1 Matematika I. Pót ZH I.

PótZH I., Matematika I. 2011.12.05 . NEPTUN:

Név: Gyak.vez.:

1. Számold ki! (1+2+1+1+2+3 pont)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2\quad 4) = \begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 4\\ 2\cdot 2 & 2\cdot 4\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\\ 6 & 12\end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 4\\ 4\cdot 2+3\cdot 4\\ 5\cdot 2+0\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\20\\10\end{pmatrix}$$

2

$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Számold ki!

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

1

$$det(A) = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 0 = 3$$

1

Írd fel az A^{-1} inverzet definiáló egyenletet!

$$AA^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & u\\ y & v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

2

Számold ki A^{-1}-et!

$$\begin{pmatrix}1x & 1u\\ 2x+3y & 2u+3v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}x=1\\ 2x+3y=0\end{matrix} \Rightarrow y=-\frac{2}{3} \qquad \begin{matrix}u=0\\ 2u+3v=1\end{matrix} \Rightarrow v=\frac{1}{3}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

3

2. $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = (1, 2, 3)$ Számítsd ki a következőket! (1+2+1+2+1+1+2 pont)

$\bar{a}\bar{b} =$

$$(1,-2,0)(1,0,3) = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 3 = 1$$

1

$\bar{a}\times\bar{b} =$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-6) - \bar{j}(3) + \bar{k}(2) = (-6, -3, 2)$$ 2

$\bar{a}\bar{b}\bar{c} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{-6} - (-2)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{0} + 0\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{2} = -6$$ 1

Mennyi az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok által bezárt α szög koszinusza?

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

1 1

Mennyi az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok által kifeszített háromszög T területe?

$$T = \frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{2} = \frac{|(-6,-3,2)|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \frac{7}{2}$$ 1

Írd fel egy, az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorokkal párhuzamos sík $\bar{n}$ normálvektorát!

$\bar{n} = \bar{a}\times\bar{b} = (-6, -3, 2)$ 1

Írd fel az $\bar{n}$ normálvektorú és a $P(1, 1, -1)$ pontot tartalmazó sík egyenletét!

$$-6\cdot(x-1) - 3(y-1) + 2(z-(-1)) = 0$$

$$-6x - 3y + 2z + 11 = 0$$ 2

3. $z_1 = -i + \sqrt{3}$, $z_2 = \overline{z_1}$.

Számítsd ki a következőket! (1+2+2+3+2 pont)

$z_1 z_2 = (-i+\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ ①

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-i+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{3+i^2-2\sqrt{3}i}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$ ①

①

①

$z_1^4 = [2(\cos 330° + i \sin 330°)]^4 = 2^4(\cos 1320° + i \sin 1320°) =$

$= 16 \cdot (\cos 240° + i \sin 240°) = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -8 - 8\sqrt{3}\, i$

①

① ①

$\sqrt{z_1} = \sqrt{2(\cos 330° + i \sin 330°)} = \sqrt{2}\left(\cos\left[\frac{330°}{2} + k\frac{360°}{2}\right] + i \sin\left[\frac{330°}{2} + k\frac{360°}{2}\right]\right),$

$k = 0, 1$ ①

$w_1 = \sqrt{2}(\cos 165° + i \sin 165°)$ ①

$w_2 = \sqrt{2}(\cos 345° + i \sin 345°)$ ①

Oldd meg z-re:

$$(1+i)z - i = 4$$

$(1+i)z = 4+i$

$z = \frac{4+i}{1+i} = \frac{4+i}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{4-i^2-3i}{1^2+1^2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} i$

②

IGEN: 13-40 pont

13

4. Oldd meg Gauss-eliminációval a következő egyenletrendszert! (5+1+3+1 pont)

$$x + 2y - z = -3$$
$$2x - y + z = 0$$
$$x + y - 2z = -5$$

1 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \frac{1}{5}\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \end{array}\right)$$

$$-\frac{8}{5} z = -\frac{16}{5} \longrightarrow z = 2$$

$$-5y + 3 \cdot 2 = 6 \longrightarrow y = 0$$

$$x + 2 \cdot 0 - 2 = -3 \longrightarrow x = -1$$

$x = -1$ $y = 0$ $z = 2$ 2

Ellenőrzés:

$$-1 + 2 \cdot 0 - 2 = -3$$ 1
$$2 \cdot (-1) - 0 + 2 = 0$$
$$-1 + 0 - 2 \cdot 2 = -5$$

Oldd meg a következő komplex egyenletrendszert!

