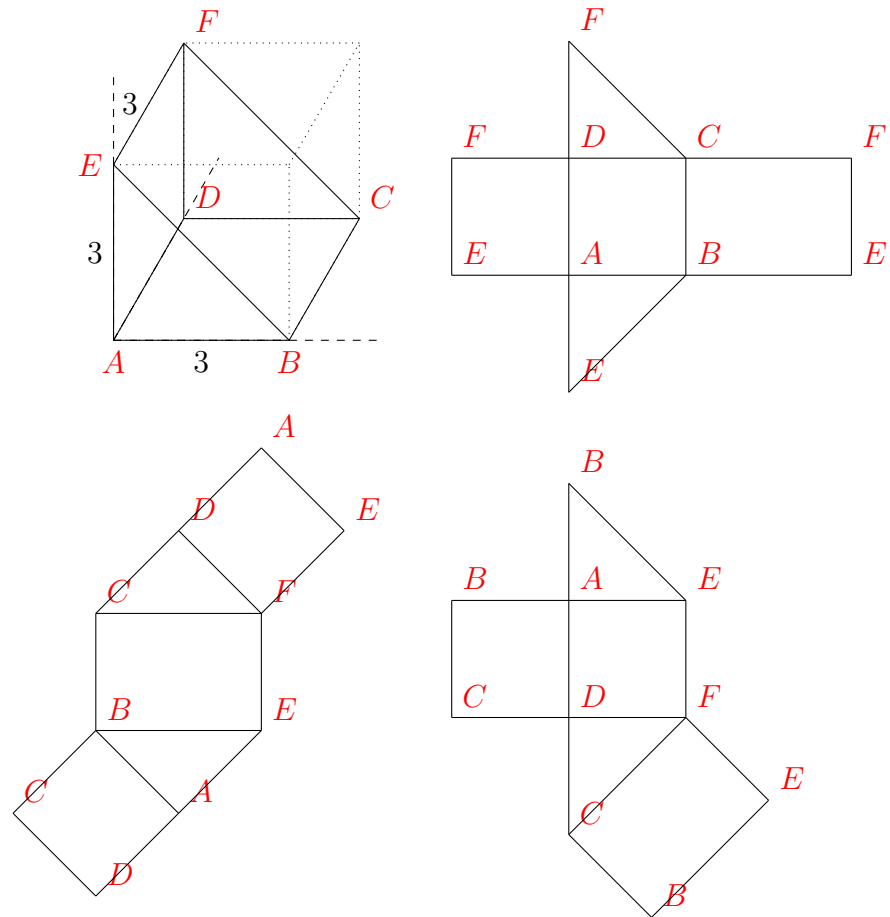
Feladat: Vegyük a következő poliédert (síklapokkal határolt térbeli sokszöget)!



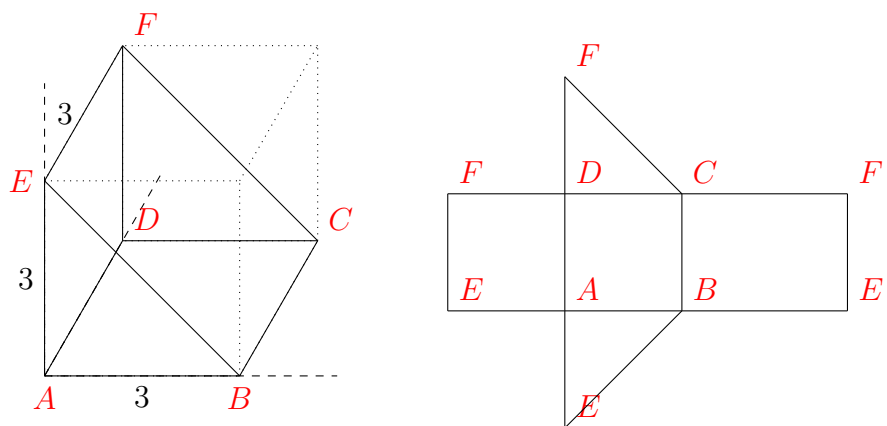
- (a) (ea) Hogy hívják ezt a testet? Képzeletben vágd fel a test néhány élét úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.) Rajzolj le legalább három különböző ilyen fajta síkidomot!
- (b) (eb) Képzeletben vágd fel a test néhány élet úgy, hogy a lapokat ki tudjuk teríteni a síkban, de az így kapott síkidom ne essen szét különálló darabokra! (Ezt úgy értjük, hogy két kapcsolódó lapnak egy közös éle kell, hogy legyen.) Rajzolj le egy ilyen fajta síkidomot! Mekkora a felülete a testnek?
- (c) (ec) Mekkora a test térfogata?

Megoldás: (a) (ea) A test egy hasáb, aminek az alapja (vagy teteje) az ABE vagy a DCF háromszög.

Például:



(b) (eb) Felület:



Listázzuk a test oldallapjainak a területet:

$$\begin{aligned}ABCD, EADF : & \quad 3^2, \\AEB, DCF : & \quad \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3, \\BEFC : & \quad 3 \cdot \sqrt{3^2 + 3^2}\end{aligned}$$

Így a felület

$$2 \cdot 3^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\right) + 3 \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} = 27 + 9\sqrt{2} = 39.7279$$

- (c) (ec) Térfogat: A hasáb háromszög alakú ABE alaplappja $(3 \cdot 3)/2$ területű, az AD magasság 3, így a térfogat $((3 \cdot 3)/2) \cdot 3 = 27/2 = 13.5$.

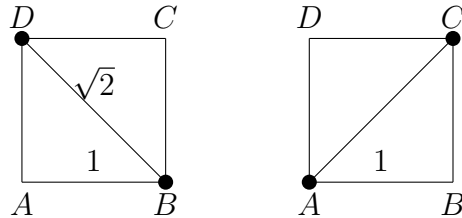
Számszerű eredmény: (a) (ea) 10
(b) (eb) 31,246
(c) (ec) 13,5

Mértékegység:

20. KockaCsucsTavolsag.145-152

- Feladat:** (a) (ea) A) Egy egységnégyzet csúcsai közül maximum hányat tudsz úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott csúcs távolsága legalább $\sqrt{2}$ legyen?
B) Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
- (b) (eb) A) Egy egységkocka csúcsai közül maximum hányat tudsz úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott csúcs távolsága legalább $\sqrt{2}$ legyen?
B) Hányféle maximális számú csúcsot tartalmazó kiválasztás létezik? Hogy hívják egy ilyen kiválasztásnál a csúcsok által kifesztett testet?
C) Mekkora a térfogata?
- (c) (ec) A) Egy egységkocka csúcsai közül maximum hányat tudsz úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott csúcs távolsága legalább $\sqrt{3}$ legyen?
B) Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
- (d) (ed) Mekkora az egységnyi oldalú szabályos tetraéder térfogata?

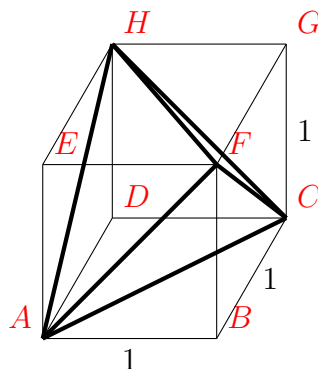
Megoldás: (a) (ea)



A) Maximum kettőt. Hiszen ha kiválasztjuk egynek pl. a B csúcsot, akkor másodiknak csak D jöhet szóba.

B) Ezt kétfeléképpen lehet megtenni, hiszen ha kiválasztjuk az első csúcsot (négyféleképpen lehetséges), akkor ez meghatározza a második pozícióját. Viszont így minden variációt kétfeléképpen kapunk meg, attól függően, hogy pl. az első ábrán először D -t vagy B -t válasszuk első csúcsnak. Így a lehetséges választások száma $4/2 = 2$.

(b) (eb) A)



Az $ABCD$ alaplapon maximum kettőt tudunk kiválasztani, legyen ez pl. A és C . Ekkor az $EFGH$ fedőlapon mar csak H -t és F -et választhatjuk, így összesen maximum négy csúcsot választhatunk. B) Ezt kétfelé képpen lehet megtenni, attól függően, hogy az alaplapon az AC vagy a BD átlót választjuk ki. Mindkét esetben az így kapott négy csúcs egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraédert feszít ki.

C) Az egységkocka egységnyi térfogata egyenlő az $ACHF$ tetraéder, és négy darab, az $ABCF$ gúlához hasonló gúla térfogatainak az összegével. Vagyis

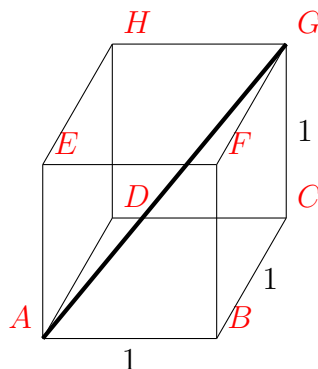
$$\begin{aligned} 1 &= \text{Térfogat}(ACHF) + 4 \cdot \text{Térfogat}(ABCF) \\ &= \text{Térfogat}(ACHF) + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) \cdot 1, \end{aligned}$$

így

$$\text{Térfogat}(ACHF) = \frac{1}{3},$$

vagyis egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraéder térfogata $1/3$.

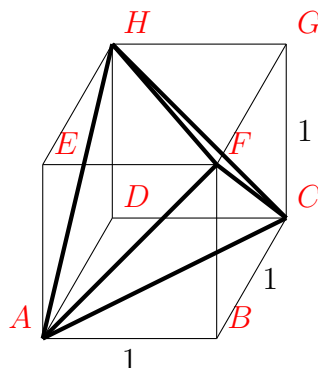
(c) (ec) A) Válasszuk az első csúcsnak A -t!



Mivel A -tól a B, D, E csúcsok 1, míg a H, F, C csúcsok $\sqrt{2}$ távolságra vannak, így csak G jöhet szoba mint második választás. Szerencsére az $|\overline{AG}|$ távolság pontosan $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

B) Négy ilyen választás lehetséges, hiszen az alaplapon az A, B, C, D pontok közül bármelyiket választhatjuk elsőként.

(d) (ed)



Az ábrán az A, C, H, F csúcsok egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraédert feszítenek ki.

Az egységkocka egységnyi térfogata egyenlő az $ACHF$ tetraéder, és négy darab, az $ABCF$ gúlához hasonló gúla térfogatainak az összegével. Vagyis

$$\begin{aligned} 1 &= \text{Térfogat}(ACHF) + 4 \cdot \text{Térfogat}(ABCF) \\ &= \text{Térfogat}(ACHF) + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) \cdot 1, \end{aligned}$$

így

$$\text{Térfogat}(ACHF) = \frac{1}{3},$$

vagyis egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraéder térfogata $1/3$. Ha az élhossz csak 1, akkor a térfogat

$$(1/3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{6 \cdot \sqrt{2}} = 0.1178$$

(Hiszen ha egy test távolságait λ -szorosára növeljük, akkor a térfogat λ^3 -szörösére növekszik.) Tehát ennyi egy egységnyi élhosszú szabályos tetraéder térfogata.

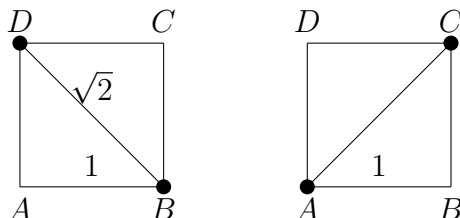
Számszerű eredmény: (a) (ea) 2 ; 2
(b) (eb) 4 ; 2 ; 0,3333
(c) (ec) 2 ; 4
(d) (ed) 0,1178

Mértékegység:

21. KockaCsucsKodolas.153-161

- Feladat:** (a) (ea) A) Egy egységnégyzet csucsai közül maximum hányat tudsz úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott csúcs távolsága legalább $\sqrt{2}$ legyen?
B) Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
- (b) (eb) Egy ABC betűt 2 db 0-1 bináris számjeggyel kódoljuk. Sajnos elképzelhető, hogy az üzenetek továbbítása során a két számjegy közül maximum az egyiket hibásan továbbítjuk. Maximum hány betűből állhat az ABC, ha a betűk kódolása *hiba detektáló*, vagyis az üzenet vevője képes felismerni, ha maximum egy 0-1 számjegy átváltozott?
- (c) (ec) A) Egy egységkocka csucsai közül maximum hányat tudsz úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott csúcs távolsága legalább $\sqrt{2}$ legyen?
B) Hányféle maximális számú csúcsot tartalmazó kiválasztás létezik?
- (d) (ed) Egy ABC betűt 3 db 0-1 bináris számjeggyel kódoljuk. Sajnos elképzelhető, hogy az üzenetek továbbítása során a két számjegy közül maximum az egyiket hibásan továbbítjuk. Maximum hány betűből állhat az ABC, ha a betűk kódolása *hiba detektáló*, vagyis az üzenet vevője képes felismerni, ha maximum egy 0-1 számjegy átváltozott?
- (e) (ee) A) Egy egységnégyzet csucsai közül maximum hányat tudsz úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott csúcs távolsága legalább $\sqrt{3}$ legyen?
B) Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
- (f) (ef) Egy ABC betűt 3 db 0-1 bináris számjeggyel kódoljuk. Sajnos elképzelhető, hogy az üzenetek továbbítása során a két számjegy közül maximum az egyiket hibásan továbbítjuk. Maximum hány betűből alhat az ABC, ha a betűk kódolása *hibajavító*, vagyis az üzenet vevője képes rekonstruálni az elküldött betűt akkor is, ha maximum egy 0-1 számjegy átváltozott?

