A tantárgy neve: Matematika I.	**Tantárgy kódja:** GEMAN011B (anyagmérnök nappali BSc + felsőf. szakk.)
Heti óraszám: 3+3 (6 kredit)	**A tárgy lezárása:** aláírás + kollokvium
Oktatók: Dr. Varga Péter	**ETF (előtan. feltétel): ---**

Algebra, lineáris algebra:

1. Komplex számok. Műveletek algebrai és trigonometrikus alakban. Polinomok, gyöktényezős alak, poinomok maradékos osztása.
2. Műveletek síkbeli, térbeli és n-dimenziós vektorokkal.
3. Hajlásszög, vetületvektor, terület, térfogat számolása vektorműveletek segítségével.
4. Néhány térgörbe és felület leírása vektorokkal.
5. Determinánsok. Műveletek mátrixokkal, inverz mátrix, saj'tvektorok.
6. Lineáris egyenletrendszerek megoldása Cramer- szabállyal, eliminációval.

Számsorozatok, egyváltozós valós függvények (f : R→R)***:***

7. Számsorozatok konvergenciája. Néhány nevezetes határérték.
8. Fogalmak egyváltozós valós függvény jellemzésére: ért. t. – ért. k., szimmetriák, monotonitás – szélsőérték, konvexitás – inflexiós pont, korlátosság, aszimptóták, folytonosság – szakadási helyek. Inverz függvény.
9. Hatvány, exponenciális, logaritmus és hiperbolikusz függvények.
10. Trigonometrikus és arkusz függvények.

Differenciálszámítás (egyv. valós fgv.):

11. A differenciálhányados értelmezése, a derivált fogalma. Alapfüggvények deriváltja. Deriválási szabályok.
12. Sebesség, gyorsulás. Síkgörbe érintője. Taylor-polinom.
13. Függvényvizsgálat: monotonitás-lokális szélsőérték, konvexitás-inflexiós pont.

Tantárgyi követelmények:

1. A félév elismerésének feltételei:
2. Aláírás: a két félévközi zárthelyi legalább elégséges szintű teljesítése.
3. Sikeres vizsga

Ajánlott jegyzetek:

(1) SZARKA ZOLTÁN – RAISZ PÉTERNÉ: Matematika I., II., Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998.
(2) KÁLOVICS FERENC: Matematikai analízis mérnökhallgatóknak, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1997.
Az (1) alatti két jegyzetet mindenkinek, a (2) alatti jegyzetet csak jó középiskolai háttérrel rendelkező hallgatóknak ajánljuk.

1. hét

Komplex számok. Műveletek algebrai és trigonometrikus alakban.

Ismétlés: N, Z, Q, R, …

Műveletek algebrai alakban:

Számolási szabály: mint többtagú kifejezésekkel, csak $i \cdot i = i^2 = -1$.

Ábrázolás, elnevezések:

Re z, Im z, $\overline{z}$, $|z|$.

Műveletek trigonometrikus alakban:

Ábra, $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás trigonometrikus alakban (az első képlet levezetése).

Feladatok

1. Végezzük el algebrai alakban a következő műveleteket: $(3+5i)(1-i)$, $(2+3i)-(2+i)+\dfrac{2+3i}{2+i}$, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$, $(1+i)^3$, $\sqrt[3]{1}$.

2. Adja meg a következő kifejezések értékeit algebrai alakban: $\mathrm{Re}(2+3i)-\mathrm{Im}(2+i)+\left|\dfrac{i}{2-i}\right|$, $\overline{3-i}+\sqrt{-4}$.

3. Számítsuk ki a következő értékeket algebrai vagy (és) trigonometrikus alakban : $(1-i)^{16}$, $(1+i)(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)$, $\sqrt{-1+i}$, $\sqrt[3]{8i}$.

4. Oldja meg a következő egyenleteket C-ben: $z^2-2z+2=0$, $x^5+x^3-x^2-1=0$.

2. hét

Műveletek vektorokkal

Elnevezések:

Síkbeli-térbeli vektorok, szabad vektor, $|\overline{a}|$, $\overline{a}_0$ egységvektor, nullvektor, hajlásszög.