I $\quad 5 - z_1 = -3 - i$
II $\quad z_2 + i z_1 = 1$

I $\longrightarrow z_1 = 8 + i$
II $\longrightarrow z_2 = 1 - i z_1 = 1 - i(8+i) = 1 - i^2 - 8i = 2 - 8i$

$z_1 = 8 + i$ $z_2 = 2 - 8i$ 3

Ellenőrzés:

$$5 - (8+i) = -3 - i$$
$$(2-8i) + i(8+i) = 2 - 8i + 8i + i^2 = 2$$ 1

Matematika I. Pót ZH II.

2. $f(x) = \sqrt{x-3}$. Számítsd ki a következőket! (1+1+3+1+2+2pont)

$D_f = [3, \infty)$ $\quad$ $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$ $\quad$ 1 $\quad$ 1

$R_f = [0, \infty)$ $\quad$ $R_{f^{-1}} = [3, \infty)$

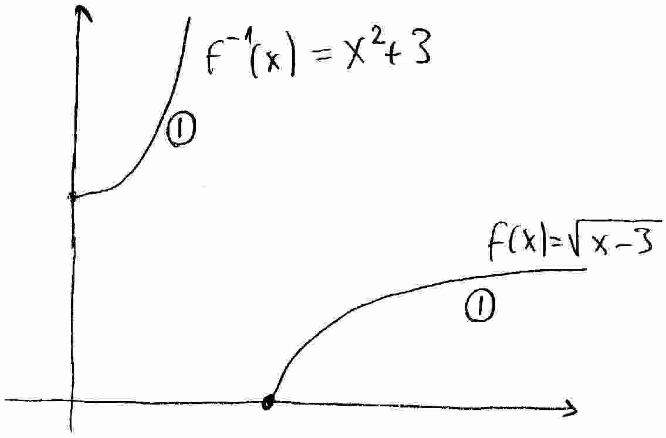
Számítsd ki $f^{-1}(x)$-et és $f'(x)$-et!

$$y = \sqrt{x-3} \qquad x \geq 3$$
$$y^2 = x - 3$$
$$x = y^2 + 3$$
$$f^{-1}(y) = y^2 + 3 \qquad y \geq 0$$

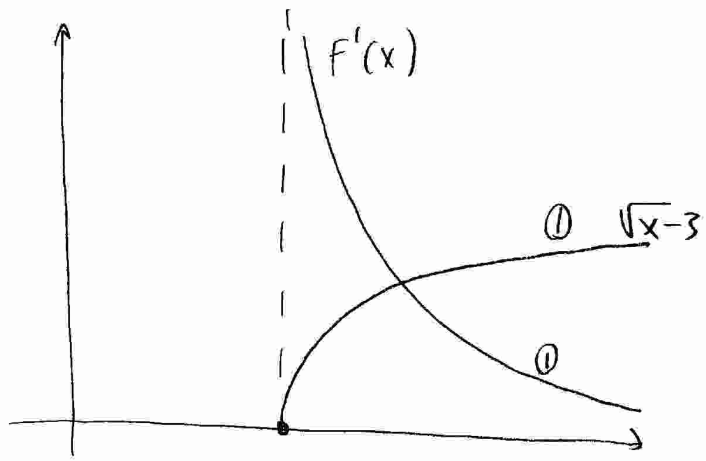
$f^{-1}(x) = x^2 + 3 \qquad x \geq 0$ $\quad$ 3

$f'(x) = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ 1

Rajzold le egy ábrára $f(x)$-t és $f^{-1}(x)$-et!