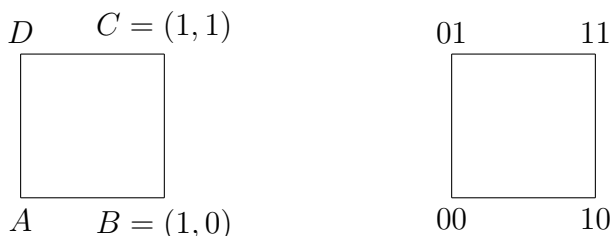
Megoldás: (a) (ea)



A) Maximum kettőt. Hiszen ha kiválasztjuk egynek pl. a B csúcsot, akkor másodiknak csak D jöhet szoba.

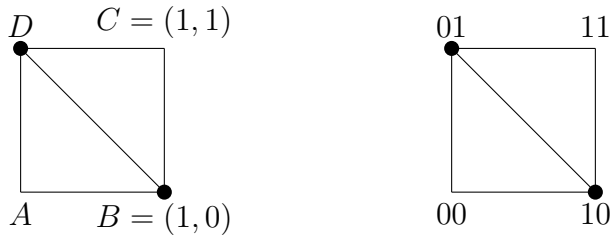
B) Ezt kétfelékeppen lehet megtenni, hiszen ha kiválasztjuk az első csúcsot (négyféleképpen lehetséges), akkor ez meghatározza a második pozícióját. Viszont így minden variációt kétfelékeppen kapunk meg, attól függően, hogy pl. az első ábrán először D -t vagy B -t válasszuk első csúcsnak. Így a lehetséges választások száma $4/2 = 2$.

- (b) (eb) Ezt a kódelméleti feladatot egy geometriai problémának is tekinthetjük. A kétjegyű bináris számok két jegyet vegyük úgy, mint egy síkbeli pont két koordinátáját:



Ha a betűk kódolása hiba-detektáló, akkor két betű kódja legalább két számjeggyel különbözik, hiszen ha csak egy számjegyen különböznének, akkor ennek az egy számjegynek a megváltozása esetében nem vennénk észre az üzenetküldés hibáját. Ha két betű kódja legalább két számjeggyel különbözik, akkor a síkon az általuk meghatározott pontok távolsága legalább $\sqrt{2}$, tehát a kódolható ABC méretet az határozza meg, hogy hány csúcsot tudunk kiválasztani egy egységnyezeten úgy, hogy bármely kettő

távolsága legalább $\sqrt{2}$.

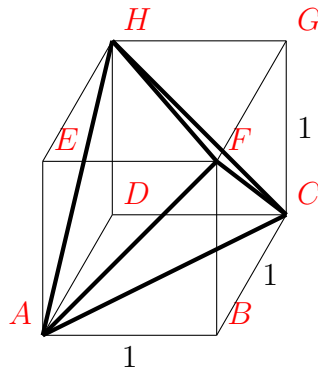


Ilyen csúcsokból viszont maximum kettőt lehet választani, hiszen ha kiválasztjuk elsőnek pl. B -t, akkor másodiknak C , A már nem jöhet szóba, így rá vagyunk kényszerülve D választására. Tehát az ABC mérete maximum kettő lehet. A hiba-detektáló kódolás:

$$a \leftrightarrow 10, \quad b \leftrightarrow 01.$$

Ha pl. a második jegye b -nek megváltozik, így őt 00 kódolja hibásan, akkor láthatóan ez a számjegysorozat nem szerepel az ABC kódolásában, tehát észrevesszük, hogy hibás üzenetet kaptunk.

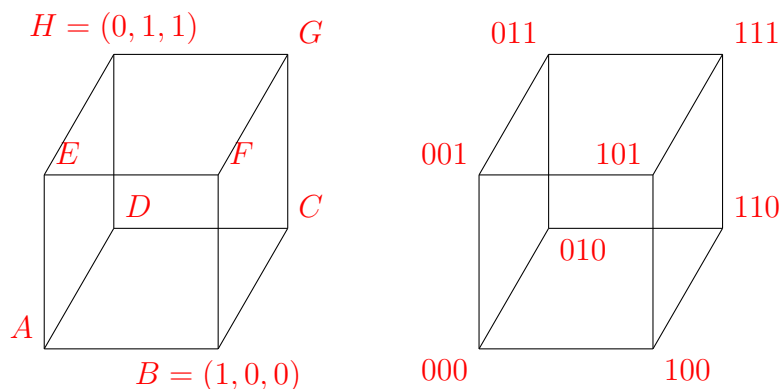
(c) (ec) A)



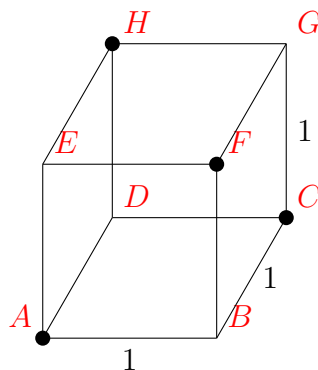
Az $ABCD$ alaplapon maximum kettőt tudunk kiválasztani, legyen ez pl. A és C . Ekkor az $EFGH$ fedlapon mar csak H -t és F -et választhatjuk, így összesen maximum négy csúcsot választhatunk. B) Ezt kétfelé képpen lehet megtenni, attól függően, hogy az alaplapon az AC vagy a BD átlót választjuk ki.

(d) (ed) Ezt a kódelméleti feladatot egy geometriai problémának is tekinthetjük. A háromjegyű bináris számok három jegyet vegyük

úgy, mint egy térbeli pont három koordinátáját:



Ha a betűk kódolása hiba-detektáló, akkor két betű kódja legalább két számjeggyel különbözik, hiszen ha csak egy számjegyen különböznének, akkor ennek az egy számjegynek a megváltozása esetében nem vennénk észre az üzenetküldés hibáját. Ha két betű kódja legalább két számjeggyel különbözik, akkor a térben az általuk meghatározott pontok távolsága legalább $\sqrt{2}$, tehát a kódolható ABC méretet az határozza meg, hogy hány csúcsot tudunk kiválasztani egy egységkockán úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább $\sqrt{2}$.

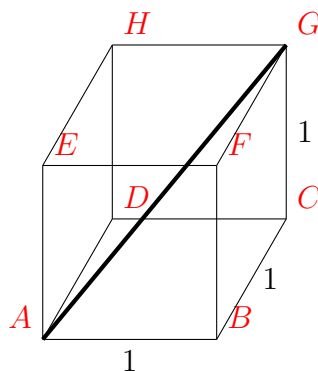


Az $ABCD$ alaplapon maximum kettőt tudunk kiválasztani, legyen ez pl. A és C . Ekkor az $EFGH$ fedlapon mar csak H -t és F -et választhatjuk, így összesen maximum négy csúcsot választhatunk. Tehát az ABC maximális mérete 4. Az ábrán látható választás esetén az ABC kódolása:

$$a \leftrightarrow 000, \quad b \leftrightarrow 110, \quad c \leftrightarrow 101, \quad d \leftrightarrow 011.$$

Itt pl. ha a c karakter második jegye megváltozik, akkor az 111 számjegysorozatot kapjuk, ez viszont nincs benne a felsorolt kód-szavakban, így észrevesszük az üzenet hibás voltát.

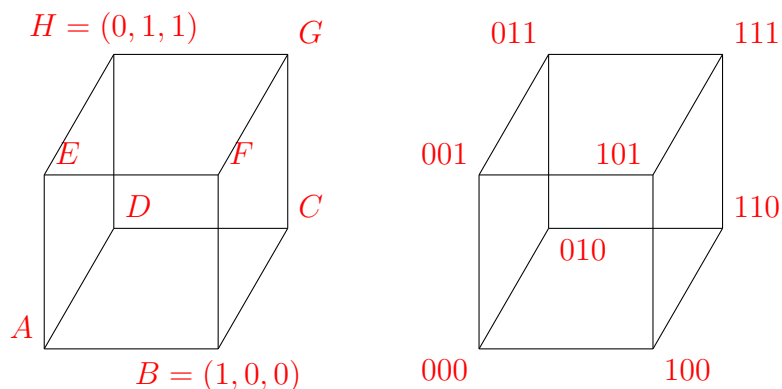
- (e) (ee) A) Válasszuk az első csúcsnak A -t!



Mivel A -tól a B, D, E csúcsok 1, míg a H, F, C csúcsok $\sqrt{2}$ távolságra vannak, így csak G jöhet szoba mint második választás. Szerencsére az $|\overline{AG}|$ távolság pontosan $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

B) Négy ilyen választás lehetséges, hiszen az alaplapon az A, B, C, D pontok közül bármelyiket választhatjuk elsőként.

- (f) (ef) Ezt a kódelméleti feladatot egy geometriai problémának is tekinthetjük. A háromjegyű bináris számok három jegyet vegyük úgy, mint egy térbeli pont három koordinátáját:



Ha a betűk kódolása hiba-javító, akkor két betű kódja legalább három számjeggyel különbözik, hiszen ha két betű kódolása csak két számjegyben különbözne, akkor egy számjegynek a megváltozása esetében ugyan észrevennénk az üzenetküldés hibáját, de

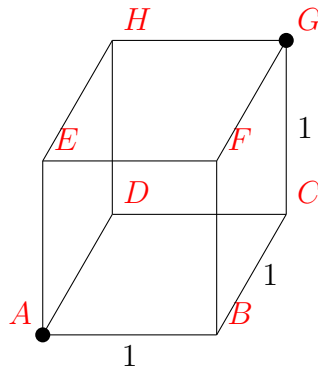
nem tudnánk visszaállítani az erdeit üzenet betűjét. Például ha a, b kódolása

$$a \leftrightarrow 000, \quad b \leftrightarrow 011,$$

akkor az 010 üzenet megkapható mind a , mind b kódolásának egyetlen jegyének megváltoztatásával. Így nem tudnánk eldönteni, hogy az egy számjegy megváltoztatásával kapott üzenet eredetileg a vagy b volt. Viszont ha két betű kódolása legalább három számjeggyel különbözik, pl.

$$a \leftrightarrow 000, \quad b \leftrightarrow 111,$$

akkor pl. az első számjegy megváltoztatása után kapott 100 eredetileg nyilván a -nak felelt meg, hiszen b -bók csak két számjegy megváltoztatásával kapható meg. Ha két betű kódja legalább három számjeggyel különbözik, akkor a térben az általuk meghatározott pontok távolsága legalább $\sqrt{3}$, tehát a kódolható ABC méretet az határozza meg, hogy hány csúcsot tudunk kiválasztani egy egységkockán úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább $\sqrt{3}$.



Az $ABCD$ alaplapon csak egyet tudunk kiválasztani, legyen ez pl. A . Ekkor az $EFGH$ fedlapon mar csak G -t választhatjuk. Tehát az ABC maximális mérete 2. Az ábrán látható választás esetén az ABC kódolása:

$$a \leftrightarrow 000, \quad b \leftrightarrow 111.$$

Ha csak egy számjegyet változtatunk meg, akkor meg mindig világos, hogy az eredeti betű a vagy b volt, csak meg kell nézni, hogy miből van több: egyesekből, vagy nullákból.

Számszerű eredmény: (a) (ea) 2 ; 2

(b) (eb) 2

(c) (ec) 4 ; 2

(d) (ed) 2

(e) (ee) 2 ; 4

(f) (ef) 2

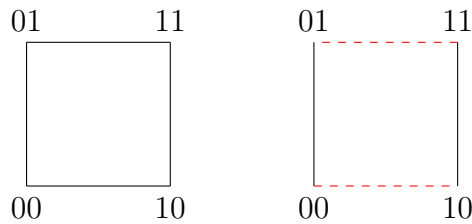
Mértékegység:

22. KockaCsucsJavitoKodolas.162-173

- Feladat:**
- (a) (ea) Írd fel az összes kétjegyű bináris számot, használd ezeket mint címkéket egy gráf (hálózat) csucsaihoz. Kösd össze azokat a csúcsokat, amelyeknek a címkéje csak egy számjegyben tér el.
 - A) Mennyi a csúcsok száma?
 - B) Mennyi az élek száma?
 - C) Ha a kétjegyű bináris számokat mint síkbeli koordinátákat használjuk (ezt úgy értjük, hogy pl. a 01 számjegysorozathoz a (0,1) koordinátájú pontot rendeljük hozzá), és az élek a gráfon egyenes szakaszok, akkor mi az így kapott geometriai objektum neve?
 - (b) (eb) Írd fel az összes háromjegyű bináris számot, használd ezeket mint címkéket egy gráf (hálózat) csucsaihoz. Kösd össze azokat a csúcsokat, amelyeknek a címkéje csak egy számjegyben tér el.
 - A) Mennyi a csúcsok száma?
 - B) Mennyi az élek száma?
 - (c) (ec) Írd fel az összes négyjegyű bináris számot, használd ezeket mint címkéket egy gráf (hálózat) csucsaihoz. Kösd össze azokat a csúcsokat, amelyeknek a címkéje csak egy számjegyben tér el.
 - A) Mennyi a csúcsok száma?
 - B) Mennyi az élek száma?
 - C) Rajzold le a gráfot!
 - (d) (ed) Írd fel képzeletben az összes n -jegyű bináris számot, használd ezeket mint címkéket egy gráf (hálózat) csucsaihoz. Kösd össze azokat a csúcsokat, amelyeknek a címkéje csak egy számjegyben tér el.
 - A) Mennyi a csúcsok $cs(n)$ száma?
 - B) Hány él indul ki egy csúcsból?
 - C) Mennyi az élek $e(n)$ száma ?
 - (e) (ee) Egy ABC betűit 4 db 0-1 bináris számjeggyel kódoljuk. Sajnos elképzelhető, hogy az üzenetek továbbítása során a négy számjegy közül maximum az egyiket hibásan továbbítjuk. Maximum hány betűből állhat az ABC, ha a betűk kódolása *hibajavító*, vagyis az üzenet vevője képes rekonstruálni az elküldött betűt akkor is, ha maximum egy 0-1 számjegy átváltozott?
 - (f) (ef) Egy ABC betűit 5 db 0-1 bináris számjeggyel kódoljuk. Sajnos elképzelhető, hogy az üzenetek továbbítása során az öt számjegy

közül maximum az egyiket hibásan továbbítjuk. Maximum hány betűből állhat az ABC, ha a betűk kódolása *hibajavító*, vagyis az üzenet vevője képes képes rekonstruálni az elküldött betűt akkor is, ha maximum egy 0-1 számjegy átváltozott?