Műveletek geom.-i értelmezése térbeli vektorokra:

Összeadás: 2 ábra, tulajdonságok: komm., asszoc., invert.

Kivonás: $\overline{a}-\overline{b}\equiv\overline{a}+\overline{b}_{\text{inv.}}$, 2 ábra

Szorzás számmal: 1 ábra, tulajdonságok: $\alpha(\beta\overline{a})=(\alpha\cdot\beta)\overline{a},\quad \alpha\overline{a}+\beta\overline{a}=(\alpha+\beta)\overline{a},\quad \ldots$

Skaláris szorzat: 1 ábra, tulajdonságok: komm., disztrib.

Vektoriális szorzat: 1 ábra, tulajdonságok: $\overline{a}\times\overline{b}=-(\overline{b}\times\overline{a})$, disztrib.

Vegyesszorzat: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$, tulajdonságok:

$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\overline{b}\overline{c}\overline{a}=\overline{c}\overline{a}\overline{b},\quad \overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{b}\overline{a}\overline{c}$

Műveletek koordinátákkal adott térbeli vektorokkal:

Ábra, $\overrightarrow{OA}=\overline{a}=a_1\overline{i}+a_2\overline{j}+a_3\overline{k}=(a_1,a_2,a_3)$; $|\overline{a}|=\ldots$, $\overline{a}_0=\ldots$

$\overline{a}+\overline{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1\overline{i}+a_2\overline{j}+a_3\overline{k})+(b_1\overline{i}+b_2\overline{j}+b_3\overline{k})=(a_1+b_1)\overline{i}+\ldots=(a_1+a_2,\ldots)$

$\overline{a}-\overline{b}=\ldots$

$\lambda\overline{a}=\ldots$

$\overline{a}\overline{b}=\ldots$

$\overline{a}\times\overline{b}=\ldots$

$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\ldots$

Műveletek n-dimenziós vektorokkal:

Az első 4 művelet értelmezése.

Feladatok

1. Legyenek $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ egy térbeli háromszög csúcspontjaihoz mutató helyvektorok. Adja meg a súlyponthoz mutató helyvektort ezen vektorok segítségével!

2. Legyen $\overline{v}=(3,-2,\sqrt{3})$. Ábrázolja $\overline{v}-t$ és $\overline{v}_0-t$! Számítsa ki $|\overline{v}|-t$ és $\overline{v}_0-t$!

3. Legyen $\overline{a}=2\overline{i}+2\overline{j}$, $\overline{b}=(1,-1,3)$, $\overline{c}=-3\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$. Számítsa ki a következőket:
   $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{b}-\overline{c}$, $5\overline{b}$, $-\overline{a}$, $\overline{a}\cdot\overline{b}$, $\overline{c}\cdot\overline{b}$, $\overline{a}\times\overline{b}$, $\overline{b}\times\overline{a}$, $\overline{c}\times\overline{a}$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, $\overline{b}\overline{a}\overline{c}$, $\overline{c}\overline{a}\overline{b}$.

4. Legyen $\overline{a}=(2,\ 1,\ -1,\ 3)$, $\overline{b}=(1,\ -1,\ 3,\ 2)$. Számítsa ki $\overline{b}(2\overline{a}+\overline{b})$ értékét !

3. hét

Vektorok alkalmazásai I.

Erők eredője:

Ábra, $F = F_1 + F_2$.

Munka kiszámítása:

Ábra, $W = F \cdot s$. Ábra, $W = F \cdot s$.

Hajlásszög:

Ábrák, $\cos\gamma = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$, merőlegesség.

Vetületvektor:

Ábrák, $\bar{v} = \left(\bar{a} \cdot \bar{b}_0\right)\bar{b}_0$.

Paralelogramma, háromszög területe:

Ábrák, $T_{par.} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$, $T_{hsz.} = \dfrac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$, párhuzamosság.