Rajzold le egy ábrára $f(x)$-t és $f'(x)$-et!



3. $f(x) = e^{-x}(x+1)$. (1+1+3+2+1+2pont)

$f'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} \cdot 1 = e^{-x}(-x)$ 1

$f''(x) = -e^{-x}(-x) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(x-1)$ 1

Keresd meg f lokális szélsőértékének a helyét és határozd meg a típusát!.

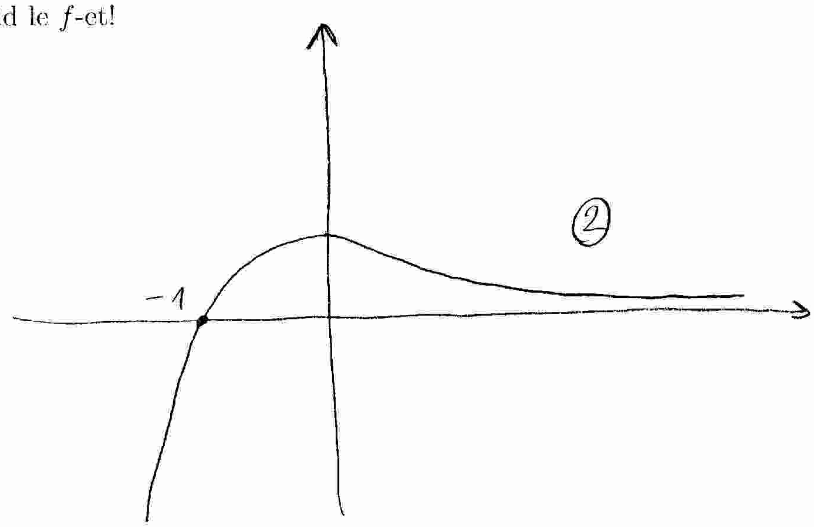
hely: $f'(x) = 0 = e^{-x}(-x) \longrightarrow x_1 = 0$ 1

típus: $f''(x_1) = e^{-0}(0-1) = -1 < 0$ MAXIMUM 1 1

Számítsd ki:
$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$ 1 1

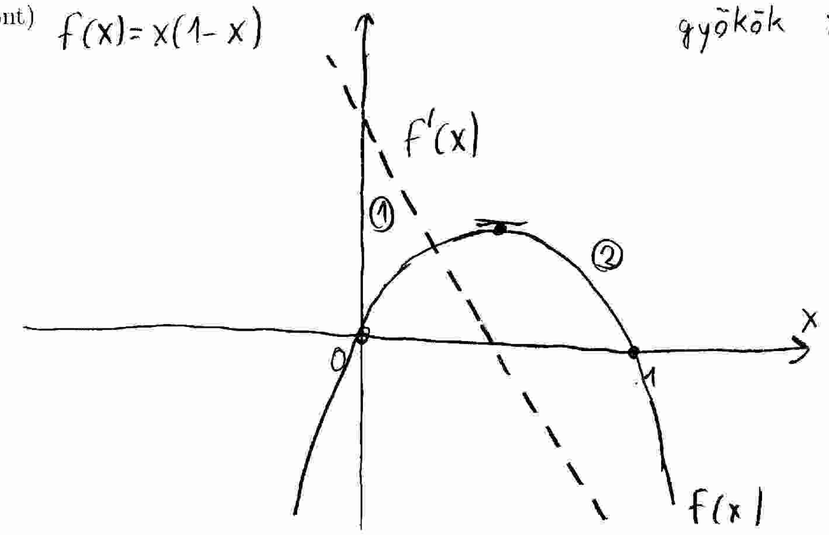
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x+1) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$ 1

Rajzold le f-et!