Megoldás: (a) (ea)

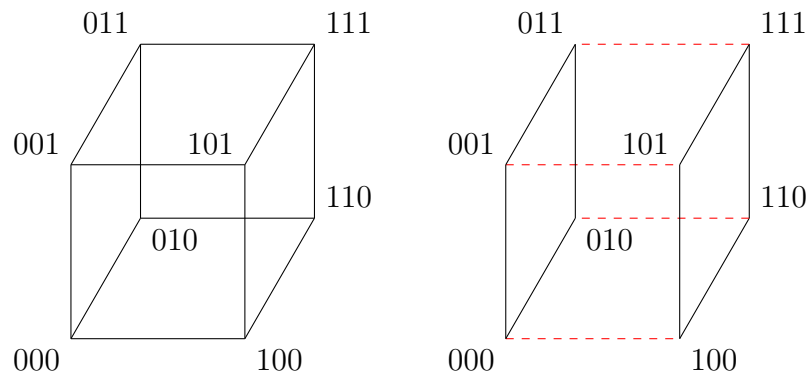


Az ábrán látható, hogy egy négyzetet kapunk, a csúcsok és élek száma

$$cs = 2^2 = 4, \quad e = 4.$$

Figyeljük meg, hogy az egységnégyzetet (más néven a 2 dimenziós egységkockát) felépíthetjük a következőképpen: Vesszük az egydimenziós egységkockát (szakaszt), ez a második ábrán a 00 – 01 szakasz. Ennek legyártjuk egy kópiáját, de most az első koordináta 0 helyett 1 lesz (ez a 10 – 11 szakasz). Ezután összekötjük a két kópia azon csúcsait, amelyeknek az első koordinátát leszámítva ugyanazok a koordinátái.

(b) (eb)



A csúcsok száma $cs = 2^3$, ahol 2 a $\{0, 1\}$ ABC karaktereinek a száma, míg 3 a számjegyek száma. Az élek számát többféleképpen is megkaphatjuk.

- Megszámoljuk őket: $e = 12$.

- 8 csúcs van, mindegyikből három el indul ki, továbbá minden el két csúcshoz tartozik hozzá, így az élek e száma

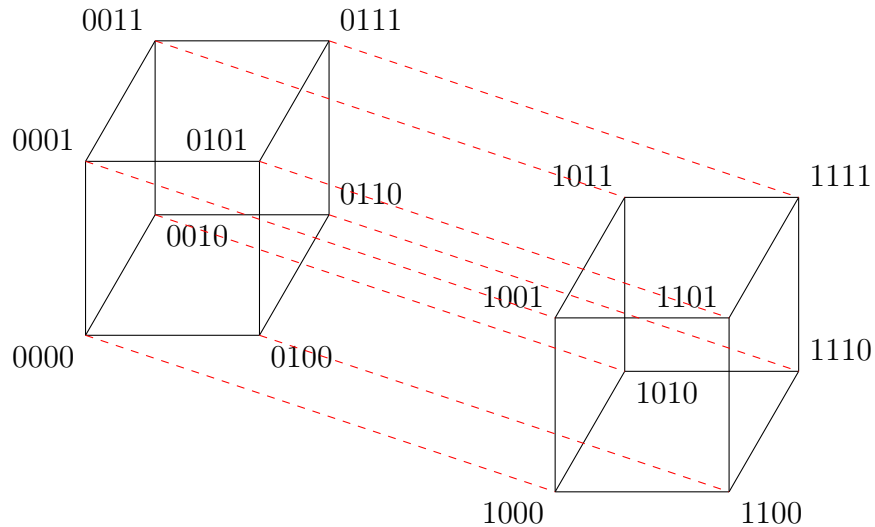
$$e(3) = \frac{3 \cdot cs}{2} = 3 \cdot 8/2 = 12.$$

- Ha már tudjuk a kétdimenziós egységkocka (magyarul négyzet) csúcsainak $cs(2) = 4$ és éleinek $e(2) = 4$ a számát, akkor

$$e = 2e(2) + cs(2) = 2 \cdot 4 + 4 = 12,$$

mivel az egységkocka élhálózata tartalmazza a két fekete $0**$ baloldali, illetve a $1**$ jobboldali egységnégyzetek eleit, továbbá a jobb és bal oldali egységnégyzetek megfelelő csúcsait összekötő szaggatott piros éleket. (Itt pl. a $0**$ jelölés azon csúcsokat reprezentálja, ahol a második és a harmadik számjegy tetszőleges, míg a 3-as $e(3)$ -ban a dimenziók számát jelöli.)

(c) (ec)



A csúcsok száma $cs = 2^4$, ahol 2 a $\{0, 1\}$ ABC karaktereinek a száma, míg 4 a számjegyek száma. Az élek számát többféleképpen is megkaphatjuk.

- Megszámoljuk őket: $e = 32$.
- 16 csúcs van, mindegyikből négy el indul ki, továbbá minden el két csúcshoz tartozik hozzá, így az élek e száma

$$e = \frac{4 \cdot cs}{2} = 4 \cdot 16/2 = 32.$$

- Ha már tudjuk a háromdimenziós egységkocka csúcsainak $cs(3) = 8$ és éleinek $e(3) = 12$ a számát, akkor

$$e(4) = 2e(3) + cs(3) = 2 \cdot 12 + 8 = 32,$$

mivel az négydimenziós egységkocka élhálózata tartalmazza a két fekete $0 **$ baloldali, illetve a $1 **$ jobboldali háromdimenziós egységkockák eleit, továbbá a jobb és bal oldali háromdimenziós egységkockák megfelelő csúcsait összekötő szaggatott piros éleket. (Itt pl. a $0 **$ jelölés azon csúcsokat reprezentálja, ahol a második, harmadik és a negyedik számjegy tetszőleges.)

- (d) (ed) A) A csúcsok $cs(n)$ száma

$$cs(n) = 2 \cdot cs(n-1) = 2^n,$$

mivel az összes lehetséges n jegyű bináris számot megkaphatjuk úgy, hogy vesszük az összes $n-1$ jegyű bináris számot, amihez hozzáírunk vagy egy 1, vagy egy 0 számjegyet. Tehát $cs(n) = 2 \cdot cs(n-1)$, és mivel $cs(1) = 2$, így $cs(n) = 2^n$.

B) Egy csúcsból n el indul ki, hiszen a csúcsot azokkal a csúcsokkal kell összekötni, amelyeknek a címkéje egy számjegyben tér el.

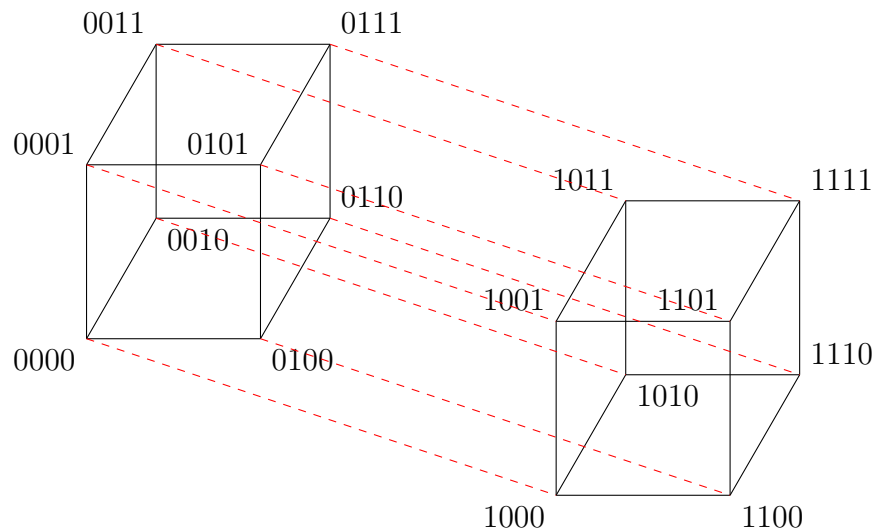
C) Gy az élek $e(n)$ száma

$$e(n) = \frac{n \cdot cs(n)}{2} = n \cdot 2^{n-1},$$

ahol a 2-vel való osztásra azért volt szükség, mivel egy el két csúcs-hoz is hozzátartozik.

- (e) (ee) Ha a kódolás hibajavító, akkor két különböző betű kódszavai legalább három számjegyben különböznek egymástól. Hiszen ha csak két számjegy különbözik, pl. az egyik kódszó 0000, míg a másik 0011, akkor a 0000 hibás 0001 változatát sajnos megkaphatjuk a 0011 kódszó harmadik jegyének a megváltoztatásával is. Így nem tudjuk kideríteni, hogy a 0001 üzenet melyik kódszó hibás változata. Ha viszont két kódszó legalább három jegyben különbözik, akkor pl. a 0000 kódszó hibás 0001 változata nem téveszthető össze semelyik másik kódszóval, hiszen ahhoz még legalább két

jegyet kellene megváltoztatni.



Az ABC maximális mérete minimum kettő, hiszen pl. a 0000 és 1111 kódszavak több mint három jegyben térnek el egymástól. Megmutatjuk, hogy egy hárombetűs ABC-t már nem tudunk hibajavító módon kódolni négy bináris számjeggyel. Ha az ABC minimum hárombetűs, akkor az ábra bal vagy a jobboldali fekete kockája legalább két betű kódját tartalmazna. Az ábra szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a két betű kódja a bal oldalon van. Mivel ezek a kódszavak legalább három jegyben különböznek, így a baloldali fekete kocka átellenes csucsain kell, hogy elhelyezkedjenek, pl. legyenek 0000 és 0111. (A kockák megfelelő elforgatásával mindig elérhető ez az állapot.) A jobboldali kockán 0000-tól az 1000 számjegy csak egy, míg a 1100, 1010, 1001 számjegyek csak két jegyben különböznek, így ők nem használhatóak egy másik betű kódolására. Hasonló módon 0111-ből az 1111, 1011, 1101 és 1110 kódszavak mindegyike maximum két jegy megváltoztatás megkapható így ha két kódszót kiválasztottunk a bal kockán, akkor a jobb kockán már egyet sem választhatunk. Tehát a kódolható ABC mérete maximum kettő.

- (f) (ef) Ha csak négy számjegyes kódolást használnánk, akkor az ABC mérete maximum kettő lehetne. Ez azt jelenti, hogy a $0****$ alakú (itt a $*$ egy akármilyen 0-1 számjegyet jelöl) kódszavak közül maximum kettőt lehet kiválasztani, és persze ugyanez igaz a $1****$ alakú kódszavakra. Tehát az ABC maximális mérete maximum 4. Ez a felső korlát viszont el is érhető, pl. legyen az első két betű

kódszója

$$a \leftrightarrow 00000, \quad b \leftrightarrow 00111.$$

Itt úgy próbáltuk a, b -t megválasztani, hogy minél "közelebb" legyenek egymáshoz (abban az értelemben, hogy az egyik a másiktól minél kevesebb jegy megváltoztatásával legyen megkapható. Ennek értelme az, hogy így a a -ból maximum kettő, illetve a b -ből maximum kettő jegy megváltoztatásával kapott kódszavak közt minél nagyobb legyen az átfedés, hiszen így kevesebb alternatívát kell később kizárnunk mint alkalmatlan kódszót.) Ekkor pl. a

$$c \leftrightarrow 11001, \quad d \leftrightarrow 11110$$

választás kielégíti a hibajavítás általunk támasztott követelményeit.