Paralelepipedon térfogata:

Ábra, $V_{pl.} = A_t \cdot m = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \cdot m = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \cdot |\bar{c}| \cos\gamma = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$, ahol γ hegyesszög . $V_{pl.} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Három vektor egy síkban …

Feladatok

1. Legyen $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j}$, $\bar{c} = (2,0,2)$. Mutassa meg a következő 3 tulajdonságot: $\bar{a} \perp \bar{c}$, az $\bar{a} \times \bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok párhuzamosak, továbbá az $\bar{a}$, $\bar{b}$, $(4, 2, -4)$ vektorok egy síkban vannak !

2. Legyen $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = (2, -2, 1)$. Számítsa ki a két vektor által meghatározott paralelogramma területét és $\bar{a}$ -nak a $\bar{b}$ -re eső merőleges vetületvektorát!
3. Legyen $\bar{a} = (3, 0, 3)$, $\bar{b} = \bar{i} + \sqrt{6}\,\bar{j} + \bar{k}$. Számítsa ki a két vektor hajlásszögét és $\bar{b}$ -nek az $\bar{a}$ -ra eső merőleges vetületvektorát!

4. Legyen $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = (-1, 3, 2)$, $\bar{c} = \bar{j} - \bar{k}$. Számítsa ki: $\bar{a}$ és $\bar{c}$ hajlásszögét, az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ által meghatározott háromszög területét, az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ által meghatározott paralelepipedon térfogatát !

4. hét

Vektorok alkalmazásai II.

Egyenes egyenlete:

Ábra, $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t\bar{v}$, paraméteres egyenletrendszer.

Csavarvonal egyenlete:

Ábra, pl.: $\bar{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ t),\quad t \in [0, 2\pi)$.

Viviani-görbe egyenlete:

Ábra, pl.: $\bar{r}(t) = \left(1+\cos t,\ \sin t,\ \sqrt{2-2\cos t}\right) = \left(1+\cos t,\ \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right)\quad t \in [0, 2\pi)$.

Sík egyenlete:

Ábra, $\bar{r}(\alpha, \beta) = \bar{r}_0 + \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$, paraméteres egyenletrendszer.

Ábra, $\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0) = 0,\quad Ax + By + Cz = D$.

Hengerfelület egyenlete:

Ábra, $\bar{r}(\alpha, \beta) = \bar{r}_{vg}(\alpha) + \beta\bar{a}$, ahol …

Feladatok

1. Adja meg a $P_1(1,1,0)$, $P_2(2,2,3)$ pontokon átmenő egyenes és a $Q_1(2,0,0)$, $Q_2(0,3,0)$, $Q_3(0,0,4)$ pontokon átmenő sík döféspontját!

2. Adja meg a $P_1(1,2,-1)$ és $P_2(3,2,2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét! Adja meg az egyenes döféspontjait a koordinátasíkokkal, adja meg az egyenes origótól mért távolságát !

3. Adja meg a (0, 3, 0) középpontú, 2 egység sugarú, az (x, z) síkkal párhuzamos körvonal pontjaihoz mutató helyvektort! Milyen paraméterértéknél kapja meg a (2, 3, 0), (0, 3, 2) ill. (0, 3, -2) pontokat?

4. Adja meg a (0, 3, 0) középpontú, 2 egység sugarú, az (x, z) síkkal párhuzamos körvonal és az $\bar{a} = (0,1,0)$ vektor (alkotók irányvektora) által meghatározott végtelen hengerfelület pontjaihoz mutató helyvektort! Milyen paraméterértékeknél kapja meg a (2, 7, 0), (0, 9, 2) ill. (0, 1, 2) pontokat?

5. hét

Determinánsok

<u>Definíció:</u> A valós vagy komplex számokból (kifejezésekből) … (definíció első sor szerinti kifejtéssel).
<u>Tulajdonságok:</u>

(1) A definícióban szereplő kifejtést az első sor helyett végezhetjük másik sor vagy oszlop szerint is, ha figyelembe vesszük az előjelszabályt.
(2) Ha két sort felcserélünk, akkor a determináns értéke (-1)-szeresre változik.
(3) A determináns értéke nem változik, ha valamely sor (oszlop) számszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz (oszlophoz).

