① Legyen $a_n = \frac{1}{(7n)^2}$, $\varepsilon = 0.0001$. Keresd meg a határérték definíciójában szereplő legkissebb N_ε küszöbindexet!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \left| \frac{1}{(7n)^2} - 0 \right| \leqslant 0.0001$$

$$\frac{1}{(7n)^2} \leqslant 0.0001$$

$$n \geqslant \frac{\sqrt{1/0.0001}}{7} \approx 14.28$$

tehát $N_\varepsilon = 15$

---

② a) Legyen $\varphi(x) = -2x+6$. Mennyi $\varphi^{-1}(x)$?

$$y = -2x+6$$

$$x = \frac{y-6}{-2} = -\frac{y}{2} + 3$$

$$f^{-1}(y) = -\frac{y}{2} + 3$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + 3$$

---

b) Legyen $x_0 = 1$. Mennyi $\varphi^{13}(x_0)$?

① φ fixpontja: $x_f = -2x_f + 6 \longrightarrow x_f = 2$

② x_0 fixponttól való eltérése: $\Delta x_0 = x_0 - x_f = x_0 - 2$

③ 'φ hatása' Δx-en: $\tilde{\varphi}(\Delta x) = -2 \cdot \Delta x$

$$\tilde{\varphi}^{13}(\Delta x) = (-2)^{13} \Delta x$$

④ $\varphi^{13}(1) = (-2)^{13} \underbrace{(1-2)}_{\Delta x_0} + 2$

transzformáció $\Delta x \to x$

$x = \Delta x + x_f = \Delta x + 2$

3 a) Lineáris közelítés: $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$

Legyen $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = 5$. Írd fel f lineáris közelítését x_0 körül!

$f'(x) = -3x^{-4}$, $f(5) = \frac{1}{5^3}$, $f'(5) = -3 \cdot \frac{1}{5^4}$

$$f(5+\Delta x) \approx \frac{1}{5^3} + \left(-3 \cdot \frac{1}{5^4}\right)\Delta x$$

b) Lineáris közelítés hiba becslése:

$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + hiba(\Delta x)$

$$|hiba(\Delta x)| \leq \frac{1}{2}\Delta x^2 \cdot \max_{z \in [x, x+\Delta x]} |f''(z)|$$

$$f''(x) = -3 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = 12x^{-5} = \frac{12}{z^5}$$

$$\max_{z \in [5, 5+\Delta x]} \left|\frac{12}{z^5}\right| = \frac{12}{5^5}$$ (ha $\Delta x > 0$, mivel $\frac{12}{x^5}$ csökkenő $[5, 5+\Delta x]$-en)

Tehát

$$|hiba(\Delta x)| \leq \frac{1}{2}\Delta x^2 \cdot \frac{12}{5^5}$$

④ Hatványsor konvergencia sugara.

Tétel: Ha létezik $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, és $q<1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+\dots$ sor konvergens.

Ha $q>1$, akkor a sor divergens.

a) Milyen x-ekre konvergens $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$? (Ez e^x hatványsora.)

$$a_n=\frac{x^n}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{x^n\cdot x}{n!\,(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n\cdot x}{n!(n+1)}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x}{n!(n+1)}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0$$ bármely x-re, így a sor konvergens az $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ intervallumon, tehát a konvergenciasugár ∞.

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$$

$$a_n=\frac{3^n x^n}{n^2},\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{3^n\cdot 3\cdot x^n\cdot x}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot 3\cdot x^n\cdot x}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{3^n\cdot x^n}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|3x\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = |3x|$$

$|3x|<1$, ha $|x|<\frac{1}{3}$, így a sor konvergens az $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ intervallumon, tehát a konvergenciasugár $\frac{1}{3}$.