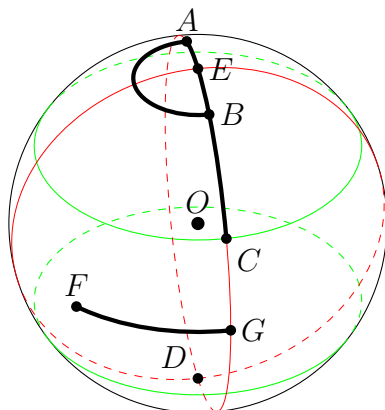
- Számszerű eredmény:**
- (a) (ea) 4 ; 4 ; négyzet | kocka | szakasz | háromszög | tetraéder
 - (b) (eb) 8 ; 12 ; Igen | Nem
 - (c) (ec) 16 ; 32
 - (d) (ed) 2^n | $2^{(n-1)}$ | n^n | $n!$ | $(2n)!$; n | $n-1$ | $n+1$ | $2n$ | $2n-1$; $n2^{n-1}$ | $n2^n$ | $(n-1)2^{n-1}$ | nn^{n-1} | $2 \cdot 2^n$ |
 - (e) (ee) 2
 - (f) (ef) 4

Mértékegység:

23. GombKockaGeodetikus.174-180

- Feladat:** (a) (ea) Ebben a feladatban az a kérdés, hogy egy gömbfelületen (a Földet a következőekben ilyennek képzeljük) mozogva hogyan juthatunk el egy adott pontból egy másikba a legrövidebb úton. Az ilyen típusú kérdések megválaszolásához jóval több kell, mint a gimnáziumi tananyag, de nemi józan esszel megtippelhető, hogy a következő állítások közül melyek igazak vagy hamisak. (Ha valaki hajlandó elhinni, hogy a gömb felületen két, egymással nem átellenes pont között csak egyetlen legrövidebb út létezik, akkor ebből a következő állítások igaz vagy hamis volta elég könnyen bizonyítható.)
- A) Feküdjön két város ugyanazon, de amúgy tetszőleges szélességi körön. Ekkor az őket összekötő legrövidebb út is ezen a szélességi körön halad.
- B) Feküdjön két város ugyanazon, de amúgy tetszőleges hosszúsági körön. Ekkor az őket összekötő legrövidebb út is ezen a hosszúsági körön halad.
- C) Létezik olyan szélességi kör, hogy ha két város ezen szélességi körön fekszik, akkor az őket összekötő legrövidebb út is ezen a szélességi körön halad.
- D) Létezik olyan hosszúsági kör, hogy ha két város ezen hosszúsági körön fekszik, akkor az őket összekötő legrövidebb út is ezen a hosszúsági körön halad.
- (b) (eb) A matematikusok be tudják bizonyítani azt a tételt, ami nagyjából a következőt állítja: Egy sima felület bármely két eleendően közeli pontja között csak egyetlen, a felületen haladó legrövidebb út van. (Az ilyen utakat geodetikusoknak nevezik.) Adj példát olyan (szükségszerűen nem sima) felületre, ahol ez az állítás nem igaz, vagyis tudunk találni két pontot egymáshoz tetszőlegesen közel olyan módon, hogy közöttük a felületen haladó legrövidebb útból több is van!
- Vedd az $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\}$ térfelületet határoló negyedsíkok által alkotott felületet! Válaszként add meg: Hány, ezen a felületen haladó legrövidebb út létezik a $(0, 0, 1)$ és az $(1, 1, 0)$ pontok között?
- (c) (ec) Melyik az a pont a Földgömb felszínén, amit az Északi sarkkal nem csak egy legrövidebb út köt össze?

Megoldás: (a) (ea)



Az ábrán E az Északi, míg D a Deli sark, illetve O a gomb közép-pontja.

A) Hamis. Az ugyanazon a szélességi körön fekvő A és B pontok között nem a félkör alakú, a szélességi körön fekvő ív a legrövidebb, hanem az $A - E - B$, a hosszúsági körök mentén haladó ív.

B) Igaz. Pl. az ugyanazon a hosszúsági körön fekvő B és C között a legrövidebb út a hosszúsági kör B és C közé eső része. Ha elhisszük, hogy csak egy ilyen legrövidebb út van, akkor ez belátható a következőképpen:

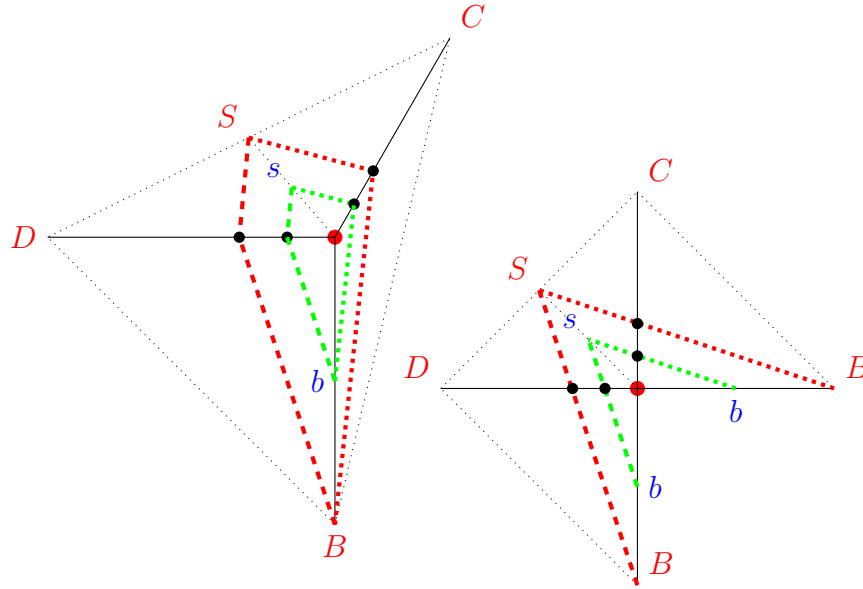
A gomb szimmetrikus az OBC pontok síkjára való tükrözésre nézve, így ez a tükrözés nem viheti át az egyetlen legrövidebb utat csak önmagába, így annak rajta kell fekédnie a gömbből az OBC síkja által kivágott (esetünkben hosszúsági) körön.

Ha a gomb felületen a két pont átellenes, mint pl. E és D , akkor OED nem határoz meg egyértelműen egy síkot, így a legrövidebb utat kimetszhetjük a gömbből bármely, az $E - O - D$ egyenest tartalmazó síkkal, így végtelenül sok legrövidebb út lesz E és D között.

C) Igaz. Ha a két F és G pont az egyenlítőn fekszik, akkor az OFG sík pont az egyenlítőt vágja ki a gömbből, így a legrövidebb út is az egyenlítőn fekszik.

D) Igaz. Mivel az állítás A) szerint bármely hosszúsági körre igaz, így nyilván létezik olyan hosszúsági kör, amelyre az állítás igaz, elvégre a hosszúsági körök halmaza nem üres.

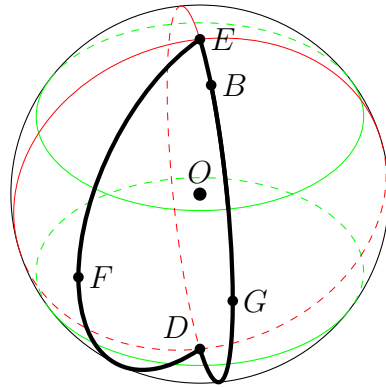
(b) (eb)



Legyen a piros pont egy kocka csúcsa. Ekkor az ebből a csúcsból kiinduló élen levő B pontot a másik két el által kifeszített lapnak az átlóján levő S pontot pontosan két legrövidebb út köti össze, mint az a poliéder sarkának a síkba történő kiterítéséből látható. A $B - S$ utakat a piros pont körül tetszőlegesen lekicsinyeskedik (így kapjuk a $b - s$ utakat), tehát a piros ponttal jelzett csúcs körül találhatunk pontokat egymáshoz tetszőlegesen közel úgy, hogy közöttük a legrövidebb út nem egyértelműen meghatározott, mivel haladhatunk a pontozott vagy a szaggatott vonalak mentén is.

Ezen gondolatmenet alapjá a válasz 2.

(c) (ec)



Az ugyanazon a hosszúsági körön fekvő B és C között a legrövidebb út a hosszúsági kör B és C köze eső része. Ha elhisszük, hogy csak egy ilyen legrövidebb út van, akkor ez belátható a következőképpen:

A gömb szimmetrikus az OBC pontok síkjára való tükrözésre nézve, így ez a tükrözés nem viheti át az egyetlen legrövidebb utat csak önmagába, így annak rajta kell feküdnie a gömbből az OBC síkja által kivágott (esetünkben hosszúsági) körön.

Ha a gömb felületen a két pont átellenes, mint pl. E és D , akkor OED nem határoz meg egyértelműen egy síkot, így a legrövidebb utat kimetszhetjük a gömbből bármely, az $E - O - D$ egyenest tartalmazó síkkal, így végtelenül sok legrövidebb út lesz E és D között.

Az ábrán két ilyen tüntettünk fel, az egyiket az EDG , a másikat az EDF síkja metszi ki.

- Számszerű eredmény:**
- (a) (ea) Hamis | Igaz ; Igaz | Hamis ; Igaz | Hamis ; Igaz | Hamis
 - (b) (eb) 2
 - (c) (ec) Déli sark | Északi sark | Akármelyik város az Egyenlítőn | Miskolc | Budapest

Mértékegység:

24. GPS.181-187

- Feladat:** (a) (ea) Ebben a feladatban a Földet egy $R = 6371$ km sugarú gömbnek tekintjük. A következő konvenciót használjuk a Földgomb felszínének a koordinátázására: A hosszúsági ϕ koordináta a $(-180^\circ, 180^\circ]$ intervallum eleme, míg a szélességi θ koordináta benne van a $[-90^\circ, 90^\circ]$ intervallumban. A koordinátákat *tizedestört*° alakban adjuk meg. Továbbá két, azonos szélességi körön levő pont távolságát közelítsük a szélességi körnek a két város köze eső ívhosszával. Budapest GPS pozíciója $47^\circ 29' 52.483''N$ $19^\circ 2' 24.846''E$. (Ha nagyon unatkozol, keresd meg, hogy hol van ez a pont Budapesten!) Mennyi Budapest (szélesség, hosszúság) = (θ, ϕ) koordinátája az általunk használt konvenció szerint?
- (b) (eaa) Ebben a feladatban a Földet egy $R = 6371$ km sugarú gömbnek tekintjük. A következő konvenciót használjuk a Földgomb felszínének a koordinátázására: A hosszúsági ϕ koordináta a $(-180^\circ, 180^\circ]$ intervallum eleme, míg a szélességi θ koordináta benne van a $[-90^\circ, 90^\circ]$ intervallumban. A koordinátákat *tizedestört*° alakban adjuk meg. Továbbá két, azonos szélességi körön levő pont távolságát közelítsük a szélességi körnek a két város köze eső ívhosszával. Budapest GPS pozíciója $47^\circ 29' 52.483''N$ $19^\circ 2' 24.846''E$. (Ha nagyon unatkozol, keresd meg, hogy hol van ez a pont Budapesten!) Mennyi lenne Budapest (θ, ϕ) koordinátája, ha a szögeket radiánban mernénk?
- (c) (eab) Ebben a feladatban a Földet egy $R = 6371$ km sugarú gömbnek tekintjük. A következő konvenciót használjuk a Földgomb felszínének a koordinátázására: A hosszúsági ϕ koordináta a $(-180^\circ, 180^\circ]$ intervallum eleme, míg a szélességi θ koordináta benne van a $[-90^\circ, 90^\circ]$ intervallumban. A koordinátákat *tizedestört*° alakban adjuk meg. Továbbá két, azonos szélességi körön levő pont távolságát közelítsük a szélességi körnek a két város köze eső ívhosszával. Budapest GPS pozíciója $47^\circ 29' 52.483''N$ $19^\circ 2' 24.846''E$. (Ha nagyon unatkozol, keresd meg, hogy hol van ez a pont Budapesten!) Mik Budapest koordinátái az xyz koordinátarendszerben, ahol az origó a Föld középpontja, továbbá a háromdimeziós pontokat úgy fejeletjük meg a gömbi koordinátáknak, hogy

$$(R, 0, 0) \sim (0^\circ, 0^\circ), \quad (0, R, 0) \sim (0^\circ, 90^\circ), \quad (0, 0, R) \sim (90^\circ, 0^\circ).$$

(A távolságokat mérd kilométerben!)

- (d) (eb) Legyen $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ szög *tizedestort* $^\circ$ alakban megadva. Legyen a $\text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$ függvény értéke az a legnagyobb egész szám, amelyik kisebb vagy egyenlő mint x . Továbbá legyen $\text{mod}(x, k) = r$, ahol r -t az

$$x = nk + r, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < k$$

feltételek definiáljak. (Magyarul r az x szám k -val való osztásának a maradéka.)

Írd át ezen függvények segítségével az α szöget $f^\circ m' s''$ alakba, ahol $0 \leq f \leq 180$ és $0 \leq m < 60$ egész számok, míg a szögmásod-perceket merő $0 \leq s < 60$ szám tizedestort!

- (e) (ec) A) Mik a GPS koordinátái a $(\theta, \phi) = (-80.191790^\circ, 25.761680^\circ)$ pozíciójú helynek?
B) Melyik városban van a $(\theta, \phi) = (-80.191790^\circ, 25.761680^\circ)$ pozíciójú hely?
- (f) (ed) A) Milyen messze van a $90^\circ 0' 0.00''S$, $43^\circ 10' 22.42''W$ és a $90^\circ 0' 0.00''S$, $66^\circ 50' 32.42''W$ hely? Hol vannak?
B) Milyen messze van (a Föld felszínén a legrövidebb úton utazva) $90^\circ 0' 0.00''S$, $43^\circ 10' 22.42''W$ és $90^\circ 0' 0.00''N$, $63^\circ 10' 22.42''W$?