<u>Elimináció:</u>
A (2) és (3) tulajdonság felhasználásával elérjük, hogy a főátló alatt csupa 0 legyen. Ekkor a determináns értékét a főátlóban szereplő elemek szorzata adja meg.

Mátrixok

<u>Definíció:</u> A valós számokból (kifejezésekből) felépített …
Összeadás: …, tul.: komm., asszoc., invert.;
Kivonás: …, tul.: ---
Szorzás számmal: …, tul.: $(\alpha\beta)\underline{\underline{A}} = \alpha(\beta\underline{\underline{A}}),\quad \lambda(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}) = \lambda\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}};$
Szorzás: …, tul.: asszoc., disztrib.
<u>Inverz mátrix:</u>

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \det\underline{\underline{A}} \neq 0,\quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} +D_{11} & -D_{21} & \dots & \pm D_{n1} \\ -D_{12} & +D_{22} & \dots & \mp D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm D_{1n} & \mp D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} \text{ és } D_{ij} \text{ az } a_{ij}-\text{hez}$$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét a definíció alapján (kifejtéssel) és eliminációval is:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 14 \\ 7 & 4 & -1 & 19 \\ 1 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} -i & 2i & 2i \\ 2i & -i & 2i \\ 2i & 2i & -i \end{vmatrix}, \text{ ahol } i \in C,\qquad \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}.$$

2. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix},\quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\quad \underline{\underline{C}} = \left(2\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{A}} = ?$

3. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix},\quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix},\quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = ?$

4. Számítsuk ki az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixok inverzét, majd ellenőrizzük az eredményt !

6. hét

Lineáris egyenletrendszerek

Elnevezések, megoldhatóság:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \end{array}\right\};\quad \text{Ha } b_1=b_2=\ldots=b_k=0,\ \text{akkor } \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$$

Pl.: $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x+y=6 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{array}\right\}$$

Cramer-szabály:

Ha

$$k=n \ \text{ és } \ D=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,\quad \text{akkor egyértelmű a megoldás és: } x_1=\frac{D_1}{D};\ \ x_2=\frac{D_2}{D};\ \ldots$$

Elimináció (Gauss):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix} \Rightarrow$$ … Megengedett átalakítások: …, Cél: …

Feladatok

1. Oldja meg az $\left.\begin{array}{l} x+2y-3z=4 \\ 2x-y+z=10 \\ 3x+2y-5z=12 \end{array}\right\}$ lin. e. rsz.-t Cramer-szabállyal és eliminációval is !

2. Oldja meg az $\left.\begin{array}{l} x+2y-3u+3v=4 \\ 2x-y+u-2v=10 \\ 2x+5y-9u+6v=6 \\ 3x+2y-5u+v=12 \end{array}\right\}$ lin. e. rsz.-t eliminációval !

3. A t paraméter ($t \in R$) mely értékeire nem oldható meg az $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=1 \\ 2x+3y+6z&=3 \\ x+2y+t^2z&=t \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer?

Milyen t-re lesz egyértelmű a megoldás, milyen t-re kapunk végtelen sok megoldást?

7. hét

Számsorozat határértéke

Számsorozat fogalma, megadása:

Számsorozatról akkor beszélünk, ha …

Pl.: $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$, $n \in N^+$; $\dfrac{2}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{6}, \ldots, \dfrac{200}{103}, \ldots$ (ábra), explicit megadás;

Pl.: $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$, $n \in N,\ n \geq 3$; $0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots$ (ábra), implicit m.

Határérték:

Az „a” számot az $\{a_n\}$ számsorozat határértékének … Konvergens, divergens számsorozat.

Nevezetes határértékek:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $|q| < 1$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $c > 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ létezik, irrac. szám, ezután „e” –vel jelöljük.