Megoldás: (a) (ea) Az átváltás a szögek különböző formái között:

$$1' = (1/60)^\circ, \quad 1'' = (1/60^2)^\circ, \quad 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.2957795^\circ.$$

Így Budapest (θ, ϕ) koordinátái:

$$\begin{aligned} \theta &= 47^\circ + 29 \cdot \frac{1}{60} + 52.483 \cdot \frac{1}{3600} = 47.4979119^\circ, \\ \phi &= 19^\circ + 2 \cdot \frac{1}{60} + 24.846 \cdot \frac{1}{3600} = 19.040235^\circ. \end{aligned}$$

- (b) (eaa) Az átváltás a szögek különböző formái között:

$$1' = (1/60)^\circ, \quad 1'' = (1/60^2)^\circ, \quad 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.2957795^\circ.$$

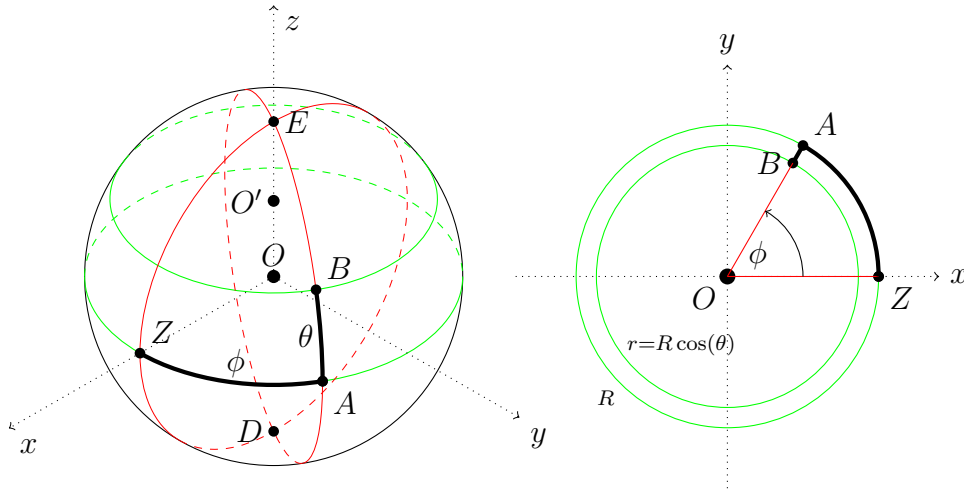
Így Budapest (θ, ϕ) koordinátái:

$$\begin{aligned} \theta &= 47^\circ + 29 \cdot \frac{1}{60} + 52.483 \cdot \frac{1}{3600} = 47.4979119^\circ, \\ \phi &= 19^\circ + 2 \cdot \frac{1}{60} + 24.846 \cdot \frac{1}{3600} = 19.040235^\circ. \end{aligned}$$

Ugyanez radiánban:

$$\begin{aligned}(\theta, \phi) &= \left(47.4979119^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}, 19.040235^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \right) \\ &= (0.828994951 \text{ rad}, 0.332314791 \text{ rad})\end{aligned}$$

- (c) (eab) Ebben a feladatban a következő konvenciót használjuk a Földgömb felszínének a koordinátázására: A hosszúsági θ koordináta az $(-180^\circ, 180^\circ]$ intervallum eleme, míg a szélességi koordináta benne van a $[-90^\circ, 90^\circ]$ intervallumban. A tér egy (x, y, z)



1. ábra. A baloldali ábrán a gömbi poláris koordináták: $Z \sim (0, 0)$, $A \sim (0, \phi)$, $B \sim (\theta, \phi)$. A B ponton áthaladó szélességi kör sugara $r = R \cos(\theta) = |\overline{OZ}| \cos(\theta)$, a középpontját O' -vel jelöltük. A szélességi kör tartalmazó sík $z = |\overline{OO'}| = R \sin(\theta)$ magasságban helyezkedik el. A jobboldali ábrán ennek az Egyenlítő $z = 0$ síkjára való merőleges vetítését látjuk. Az E, O', O, D pontok vetülete egybeesik, a baloldali ábrán O -val jelöltük.

pontját jellemezhetjük a Koordináta-rendszer origójától mért

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

távolságával és a (θ, ϕ) GPS típusú koordinátaival. Az ábráról leolvasható, hogy az összefüggés a két koordináta-rendszer között:

$$(R, \theta, \phi) \longrightarrow (x, y, z) = (R \cos(\theta) \cos(\phi), R \cos(\theta) \sin(\phi), R \sin(\theta)).$$

Az átváltás a szögek különböző formái között:

$$1' = (1/60)^\circ, \quad 1'' = (1/60^2)^\circ, \quad 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.2957795^\circ.$$

Így Budapest (θ, ϕ) koordinátái:

$$\begin{aligned}\theta &= 47^\circ + 29 \cdot \frac{1}{60} + 52.483 \cdot \frac{1}{3600} = 47.4979119^\circ, \\ \phi &= 19^\circ + 2 \cdot \frac{1}{60} + 24.846 \cdot \frac{1}{3600} = 19.040235^\circ.\end{aligned}$$

Ugyanez radiánban:

$$\begin{aligned}(\theta, \phi) &= \left(47.4979119^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}, 19.040235^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \right) \\ &= (0.828994951 \text{ rad}, 0.332314791 \text{ rad})\end{aligned}$$

Az xyz koordináták:

$$\begin{aligned}R &= 6371 \text{ km}, \quad \theta = 0.828994951 \text{ rad}, \quad \phi = 0.332314791 \text{ rad}, \\ x &= R \cos(\theta) \cos(\phi) = 4068.86384 \text{ km}, \\ y &= R \cos(\theta) \sin(\phi) = 1404.219 \text{ km}, \\ z &= R \sin(\theta) = 4697.03705 \text{ km}.\end{aligned}$$

(d) (eb) Nyilván

$$f = \lfloor \alpha \rfloor.$$

Továbbá

$$m = \lfloor \text{mod}(60\alpha, 60) \rfloor$$

és

$$s = \text{mod}(3600\alpha, 60).$$

Itt f , m és s kiszámítása a következőképpen működik: Legyen pl. $\alpha = 1.9222^\circ$. Ekkor

$$\begin{aligned}f &= \lfloor 1.9222 \rfloor = 1, \\ m &= \lfloor \text{mod}(60 \cdot 1.9222, 60) \rfloor = \lfloor \text{mod}(115.332, 60) \rfloor \\ &= \lfloor 55.332 \rfloor = 55, \\ s &= \text{mod}(3600 \cdot 1.9222, 60) = \text{mod}(6919.92, 60) = 19.92.\end{aligned}$$

Pl. s kiszámítása először átszámolja a szöget szögmásodpercre a 3600-zal történő szorzással, de a mod művelet csak a $[0, 60)$ intervallumba eső részt tartja meg.

Ellenőrzésképpen:

$$1 + 55 \cdot \frac{1}{60} + 19.92 \cdot \frac{1}{3600} = 1.9222$$

(e) (ec)

A) Egy tizedestört alakban és fokokban megadott α szöget a következő módon számolhatunk át

f fok m szögperc és s szögmásodperccé:

$$f = \lfloor \alpha \rfloor.$$

Továbbá

$$m = \lfloor \text{mod}(60\alpha, 60) \rfloor$$

és

$$s = \text{mod}(3600\alpha, 60).$$

Így a $(\theta, \phi) = (80.191790^\circ, 25.761680^\circ)$ pont GPS koordinátái: $25^\circ 45' 42.048''$ N, $80^\circ 11' 30.444''$ E.

Így a $(\theta, \phi) = (-80.191790^\circ, 25.761680^\circ)$ pont koordinátái $25^\circ 45' 42.048''$ N, $80^\circ 11' 30.444''$ W lesznek.

B) Ez a pont Miamiben van.

- (f) (ed) A) Ha a szélességi θ koordináta $90^\circ S = -90^\circ$, akkor a pont a Deli sarkon van, függetlenül a hosszúsági ϕ koordináta értékétől, így mindkét pont a Deli sarkot írja le, vagyis a távolságuk nulla.
 B) Ha a szélességi θ koordináta $90^\circ N = 90^\circ$, akkor a pont az Északi sarkon van, függetlenül a hosszúsági ϕ koordináta értékétől. Így a két pont távolság az Északi és Deli sarkok távolságának felel meg, ami a mi idealizált Földgömbünk felületén utazva

$$6371 \text{ km} \cdot \pi = 20015.0868 \text{ km}.$$

Számszerű eredmény: (a) (ea) $(47.4979119^\circ, 19.040235^\circ) \mid (47.4971319^\circ, 19.041235^\circ)$
 $\mid (47.4979459^\circ, 19.040225^\circ) (47.4973119^\circ, 19.042235^\circ)$
 (b) (eaa) $(0.828994951 \text{ rad}, 0.332314791 \text{ rad})$
 $\mid (0.828984951 \text{ rad}, 0.332314791 \text{ rad})$
 $\mid (0.828974951 \text{ rad}, 0.332314791 \text{ rad})$
 $\mid (0.828964951 \text{ rad}, 0.332314791 \text{ rad})$
 (c) (eab) $(4068.86384 \text{ km}, 1404.219 \text{ km}, 4697.03705 \text{ km})$
 $\mid (4168.86384 \text{ km}, 1404.219 \text{ km}, 4697.03705 \text{ km})$
 $\mid (4268.86384 \text{ km}, 1404.219 \text{ km}, 4697.03705 \text{ km})$
 $\mid (4368.86384 \text{ km}, 1404.219 \text{ km}, 4697.03705 \text{ km})$

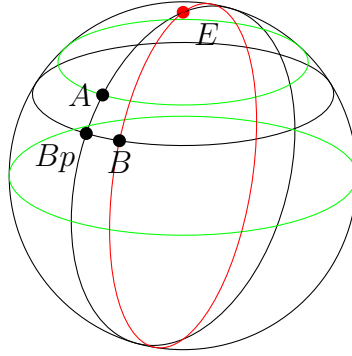
- (d) (eb)
- $$\begin{aligned} f &= \lfloor \alpha \rfloor, & m &= \lfloor \text{mod}(60\alpha, 60) \rfloor, & s &= \text{mod}(3600\alpha, 60). \\ | f &= \lfloor \alpha \rfloor, & m &= \text{mod}(60\alpha, 60), & s &= \text{mod}(3600\alpha, 60). \\ | f &= \lfloor \alpha \rfloor, & m &= \lfloor \text{mod}(60\alpha, 60) \rfloor, & s &= \text{mod}(360\alpha, 60). \\ | f &= \lfloor \alpha \rfloor, & m &= \text{mod}(60\alpha, 60), & s &= \text{mod}(360\alpha, 60). \\ | f &= \lfloor \alpha \rfloor, & m &= \lfloor \text{mod}(360\alpha, 60) \rfloor, & s &= \text{mod}(360\alpha, 60). \end{aligned}$$
- (e) (ec) 25° 45' 42.048" N, 80° 11' 30.444" W |
25° 45' 42.038" N, 80° 11' 30.444" W |
25° 45' 42.028" N, 80° 11' 30.444" W |
25° 45' 42.018" N, 80° 11' 30.444" W |
25° 45' 42.058" N, 80° 11' 30.444" W
;
Miami | New York | Tampa | Dallas | Fort Lauderdale
- (f) (ed) 0 ; 2001,0868

Mértékegység: (a) (ea)
(b) (eaa)
(c) (eab)
(d) (eb)
(e) (ec)
(f) (ed) km ; km

25. GPSTavolsag.188-194

- Feladat:** (a) (ea) Ebben a feladatban a Földet egy $R = 6371$ km sugarú gomb-nék tekintjük. A következő konvenciót használjuk a Földgömb fel-színének a koordinátázására: A hosszúsági θ koordináta a $(-180^\circ, 180^\circ]$ intervallum eleme, míg a szélességi koordináta be-nne van a $[-90^\circ, 90^\circ]$ intervallumban. Budapest pozíciója $(\theta, \phi) = (47^\circ 29' 52.48'', 19^\circ 2' 24.84'')$, de mi az egyszerűség kedvé-ért vegyük az $Bp = (47^\circ, 19^\circ)$ pontot. Továbbá két, azonos szé-lességi koron levő pont távolságát közelítsük a szélességi körnek a két város közé eső ívhosszával. (Ez tényleg csak egy közelítés, szemben az azonos hosszúsági körön levő pontok esetével.) Milyen messze lennének ekkor a Bp ponttól a következő pontok:
- A) $(48^\circ, 19^\circ)$,
 B) $(47^\circ, 20^\circ)$,
 C) $(47^\circ 0.001'', 19^\circ)$,
 D) $(47^\circ, 19^\circ 0.001'')$, A válaszodat add meg a következő mérték-egységeket használva:
 A) km, B) km, C) cm, D) cm.
- (b) (eb) Ebben a feladatban a Földet egy $R = 6371$ km sugarú gömb-nek tekintjük. A következő konvenciót használjuk a Földgömb fel-színének a koordinátázására: A hosszúsági θ koordináta a $(-180^\circ, 180^\circ]$ intervallum eleme, míg a szélességi koordináta be-nne van a $[-90^\circ, 90^\circ]$ intervallumban. Budapest pozíciója $(\theta, \phi) = (47^\circ 29' 52.48'', 19^\circ 2' 24.84'')$, de mi az egyszerűség kedvé-ért vegyük az $Bp = (47^\circ, 19^\circ)$ pontot. Továbbá két, azonos szé-lességi koron levő pont távolságát közelítsük a szélességi körnek a két város közé eső ívhosszával. (Ez tényleg csak egy közelítés, szemben az azonos hosszúsági koron levő pontok esetével.) Ha a Föld felszínét laposnak tekintjük a Bp pont körül, akkor milyen messze lenne ekkor a Bp ponttól a következő pont kilométerben mérve: $C = (47^\circ 3', 19^\circ 4')$
- (c) (ec) A Földgömbön a θ szélességi és a ϕ hosszúsági korok merő-legesen metszik egymást, ugyanez igaz azon a térképen is, ahol a (θ, ϕ) koordinátákat mint Descartes koordinátáknak használjuk. Igaz-e, hogy ha két görbe a síkbeli (θ, ϕ) térképen merőlegesen metszi egymást, akkor a nekik megfelelő görbék a Földgömbön is merőlegesen metszik egymást?