Műveletek számsorozatokkal, tétel:

$\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ adott számsorozatok ugyanolyan indexezéssel. A két sorozat összegén, különbségén, …

Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens számsorozatok, akkor

$\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, felt. h. a nev. $\neq 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Feladatok

1. Vizsgálja meg a következő számsorozatokat konvergencia szempontjából:

   $a_n = \dfrac{2n-4}{3n+1}$, $n \in N^+$; $\left\{(-1)^n \dfrac{1-n}{n+1},\ n \in N\right\}$.

2. Határozza meg a következő értékeket az ismert nevezetes határértékek felhasználásával:

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n}{2n^2+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0.2^{n+1}}{0.5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{2k}$.

3. Milyen „határozatlan alakok” fordulnak elő az alábbi határértékek kiszámolásakor:

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 4^{n+1}}{3^n + 4^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$?

8. hét

Fogalmak egyváltozós valós függvények jellemzésére

Ha olyan függvény (egyértelmű hozzárendelés) adott, amely valós számokhoz valós számokat rendel, akkor egyváltozós valós függvényről beszélünk. Jele: $f: R \to R,\ f(x) = ...$

<u>Értelmezési tartomány, értékkészlet:</u>

Pl.: $f: R \to R,\ f(x) = \sqrt{x+2}$; Venn-diagramm, ábrázolás, $\mathrm{Dom}\, f = [-2, \infty),\quad \mathrm{Ran}\, f = [0, \infty).$

<u>Szimmetria:</u>

Pl.: $f: R \to R,\ f(x) = x^2$; $f: R \to R,\ f(x) = \sin x$, ... (Páros, páratlan, periodikus függvények.)

<u>Monotonitás, szélsőérték:</u>

Pl.: $f: R \to R,\ f(x) = 4 - x^2$ …

<u>Konvexitás, inflexiós pont:</u>

Pl.: $f: R \to R,\ f(x) = x^3$ …

<u>Korlátosság:</u>

Pl.: $f: R \to R,\ f(x) = 4 - x^2$; $f: R \to R,\ f(x) = \sin x,\quad \inf\limits_{x \in R} f(x) = ?,\ \sup\limits_{x \in R} f(x) = ?$

<u>Aszimptóta:</u>

Pl.: $f: R \to R,\ f(x) = 1/x$ …

<u>Határérték, folytonosság, szakadási helyek:</u>

Pl.:

$$f(x) = x+1,\ x = 1; \qquad f(x) = \frac{x^2-1}{x-1},\ x = 1; \qquad f(x) = \mathrm{sgn}\, x,\ x = 0; \qquad f(x) = \frac{1}{x},\ x = 0.$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a), \quad \lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x), \ \dots$$

esetek.

<u>Inverz függvény:</u>

Pl.: $f: R \to R,\ f(x) = 2x + 4$ …

Feladatok

1. Vázolja az alábbi egyváltozós valós függvényeket és jellemezze őket a tanult fogalmak (ért. t. – ért. k., szimmetriák, monotonitás – szélsőérték, konvexitás – inflexiós pont, korlátosság, aszimptóták, folytonosság – szakadási helyek) segítségével: $f: R \to R,\ f(x) = |x^2 - 4|$, $g: R \to R,\ g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

2. Vázolja az alábbi egyváltozós valós függvényeket és jellemezze őket az $x = 2$ helyen folytonosság, szakadási tulajdonság szerint:

   $$f(x) = x^2, \qquad f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \qquad f(x) = 2 - x + \mathrm{sgn}(2-x), \qquad f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

3. Van-e inverze az $f: R \to R,\ f(x) = 4 - 2x$; $g: R \to R,\ g(x) = \sqrt{1 - x^2/9}$, $x \geq 0$ függvényeknek? Ha igen, akkor adja meg, majd ábrázolja az eredeti és inverz függvényt is.

9. hét

Nevezetes függvénytípusok, I.

Hatványfüggvények:

$f: R \to R,\ f(x) = x^k,$ ahol $k \neq 0$. A k=1, 2, 1/2, -1 esetekhez tartozó függvények ábrája …

Azonosságok:

$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2,\quad u^2 - v^2 = (u-v)(u+v),\quad (uv)^k = u^k v^k,\quad \left(\frac{u}{v}\right)^k = \frac{u^k}{v^k},\ \ldots$

Exponenciális függvények:

$f: R \to R,\ f(x) = a^x,$ ahol $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$. Az a=2, e, 10 esetekhez tartozó ábrák …

Azonosságok: $a^u a^v = a^{u+v},\quad \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v},\quad \left(a^u\right)^v = a^{u \cdot v},\ \ldots$

Logaritmusfüggvények:

$f: R \to R,\ f(x) = \log_a x,$ ahol $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$. Az a=2, e, 10 esetekhez tartozó ábrák …

Azonosságok:

$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v,\quad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v,\quad \log_a u^k = k \cdot \log_a u,\quad \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a},\ldots$

Hiperbolikus függvények:

$f: R \to R,\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$ ábra … $f: R \to R,\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$ ábra …

$f: R \to R,\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x;$ ábra … $f: R \to R,\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \operatorname{cth} x;$ ábra …

Azonosságok:

$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1,\quad \operatorname{sh}(u \pm v) = \operatorname{sh}u \cdot \operatorname{ch}v \pm \operatorname{ch}u \cdot \operatorname{sh}v,\quad \operatorname{ch}(u \pm v) = \operatorname{ch}u \cdot \operatorname{ch}v \pm \operatorname{sh}u \cdot \operatorname{sh}u,\quad \operatorname{sh}2x = \ldots, \operatorname{ch}2x = \ldots$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi értékeket a definíciók alapján:

   $8^{\frac{2}{3}},\quad 8^{-\frac{2}{3}},\quad \left(\sqrt{2}\right)^4,\quad \log_2 64,\quad \lg 0.01,\quad \ln\frac{1}{e},\quad \log_4 8 - \log_9 3,\quad \operatorname{sh}(\ln 2),\quad \operatorname{ch}(\ln 3).$

   Némelyik értéket „ellenőrizze” zsebszámológép segítségével!

2. Vázolja az $f: R \to R,\ f(x) = 1 - \operatorname{ch}x,\quad g: R \to R,\ g(x) = \operatorname{sgn}(\ln x)$ függvényeket és jellemezze őket a tanult fogalmak (7 féle) segítségével!

3. Igazolja az $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10},\quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$ összefüggéseket a definíciók alapján!

10. hét

Nevezetes függvénytípusok, II.

Trigonometrikus függvények:

Szögek mérése, szögfüggvény definíciók, nevezetes szögfüggvényértékek.

$f : R \to R,\ f(x) = \sin x;$ ábra … $\qquad f : R \to R,\ f(x) = \cos x;$ ábra …

$f : R \to R,\ f(x) = \mathrm{tg}\ x;$ ábra … $\qquad f : R \to R,\ f(x) = \mathrm{ctg}\ x;$ ábra …

Azonosságok:

$\sin^2 u + \cos^2 u = 1,\quad \sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v,\quad \cos(u \pm v) = ...,\quad \sin 2u = ..., \cos 2u = ...$

Arkusz-függvények:

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1],\ f(x) = \sin x;$$

$$g : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ g(x) = \arcsin x,\ \text{ ahol } \sin(\arcsin x) = x.$$

Ábrák, …

$$f : [0, \pi] \to [-1,1],\ f(x) = \cos x;$$

$$g : [-1,1] \to [0, \pi],\ g(x) = \arccos x,\ \text{ ahol } \cos(\arccos x) = x.$$

Ábrák, …

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, \infty),\ f(x) = \mathrm{tg}\, x;$$

$$g : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ g(x) = \mathrm{arctg}\, x,\ \text{ ahol } \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x.$$

Ábrák, …

$$f : (0, \pi) \to (-\infty, \infty),\ f(x) = \mathrm{ctg}\, x;$$

$$g : (-\infty, \infty) \to (0, \pi),\ g(x) = \mathrm{arcctg}\, x,\ \text{ ahol } \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x.$$

Ábrák, …

Azonosságok:

$$\arccos u = \frac{\pi}{2} - \arcsin u, \qquad \mathrm{arcctg}\, u = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, u, \qquad \arcsin u = \mathrm{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$\cos(\arcsin u) = \sqrt{1-u^2}, \ldots$$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi értékeket a definíciók alapján:

$$\sin\frac{3\pi}{2},\ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{tg}\frac{3\pi}{4},\ \mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3},\ \arcsin(-1),\ \arccos(-0.5),\ \mathrm{arctg}1,\ \mathrm{arcctg}(-1),\ \arcsin\left(\sin \frac{5}{6}\right.$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$ (Némelyik értéket „ellenőrizze” zsebszámológép segítségével!)