Megoldás: (a) (ea)



Legyen

$$Bp = (\theta, \phi), \quad A = (\theta + \Delta\theta, \phi), \quad B = (\theta, \phi + \Delta\phi).$$

A Bp és B pontokat tartalmazó fekete szélességi kör sugara $R \cos(\theta)$, míg a Bp és A pontokat tartalmazó hosszúsági "or sugara R . Így a $Bp - B$ ív hossza

$$\text{Ívhossz}(Bp - B) = R \cos(\theta) \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \Delta\phi,$$

míg a $Bp - A$ ív hossza

$$\text{Ívhossz}(Bp - A) = R \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \Delta\theta.$$

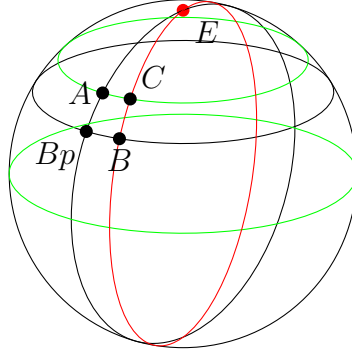
Így pl. az C) kérdésre a válasz

$$\begin{aligned} 6371 \text{ km} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 0.001'' &= 6371 \text{ km} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \frac{0.001}{3600} \\ &= 0.000030887 \text{ km} = 0.030887 \text{ m} = 3.0887 \text{ cm} \end{aligned}$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy a helyes válasz:

A) 111.1949 km, B) 75.8347 km, C) 3.0887 cm, D) 2.10652 cm.

(b) (eb)



Legyen

$$Bp = (\theta, \phi), \quad A = (\theta + \Delta\theta, \phi), \quad B = (\theta, \phi + \Delta\phi).$$

A Bp és B pontokat tartalmazó fekete szélességi kör sugara $R \cos(\theta)$, míg a B és C pontokat tartalmazó hosszúsági kör sugara R . Így a $Bp - B$ ív hossza

$$\text{Ívhossz}(Bp - B) = R \cos(\theta) \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \Delta\phi,$$

míg a $B - C$ ív hossza

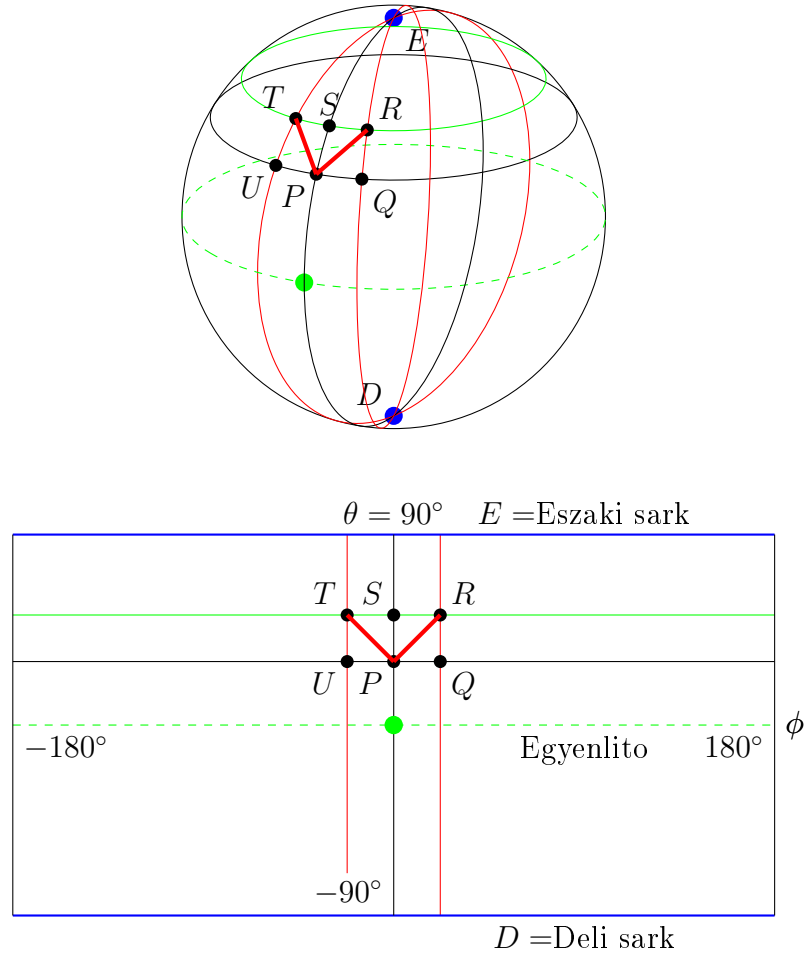
$$\text{Ívhossz}(Bp - A) = R \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \Delta\theta.$$

Mivel kis távolságokon a Föld eléggé lapos, így a $Bp - B$ és a $B - C$ ívek jól közelíthetők egyenes szakaszokkal, amelyek ráadásul jó közelítéssel merőlegesek egymásra. Tehát a Pitagorasz tételt alkalmazva megkapjuk közelítőleg a B és C pontok távolságát:

$$\begin{aligned} |\overline{BC}| &\approx \sqrt{(\text{Ívhossz}(Bp - B))^2 + (\text{Ívhossz}(B - C))^2} \\ &= \frac{2\pi R}{360^\circ} \sqrt{\Delta\theta^2 + \frac{1}{\cos^2(\theta)} \Delta\phi^2} \\ &= 7.5146 \text{ km.} \end{aligned}$$

Mivel tapasztalatunk szerint ekkora távolságokon a Földgömb felülete elég jó közelítéssel sík, így nincs túl sok okunk kételkedni a számításunkban.

(c) (ec)



Legyen pl. $\delta = 1'$,

$$P = (47^\circ, 0^\circ), \quad S = (47^\circ + \delta, 0^\circ),$$

$$Q = (47^\circ, 0^\circ + \delta), \quad U = (47^\circ, 0^\circ - \delta).$$

Ekkor az ábra also részén látható térképen a \overline{TP} és a \overline{RP} szakaszok merőlegesen találkoznak a P pontban, mivel a térképen a $|\overline{TR}|$ távolság pontosan a kétszerese az $|\overline{SP}|$ távolságnak. Viszont a Földgömbön ez az összefüggés meg közelítőleg sem áll fenn (legalábbis ha a hibát százalékban mérjük), mivel

$$|\overline{SP}| : |\overline{PQ}| \approx |\overline{SP}| : |\overline{SR}| \approx 1 : \cos(47^\circ),$$

hiszen az U, P, Q pontokat tartalmazó szélességi kör sugara csak $R \cos(\theta)$, ezzel szemben a P, S, E, D pontokat tartalmazó hosszúsági kör sugara R . Tehát az alsó térképen a PQ és a PS szakaszok egyenlőnek látszanak, de a felső Földgömbön a két hossz aránya $\cos(47^\circ) \neq 1$. Így a TP és a RP görbék nem merőlegesen metszik egymást.

Számszerű eredmény: (a) (ea) 111,1949 ; 75,8347 ; 3,0887 ; 2,10652
(b) (eb) 7,5146
(c) (ec) Nem | Igen

Mértékegység: (a) (ea) km ; km ; cm ; cm
(b) (eb) km
(c) (ec)

26. EszkimoLaposFold.197-200

Feladat: Ebben a feladatban a Földet egy $R = 6371$ km sugarú gömbnek tekintjük. Továbbá elhisszük, hogy két, azonos hosszúsági körön fekvő pont között a legrövidebb gyalogút a hosszúsági kör menten fekszik. Egy eszkimó az Északi sarkon lakik. Mivel nagyon kíváncsi, hogy tényleg lapos-e a Föld, ezért megkeresi a Föld azon pontjait, ahova el tud érni a lakóhelyéből maximum r km gyaloglás után. Ezen tartomány területét jelölje $k(r)$, amit az eszkimó gondosan megmér.

(a) Melyik állítás igaz:

- $k(r) > 2\pi r$,
- $k(r) = 2\pi r$,
- $k(r) < 2\pi r$,
- egyik sem,

ha $r > 0$?

(b) Ha a Föld nem egészen lapos, akkor $k(r) = 2\pi r$, így a laposságtól való eltérést jellemezhetjük a

$$g(r) = 1 - \frac{k(r)}{2\pi r}$$

mennyiséggel. Számold ki, hogy mennyi

$$g(1), \quad g(10), \quad g(100), \quad g(1000), \quad g(10000).$$

(c) Mivel rövid távolságokon a Föld laposnak tűnik, így $g(r) \approx 0$, ha $r \approx 0$. Az eszkimó azt feltételezi, hogy ha r nem túl nagy, akkor a

$$g(r) \approx Cr^\alpha$$

közelítés elég nagy pontossággal (vagyis százalékban merte kicsi hibával) teljesül valamilyen C és α konstansokra. Ezután az eszkimó ábrázolja a $(r, g(r))$, $r = 1, 10, 100, 1000, 10000$ pontokat a síkon.

Vajon le lehet erről az ábráról le lehet-e szabad szemmel olvasni C és α (közelítő) értékét?

(d) Ezután az eszkimó ábrázolja a

$$(\lg(r), \lg(g(r))), \quad r = 1, 10, 100, 1000$$

pontokat a síkon.

Vajon le lehet erről az ábráról le tudja-e olvasni C és α (közelítő) értékét?

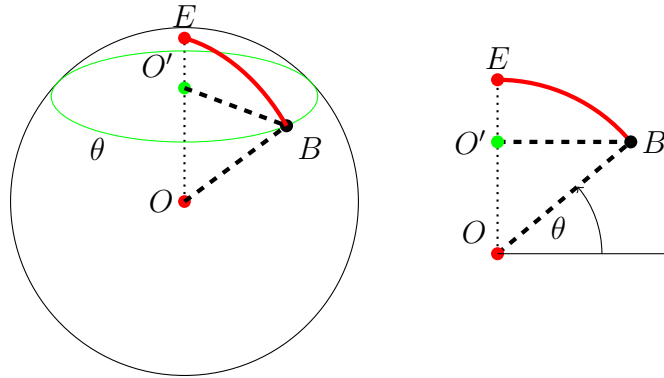
- (e) Egy másik, a digitális világ iránt érdeklődő eszkimó jobban szereti a bináris számokat, így ő a

$$(\log_2(r), \log_2(g(r))), \quad r = 1, 10, 100, 1000, 10000$$

pontokat ábrázolja. Mi a különbség a két ábra között?

- (f) Végezetül mennyi α egy értékes tizedesjegy pontossággal?

Megoldás: Az ábrán az E pont az Északi sark, vagyis az eszkimó lakóhelye.



- (a) Az ábrán az $E-B$ ív hossza r , viszont a θ szélességi kör sugara csak $|O'B|$, ami kevesebb mint az r ívhossz. Így a θ zöld színű szélességi kör $k(r)$ kerülte kevesebb, mint $2\pi r$, tehát a helyes válasz az (ii) lehetőség.
- (b) A továbbiakban a θ szöget radiánban merjük. Az $E-B$ ív hossza

$$\text{Ívhossz}(E-B) = r = R \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right),$$

tehát

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}.$$

Így

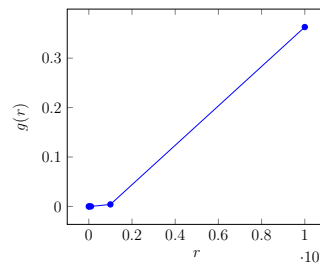
$$g(r) = 1 - \frac{k(r)}{2\pi r} = 1 - \frac{2\pi R \cos(\theta)}{2\pi r} = 1 - \frac{2\pi R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}\right)}{2\pi r},$$

mivel a szélességi kör sugara $|\overline{O'B}| = R \cos(\theta)$. Ebbe a képletbe behelyettesítve r értékeit az kapjuk, hogy

r km	1	10	100	1000	10000
$g(r)$	4.1061×10^{-9}	4.1061×10^{-7}	4.1060×10^{-5}	4.1010×10^{-3}	3.629×10^{-1}

Láthatjuk, hogy az lapos Föld hipotézis meg 1000 km távolságon is úgy fél százalékgig pontos becslést ad.

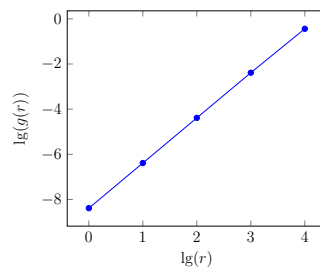
(c) Ábrázoljuk az $r \leftrightarrow g(r)$ számpárokat:



Erről az ábráról igen nehéz lenne leolvasni az eszkimónak C és α értékeit. Először is az első három $r = 1, 10, 100$ km pontok nagyjából mind a $(0,0)$ ponthoz vannak annyira közel, hogy szinte egybeesnek. Vagyis abból a részből ahol r elég kicsi ahhoz, hogy a lapos Föld hipotézis elég pontosan teljesüljön, szinte nem latunk semmit. Továbbá szabad szemmel amúgy is nagyon nehéz lenne megkülönböztetni mondjuk a különböző kitevőjük a $g(r) = r^{1.5}$ és a $g(r) = r^{2.5}$ hatványfüggvények egy kis darabkáját egymástól. Tehát nyugodtan mondhatjuk, hogy az eszkimó NEM tudja leolvasni C és α értékeit arról az ábráról.

(d) Most ábrázoljuk az $\lg(r) \leftrightarrow \lg(g(r))$ számpárokat:

$\lg(r)$	0	1	2	3	4
$\lg(g(r))$	-8.3865	-6.3865	-4.3865	-2.3871	-0.4402



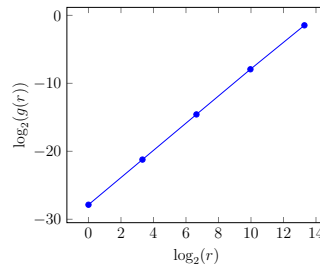
Ha $g(r)$ pontosan egyenlő lenne Cr^α -val, akkor igaz lenne, hogy

$$\lg(g(r)) = \lg(Cr^\alpha) = \lg(C) + \alpha \lg(r).$$

Ez azt jelentené, hogy az $\lg(r) \leftrightarrow \lg(g(r))$ gráfon a számpárokat reprezentáló pontok egy egyenesre esnének. Ez elég nagy pontossággal teljesül esetünkben. α értéke az egyenes meredeksége, míg $\lg(C)$ az egyenes metszéspontja a függőleges $\lg(g(r))$ tengellyel. Így a (C, α) értékek viszonylag könnyen leolvashatóak erről az ábráról.

(e) Most ábrázoljuk az $\log_2(r) \leftrightarrow \log_2(g(r))$ számpárokat:

$\log_2(r)$	0	3.3219	6.6438	9.9657	13.2877
$\log_2(g(r))$	-27.8597	-21.2157	-14.5718	-7.9297	-1.4623



Ha $g(r)$ pontosan egyenlő lenne Cr^α -val, akkor igaz lenne, hogy

$$\lg(g(r)) = \lg(Cr^\alpha) = \lg(C) + \alpha \lg(r).$$

Ehelyett a kettes alapú logaritmusnál az

$$\log_2(g(r)) = \log_2(Cr^\alpha) = \log_2(C) + \alpha \log_2(r).$$

összefüggés teljesül. Vagyis a tízes és a kettes alapú logaritmust használó ábrákon ugyanaz az egyenesek meredeksége, amiben különböznek, az a függőleges tengellyel való metszéspont helye $\lg(C)$ vagy $\log_2(C)$.

(f) Megkereshetjük az $(\lg(r), \lg(g(r)))$

$\lg(r)$	0	1	2	3	4
$\lg(g(r))$	-8.3865	-6.3865	-4.3865	-2.3871	-0.4402

pontokra legjobban illeszkedő egyenes egyenletét. Ha nem törekszünk túl nagy pontosságra, akkor ezeket a pontokat elég jól közelíti az

$$\lg(g(r)) = -8.4 + 2.0 \lg(r)$$

egyenes. Ez azt jelenti, hogy

$$g(r) \approx 10^{-8.4} \cdot r^2 \approx 4 \times 10^{-9} \cdot r^2.$$

Ha pontosabb becslést akarunk, akkor legjobban közelítő egyenesek megkereshetőek különböző programok parancsainak a segítségével, pl.:

- Mathematica: *Fit*
- SAGE: *find_fit*
- Excel: *LIN.LL*

Ezeket használva azt kapnánk, hogy

$$\lg(g(r)) \approx -8.363 + 1.978 \lg(r).$$

Megjegyzés: Ha ezt az eljárást csak nagyon kis r értékre alkalmazzuk, akkor (felhasználva a felületek geometriájának és a függvények hatványsorokkal történő közelítésének a komplikáltabb matematikai tanulmányokhoz tartozó elemleiteit) azt kapnánk, hogy $\alpha \approx 2$. A legjobban közelítő egyenes 1.978 meredekségének az ettől való eltérését az okozza, hogy figyelembe vettük az $r = 10000$ km értékhez tartozó pontot is, ami már elég nagy érték ahhoz, hogy ott már nem lenne elkerülhető a gömbi geometria pontosabb képleteinek a használata.

Számszerű eredmény: $k(r) < 2\pi r$ | $k(r) = 2\pi r$ | $k(r) > 2\pi r$ | egyik sem,

4.1061×10^{-9} | 4.1061×10^{-8} ;

4.1061×10^{-7} | 4.1061×10^{-8} ;

4.1060×10^{-5} | 4.1060×10^{-4} ;

4.1010×10^{-3} | 4.1010×10^{-4} ;

3.629×10^{-1} | 3.629×10^{-2}

Nem | Igen

Igen | Nem

Máshol metszi a függvény az y -tengelyt | Más a függvény meredeksége | Semmi

0,5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5

Mértékegység:

27. VakPokHangya.201-203

Feladat: (a) (eb) Egy pontszerű vak pók egy 1 m élhosszú kocka egyik csúcsán lakik. A pók úgy húsz centinél messzebbre soha sem távolodik el a lakóhelyétől, továbbá a környezetéből csak annyit érzékel, hogy meg tudja különböztetni annak pontjait egymástól, és meg tudja mérni, hogy két pont között minimálisan mennyit kell másznia, hogy eljusson az egyik pontból a másikba. Azt viszont, hogy az útvonala pl. keresztez egy élt, azt már nem veszi észre.

A vak pók hobbjai az Euklideszi síkgeometria, így megpróbálja ellenőrizni, hogy tényleg sík-e a világa. Ezért megkeresi a környezete azon pontjait, ahova el tud érni a lakóhelyéből maximum r cm mászás után. Ezen tartomány területét jelölje $k(r)$, amit a pók gondosan megmér.

i. Melyik állítás igaz?

- $k(r) > 2\pi r$,
- $k(r) = 2\pi r$,
- $k(r) < 2\pi r$,
- egyik sem.

ha $r > 0$?

ii. Ha a világ síkszerű, akkor $k(r) = 2\pi r$, így a síkszerűségtől való eltérést jellemezhetjük a

$$g(r) = 1 - \frac{k(r)}{2\pi r}$$

mennyiséggel. Számold ki, hogy mennyi $g(1)$ és $g(10)$.

(b) (ec) Egy pontszerű vak hangya egy 1 m élhosszú kocka egyik éle közepén lakik. A hangya úgy húsz centinél messzebbre soha sem távolodik el a lakóhelyétől, továbbá a környezetéből csak annyit érzékel, hogy meg tudja különböztetni annak pontjait egymástól, és meg tudja mérni, hogy két pont között minimálisan mennyit kell másznia, hogy eljusson az egyik pontból a másikba. Azt viszont, hogy az útvonala pl. keresztez egy élt, azt már nem veszi észre.

A vak hangya hobbjai az Euklideszi síkgeometria, így megpróbálja ellenőrizni, hogy tényleg sík-e a világa. Ezért megkeresi a környezete azon pontjait, ahova el tud érni a lakóhelyéből maximum r cm mászás után. Ezen tartomány területét jelölje $k(r)$, amit a hangya gondosan megmér.

i. Melyik állítás igaz?

- $k(r) > 2\pi r$,
- $k(r) = 2\pi r$,
- $k(r) < 2\pi r$,
- egyik sem.

ha $r > 0$?

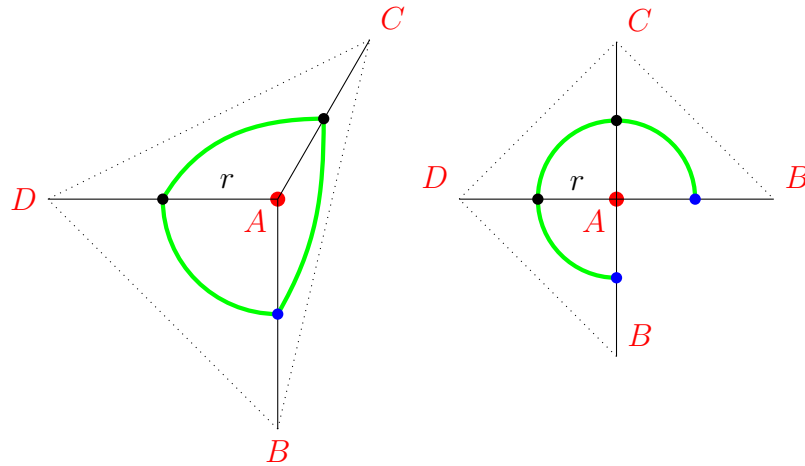
- ii. Ha a világ síkszerű, akkor $k(r) = 2\pi r$, így a síkszerűségtől való eltérést jellemezhetjük a

$$g(r) = 1 - \frac{k(r)}{2\pi r}$$

mennyiséggel. Számold ki, hogy mennyi $g(1)$ és $g(10)$.

Megoldás: (a) (eb)

A pók az ábrán látható kocka A csúcsán lakik.



Ha a kockát felületet elvágjuk az AB élnél, akkor az A pontban találkozó három lap kiteríthető a síkba, amit azt a jobboldali ábra illusztrálja. Itt az A ponttól r távolságra levő pontok egy r sugarú körnek a három megfelelő soknegyedekbe eső része lesz. Ez persze a baloldali, háromdimenziós ábrán egy zárt görbe. Ennek a kerülete

$$k(r) = 2\pi r \cdot \frac{3}{4} = 1.5\pi r.$$

Ez kevesebb mint az Euklideszi geometria $2\pi r$ körkerülete. Továbbá

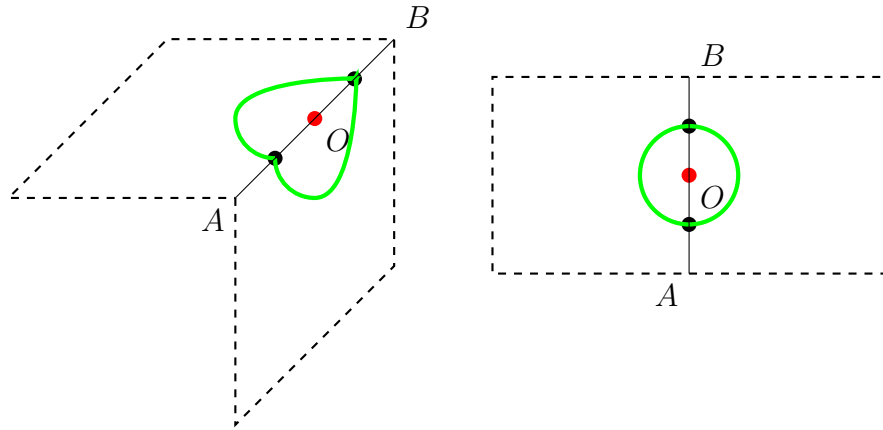
$$g(r) = 1 - \frac{k(r)}{2\pi r} = 1 - \frac{1.5}{2} = 0.25.$$

Tehát a válasz:

- $k(r) < 2\pi r$,
- $g(1) = g(10) = 0.25$.

Ezek szerint a vak pók képes volt felfedezni, hogy a világában a geometria nem Euklideszi. Ezt a való világban Einstein fedezte fel.

- (b) (ec) A hangya az ábrán látható kocka AB élen levő O pontban lakik.



Mivel az AB élen találkozó két oldal kiteríthető a síkba (mint az a jobb oldali ábrán látható), így a hangya nem tudja megkülönböztetni a környezete geometriáját a standard Euklideszi geometriától. Az O ponttól az $r = |OA|$ távolságra levő pontok halmaza a jobb oldali ábrán egy r sugarú körön helyezkednek el, így a hangya az érzékeli, hogy $k(r) = 2\pi r$. Tehát az Euklideszi geometriától való eltérést mérő

$$g(r) = 1 - \frac{k(r)}{2\pi r} = 0$$

függvény azonosan nulla. Így a helyes válasz:

- $k(r) = 2\pi r$,
- $g(1) = g(10) = 0$

Ezek szerint a vak hangya azt látja, hogy a kétdimenziós világában a geometria Euklideszi. Vagyis az ő számára elérhető mérési adatokból nem jöhetett rá arra, hogy a tér görbült, amit azt a való világban Einstein fedezte fel.

Számszerű eredmény: (a) (eb)
 $k(r) < 2\pi r \mid k(r) = 2\pi r \mid k(r) > 2\pi r \mid$ egyik sem
 ;
 0,25 ; 0,25

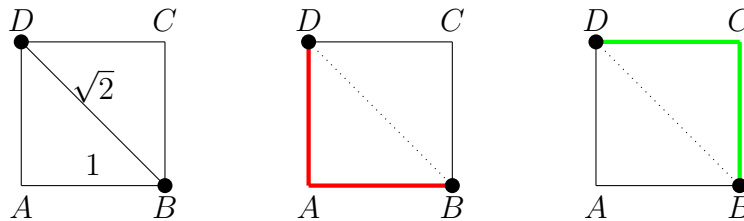
- (b) (ec) $k(r) = 2\pi r \mid k(r) > 2\pi r \mid k(r) < 2\pi r \mid$ egyik sem
;
 $0 ; 0$

Mértékegység:

28. KockaCsucsUt.204-206

- Feladat:** (a) (ea) Milyen messze van egy egységnégyzet két átlellenes csúcsa, ha a két csúcs között
- csak légvonalban haladhatunk?
 - csak az oldalak mentén haladhatunk?
 - Hány féle legövidebb út van az oldalak mentén a két átlellenes csúcs között?
- (b) (eb) Milyen messze van egy egyégekocka két átlellenes csúcsa, ha a két csúcs között
- légvonalban,
 - csak az oldalak mentén
 - csak az élek mentén haladhatunk?
 - Hány féle legrövidebb út van az oldalak mentén,
 - az élek mentén,
 - légvonalban a két átlellenes csúcs között?

Megoldás: (a) (ea)



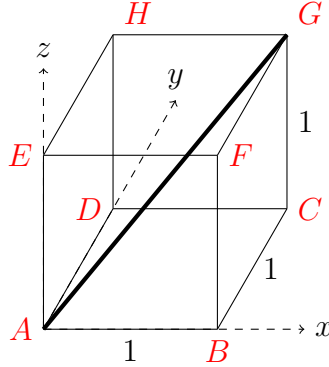
- i. A Pitagorasz tétel szerint

$$|\overline{BD}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

- A B és D pontok távolsága az oldalak mentén nyilván 2, pl. haladhatunk a piros $B - A - D$ úton.
- Két lehetőség van, hiszen a B pontból először mehetünk A felé (piros út), illetve a C csúcs felé (zöld út).

(b) (eb)

i.