2. Vázolja az $f : R \to R,\ f(x) = 2\cos(x + \pi/2),\quad f : R \to R,\ f(x) = \pi - \mathrm{arctg}\, x$ függvényeket és jellemezze őket a tanult fogalmak (7 féle) segítségével!

3. Igazolja a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $\arcsin x = \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $-1 < x < 1$ azonosságokat! (Utóbbinál elég igazolni, hogy a két oldal tangense megegyezik.)

11. hét

Egyváltozós valós függvény differenciálhányadosa, deriváltja

Definíció:

Adott az $f : R \longrightarrow R,\ f(x) = \ldots$ függvény és az $x = a$ hely. A $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ értéket …

Jele: $f'(a),\ \frac{df}{dx}(a)$. Azt a függvényt, amely ... Jele: f' (részletesebben: $f' : R \longrightarrow R,\ f'(x) = \ldots$), $\frac{df}{dx}$. Az f' függvény deriváltját második deriváltnak (jele f''), f'' derivátját harmadik deriváltnak (jele f''') …

Pl.: $f(x) = x^2$, $a = 1.5$; $f'(a) = \left(x^2\right)'_{1.5} = ?$, $f'(x) = \left(x^2\right)' = ?$

Alapfüggvények deriváltjai (a képletek a $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, f'$ halmazon érvényesek):

$(c)' = 0;$

$\left(x^k\right)' = \ldots \Rightarrow k = 1,\ 2,\ -1,\ 1/2$ esetén: ...

$\left(a^x\right)' = \ldots \Rightarrow a = 2,\ e,\ 10$ esetén: ...

$\left(\log_a x\right)' = \ldots \Rightarrow a = 2,\ e,\ 10$ esetén: ...

Hiperbolikus fgv.: …

Trigonometrikus fgv.: …

Arkusz fgv. :…

Deriválási szabályok:

$$\left(cf(x)\right)' = \ldots,\quad \left(f(x) \pm g(x)\right)' = \ldots,\quad \left(f(x)g(x)\right)' = \ldots,\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \ldots,\quad \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\, g'(x).$$

(Feltéve, hogy a deriváltak léteznek a kérdéses intervallumokon.) Pl.: …

Feladatok

1. $f(x) = 3x^2 + x \ln x$, $f'(x) = ?$, $f'(1) = ?$ $f''(x) = ?$, $f''(5) = ?$

2. $f(x) = x \sin x + \frac{x^2}{e^x}$, $f'(x) = ?$, $f'(0) = ?$ $f''(x) = ?$, $f''(0) = ?$

3. Deriválási feladatok:

$$\left((5+2x)^{10}\right)';\quad \left(\ln(3x^2+2x+6)\right)';\quad \left(\sqrt{3x} + \sqrt[3]{3x}\right)';\quad \left(\frac{5+\sin 5x}{4x+e^{4x}}\right)';\quad \left(\lg 3x - x \arcsin x^3\right)';\quad (\mathrm{ch}\, 4x)^{(4)};$$

$$\left(\mathrm{sh}^6 x \cdot \mathrm{sh}\, x^6\right)';\quad \left(\sqrt{6x - 6^{\cos x}}\right)';\quad \left(\frac{\mathrm{arctg}\, 6x}{\pi + \ln 6x}\right)';\quad \left(6^x + x^6\right)^{(6)};\quad \frac{d}{dx}\left(\mathrm{ch}(x^2 - a^2)\right);\quad \frac{d}{dt}\left(A \sin(\omega t + \alpha)\right).$$

12. hét

A differenciálhányados alkalmazásai, I.