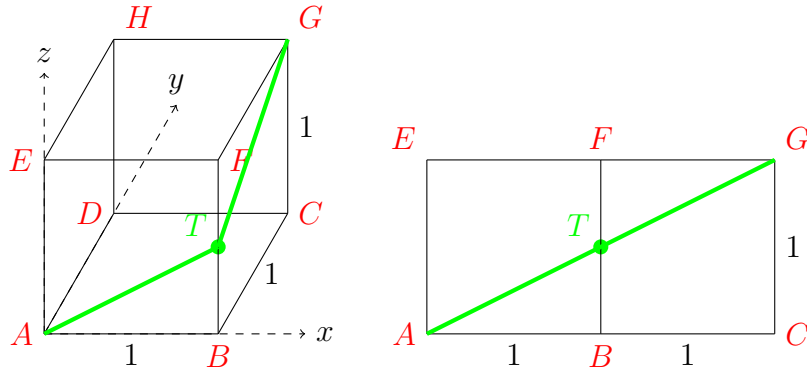
A két áttellenes $A = (0, 0, 0)$ és $G = (1, 1, 1)$ pont távolsága a háromdimenziós Pitagorasz tétel segítségével számítható ki:

$$|\overline{AG}| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3} = 1.7320 \dots$$

ii. Az oldallapok mentén haladó legrövidebb út valahol metszeni fogja a

$$B - F - E - H - D - C - B$$

törtvonalat. Történjen meg ez mondjuk az FB élen. Ekkor az FB él mentén kiterítve az ott érintkező két oldalt megkapjuk a jobb oldali ábrát:



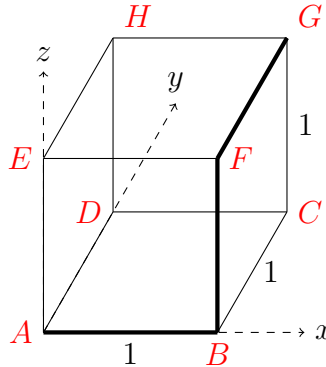
Ezen látható, hogy a T pont felezi az FB élt, így $T = (1, 0, 0.5)$. A legrövidebb $A - T - G$ út hosszát kiszámíthatjuk a háromdimenziós Pitagorasz tétel segítségével:

$$\begin{aligned} \text{Ívhossz}(A - T - G) &= |\overline{AT}| + |\overline{TG}| \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (0.5-0)^2} \\ &\quad + \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0.5)^2}. \end{aligned}$$

Vagy a jobb oldali ábrán használhatjuk a 2d Pitagorasz tételt:

$$\text{Ívhossz}(A - T - G) = |\overline{AG}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2.2360 \dots$$

iii.



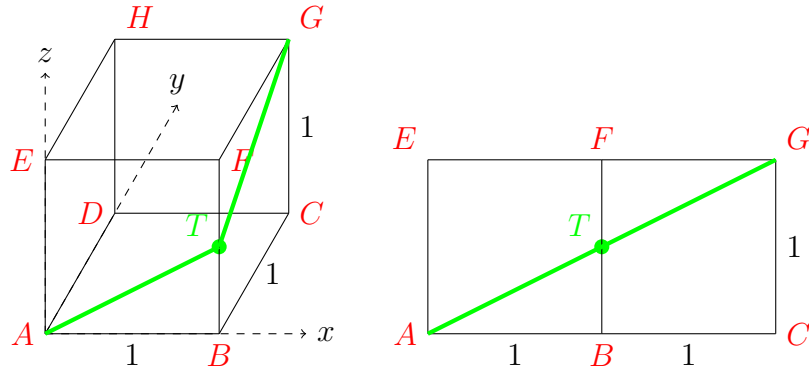
A két átellenes $A = (0, 0, 0)$ és $G = (1, 1, 1)$ pont távolsága az élek mentén haladva nyilvánvalóan 3. Hiszen egy él két végpontjánál a három-három koordinátából csak egy különbözhet pontosan eggyel, a másik két koordinátának ugyanannak kell lennie. Tehát ha áthaladunk egy élen, akkor egy koordinátát tudunk megváltoztatni, viszont az A és a G pontoknak mindhárom koordinátája különbözik. Így legalább három élen keresztül halad a legrövidebb út. Ennyi viszont elég is, mint azt az ábrán látható, vastag vonallal jelzett $A - B - F - G$ útvonal illusztrálja.

iv. Az oldallapok mentén halado legrövidebb út valahol metszeni fogja a

$$B - F - E - H - D - C - B$$

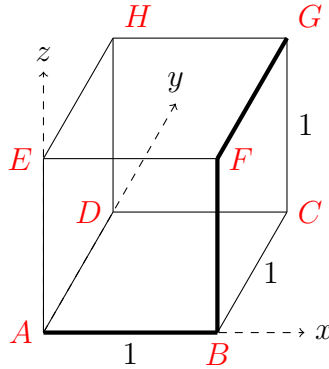
törtvonalat. Történjen meg ez mondjuk az FB élen. Ekkor az FB él mentén kiterítve az ottérintkező két oldalt megkapjuk

a jobb oldali ábrát:



Ezen látható, hogy a T pont felezi az FB élt, így $T = (1, 0, 0.5)$. Persze nem kötelező az $B - F - E - H - D - C - B$ törtvonalnak az FB szakaszt választanunk ahhoz, hogy a közbülső T pontot megkonstruáljuk, bármelyik másik szakasz a törtvonalból is ugyanolyan jó lenne. Így összesen 6 lehetőséget kapunk, hiszen ennyi szakasz alkotja a törtvonalat.

v.



A két átellenes $A = (0, 0, 0)$ és $G = (1, 1, 1)$ pont távolsága az élek mentén haladva nyilvánvaóan 3. Hiszen egy él két végpontjánál a három-három koordinátából csak egy különbözhet pontosan eggyel, a másik két koordinátának ugyanannak kell lennie. Tehát ha áthaladunk egy élen, akkor egy koordinátát tudunk megváltoztatni, viszont az A és a G pontoknak mindhárom koordinátája különbözik. Így legalább három élen keresztül halad a legrövidebb út. Ennyi viszont elég is, mint azt az ábrán látható, vastag vonallal jelzett $A - B - F - G$ útvonal illusztrálja.

Azt, hogy hány ilyen különböző legrövidebb út létezik, azt a következőképpen határozhatjuk meg. Az ábrán látható $A - B - F - G$ útvonalon a megváltoztatandó koordináták sorrendje:

$$AB : x, \quad BF : z, \quad FG : y,$$

vagyis xyz . Annyi különböző legrövidebb útvonal létezik, ahányféleképpen egymás után rakhatjuk az x, y, z betűket, vagyis a válasz $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

- vi. Légvonalban az Euklideszi geometriában két pont között csak egy legrövidebb út van, az őket összekötő egyenes szakasz. Tehát a válasz 1.

Számszerű eredmény: (a) (ea)
1,4142 ; 2 ; 2
(b) (eb) 1,7320 ; 2,2360 ; 3 ; 6 ; 6 ; 1

Mértékegység:

29. Feladatlista

TeglaAtloEgyenlotlenseg.1-11

```
a b c d e f
1_17_2_12 a
2_17_3_12 b
3_17_4_12 a b
4_17_2_12 c
5_17_2_12 d
6_17_2_12 e
7_17_2_12 f
8_17_3_12 c d
9_17_3_12 e f
10_17_3_12 c d e
11_17_3_12 c d e f
```

teglaElAtloTestatlo.12-24

```
a b c d e f aa ca
12_17_2_12 a
15_17_3_12 c
18_17_2_9 d
21_17_4_10 d e
24_17_5_12 d e f
13_17_2_12 aa
16_17_4_12 b c
19_17_3_10 e
22_17_5_12 d f
14_17_4_12 b
17_17_2_9 ca
20_17_5_12 f
23_17_5_12 e f
```

kockaVilagitasIranyok.25-36

```
ai aii aiii bi bii biii a b
25_17_3_12 a ai
26_17_3_12 a aii
27_17_3_12 a aiii
28_17_4_12 a ai aii aiii
29_17_2_12 b bi
30_17_3_12 b bii
31_17_3_12 b biii
32_17_4_12 b bi bii biii
33_17_5_12 a b
34_17_3_12 a ai b bi
35_17_3_12 a aii b bii
36_17_3_12 a aiii b biii
```

TeglaMertaniSor.37-44

```
a b c ca cb d da
37_17_3_10 a
38_17_3_12 b
39_17_3_12 a b
40_17_3_10 c
41_17_3_10 ca
42_17_3_10 cb
```

43_17_3_10 d
44_17_3_10 da

KockaArnyekCsillagfeny.45-52

a b c d e
45_17_1_9 a
46_17_5_9 b
47_17_2_9 c
48_17_3_9 d
49_17_4_9 e
50_17_4_9 c d
51_17_4_9 c e
52_17_4_9 d e

kockaArnyekPontlampa.53-61

a b c d e
53_17_1_9 a
54_17_5_9 b
55_17_5_9 a b
56_17_2_9 c
57_17_2_9 d
58_17_3_9 e
59_17_4_9 c d
60_17_4_9 c e
61_17_4_9 a e

KerekAsztalArnyek.62-64

a b c
62_17_5_10 a
63_17_4_10 b
64_17_4_10 c

NegyzetAsztalArnyek.65-67

a b c
65_17_5_10 a
66_17_4_10 b
67_17_4_10 c

KockaFestes.68-74

a b c d
68_17_1_10 a
69_17_2_10 b
70_17_2_10 c
71_17_2_10 d
72_17_3_10 a b
73_17_3_10 a c
74_17_3_10 a d

NegyszogKornyezet Terulet.75-92

a b c d e f g h i j
75_17_4_12 a b
76_17_4_12 a c
77_17_4_12 a d
78_17_4_12 a e
79_17_4_12 a f
80_17_4_12 b
81_17_4_12 c
82_17_4_12 d
83_17_4_12 e
84_17_4_12 f
85_17_4_12 g
86_17_4_12 b g
87_17_4_12 h
88_17_4_12 b h
89_17_4_12 i
90_17_4_12 b i
91_17_4_12 j
92_17_4_12 j i

Kivagas.93-95

a b
93_17_4_9 a
94_17_4_9 b
95_17_4_9 a b

KetTetraeder.96-102

a b c d e f g
96_17_2_9 a
97_17_3_10 a b
98_17_3_12 a b c
99_17_4_12 a b c d
100_17_5_12 a b c d e
101_17_5_12 a b c d e f
102_17_5_12 a b c d e f g

NovekvoTeglaLapTest.103-105

a b
103_17_2_9 a
104_17_2_9 b
105_17_2_9 a b

KivagasTeruletTerfogatTegla.106-112

a b c
106_17_2_9 a
107_17_2_9 b
108_17_1_9 c
109_17_2_9 a b
110_17_2_9 a c
111_17_3_9 b c
112_17_3_9 a b c

KivagasTeruletTerfogatEk.113-120

a b c d
113_17_2_12 a
114_17_2_12 b
115_17_1_12 c
116_17_2_12 a b
117_17_2_12 a c
118_17_3_12 b c
119_17_3_12 a b c
120_17_3_12 d

TeglaSzamtaniSor.121-123

a b
121_17_3_10 a
122_17_4_10 b
123_17_4_10 a b

KivagasTeruletTerfogatCsonkaGula.124-130

a b c
124_17_2_9 a
125_17_2_9 b
126_17_3_9 c
127_17_2_9 a b
128_17_3_9 a c
129_17_3_9 b c
130_17_3_9 a b c

KivagasTeruletTerfogatCsonkaGulaII.131-13

a b c
131_17_2_9 a
132_17_2_12 b
133_17_3_12 c
134_17_2_12 a b
135_17_3_12 a c
136_17_3_12 b c
137_17_3_12 a b c

KivagasTeruletTerfogatEkII.138-144

a b c
138_17_2_12 a
139_17_2_12 b
140_17_1_12 c
141_17_2_12 a b
142_17_2_12 a c
143_17_3_12 b c
144_17_3_12 a b c

KockaCsucsTavolsag.145-152

a b c d
145_17_2_9 a
146_17_4_12 b
147_17_4_12 a b
148_17_2_12 c

149_17_3_12 d
150_17_2_12 a c
151_17_4_12 b d
152_17_5_12 a b c d

KockaCsucsKodolas.153-161

a b c d e f
153_17_2_9 a b
154_17_3_12 c d
155_17_3_12 a b c d
156_17_3_12 d e
157_17_2_12 f
158_17_3_12 d f
159_17_4_12 e d f
160_17_4_12 b d f
161_17_5_12 a b c d e f

KockaCsucsJavitoKodolas.162-173

a b c d e f
162_17_2_9 a
163_17_3_9 b
164_17_4_9 c
165_17_4_12 d
166_17_4_12 e
167_17_5_12 f
168_17_3_9 a b
169_17_3_9 b c
170_17_4_12 a b c
171_17_4_12 c d
172_17_5_12 c e
173_17_5_12 e f

GombKockaGeodetikus.174-180

a b c
174_17_3_12 a
175_17_5_12 b
176_17_2_12 c
177_17_5_12 a b
178_17_5_12 b c
179_17_5_12 a c
180_17_3_12 a b c

GPS.181-187

a aa ab b c d
181_17_2_9 a
182_17_2_9 aa
183_17_5_12 ab
184_17_5_12 b
185_17_2_9 c
186_17_2_9 d
187_17_5_12 b c

GPSTavolsag.188-194

a b c
188_17_3_12 a
189_17_3_12 b
190_17_4_12 c
191_17_3_12 a b
192_17_4_12 a c
193_17_4_12 b c
194_17_4_12 a b c

EszkimoLaposFold.197-200

a b c d e f
197_17_2_12 a
198_17_3_12 a b
199_17_4_12 a b c d
200_17_5_12 a b c d e f

VakPokHangya.201-203

b c
201_17_3_9 b
202_17_2_9 c
203_17_3_9 b c

KockaCsucsUt.204-206

a b
204_17_2_10 a
205_17_3_10 b
206_17_3_10 a b