Sebesség, gyorsulás:

$s = s(t)$, t_0 adottak $\Rightarrow$ $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \dot{s}(t_0)$, $a(t_0) = \ldots = \ddot{s}(t_0)$.

Pl.: $s = \dfrac{1}{2} g t^2$; $\dot{s}(t) = \dfrac{1}{2} g \cdot 2t = gt = v$; $\ddot{s}(t) = g = a$.

Érintő meredeksége, egyenlete:

Kövessük egy ábrán $x - a$, $f(x) - f(a)$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ jelentését: …

Taylor - polinom:

$f : R \to R$, $f(x) = \ldots$, $x = a$:

$f(x) \approx c_0 + c_1 (x - a) + \ldots + c_n (x - a)^n$;

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = T_n(x);$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} = T_n(x) + R_n(x),$$

Feladatok

1. Ábrázolja az $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $y \geq 0$ egyenletű görbét és adja meg az $x = 2$ helyhez tartozó érintőegyenes egyenletét !

2. Ábrázolja az $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ egyenletű görbét és keresse meg azokat a pontokat, ahol az érintőegyenes párhuzamos a szögfelező egyenessel !

3. Taylor - polinom, hibakorlát: $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $T_5(x) = ?$, hibabecslés $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$-re.

4. Taylor - polinom, hibakorlát: $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $T_4(x) = ?$, hibabecslés $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$-re.

13. hét

A differenciálhányados alkalmazásai, II.

Monotonitás – szélsőérték:

Ábráról ill. $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a)$ -ból:

$$f'(x) > 0 \text{ az } (u,v)-\text{ben} \Rightarrow f \text{ szig. mon. nő } (u,v)-\text{ben};$$

$$f'(x) < 0 \text{ az } (u,v)-\text{ben} \Rightarrow f \text{ szig. mon. csökk. } (u,v)-\text{ben}.$$

(Feltesszük, hogy …)

Ábráról ill. $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - a)^2$ -ből:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) > 0 \Rightarrow f-\text{nek "a"}-\text{ban lok. min. van};$$

$$f'(a) = 0,\ f''(a) < 0 \Rightarrow f-\text{nek "a"}-\text{ban lok. max. van}.$$

(Feltesszük, hogy …)

Konvexitás – inflexiós pont:

Ábráról ill. $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - a)^2$ -ből:

$$f''(x) > 0 \text{ az } (u,v)-\text{ben} \Rightarrow f \text{ konvex } (u,v)-\text{ben};$$

$$f''(x) < 0 \text{ az } (u,v)-\text{ben} \Rightarrow f \text{ konkáv } (u,v)-\text{ben}.$$

(Feltesszük, hogy …)

Ábráról ill. $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - a)^3$ -ből:

$f''(a) = 0,\ f'''(a) \neq 0 \Rightarrow f-\text{nek "a"}-\text{ban}$ infl. pontja van.

(Feltesszük, hogy …)

Feladatok

1. Keressen lokális szélsőértékeket és inflexiós pontokat az $f: R \to R,\ f(x) = x^4 - 2x^2$ függvény esetén (a deriváltak felhasználásával)!

2. Keressen lokális szélsőértékeket és inflexiós pontokat az $f: R \to R,\ f(x) = xe^{-x}$ függvény esetén (a deriváltak felhasználásával)!

3. Ábrázolja az $f: R \to R,\ f(x) = 2x^3 - 3x^2$ függvényt néhány tulajdonság (zérushelyek, szélsőértékhelyek, inflexiós pontok, viselkedés $\pm\infty$-ben) felhasználásával!

4. Ábrázolja az $f: R \to R,\ f(x) = \frac{2}{1 + x^2}$ függvényt néhány tulajdonság (szélsőértékhelyek, inflexiós pontok, viselkedés $\pm\infty$-ben) felhasználásával!

5. Ábrázolja az $f: R \to R,\ f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ függvényt néhány tulajdonság (szakadási helyek, szélsőértékhelyek, inflexiós pontok, aszimptóták) felhasználásával!