4. Rajzold le az $f(x) = x - x^2$ függvényt! Rajzold be ugyanarra az ábrára szaggatott vonallal az f' függvényt is! $(3+3+2+2\text{pont})$

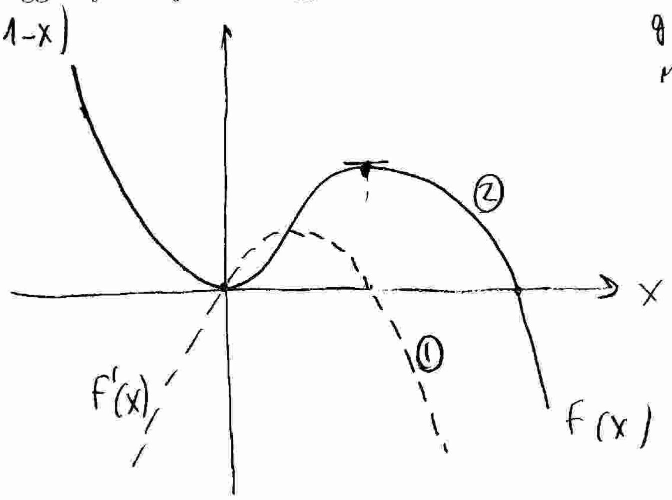
$f(x) = x(1-x)$ gyökök $x_1 = 0,\ x_2 = 1$



Rajzold le az $f(x) = x^2 - x^3$ függvényt! Rajzold be ugyanarra az ábrára szaggatott vonallal az f' függvényt is!

$f(x) = x^2(1-x)$ gyökök: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

mult: 2 1



Számítsd ki:

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{8}{n}\right)^{7n-6} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-8}{n}\right)^n\right]^7\left(1+\frac{-8}{n}\right)^{-6} = \left[e^{-8}\right]^7\cdot 1^{-6} = e^{-56}$

1 1

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-n-88}{n^3+n^6+99} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^5}-\frac{88}{n^6}}{\frac{1}{n^3}+1+\frac{99}{n^6}} = \frac{0-0-0}{0+1+0} = 0$

1

1

PótZH II, Matematika I. 2011.12.05 . NEPTUN:

Név: Gyak.vez.:

1. Számítsd ki a következő deriváltakat! (5 × 2pont)

$f(x) = 1/x^5 + (\sqrt{-2x}) + tg(-4x) + \ln(1-x)$

$f'(x) = -5x^{-6} + \frac{1}{2}(-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) + \frac{1}{\cos^2(-4x)} \cdot (-4) + \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$

2

$f(x) = \cos(3x)\, ctg(4x)$

$f'(x) = -\sin(3x) \cdot 3 \cdot ctg(4x) + \cos(3x) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2(4x)} \cdot 4\right)$

2

$f(x) = \sqrt[2]{x\cos x}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x\cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x\cos x)' = \frac{1}{2}(x\cos x)^{-\frac{1}{2}}(1 \cdot \cos x + x(-\sin x))$

2

$f(x) = \sqrt[2]{x}\cos x$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cos x + \sqrt[2]{x}(-\sin x)$

2

$f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) = \frac{-\sin(2x) \cdot 2\sqrt[3]{x} - \cos(2x) \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3}}{(\sqrt[3]{x})^2}$

2

Matematika I. Vizsga, 2011. dec. 13.

Vizsga, Matematika I, 2011.12.13 . NEPTUN:

Név: Gyak.vez.:

4. (1+2+3+3+1 pont)

$z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = \sqrt{3} + i.$

Számítsd ki a következőket!

$z_1 z_2 = (2-2i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{3} - 2\overset{-1}{i^2} + (-2\sqrt{3}+2)i = 2\sqrt{3}+2 + (2-2\sqrt{3})i$ (1)

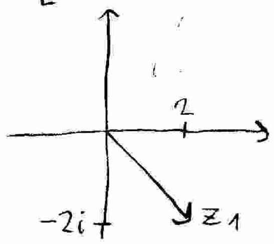
$\frac{iz_1}{z_2} = \frac{i(2-2i)}{\sqrt{3}+i} = \frac{2+2i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{2\sqrt{3} - 2\overset{-1}{i^2} + (-2+2\sqrt{3})i}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} i$ (1)

(1)

$z_1^6 = [\underbrace{2\sqrt{2}}_{\sqrt{2^2+2^2}}(\cos 315° + i \sin 315°)]^6 = 512(\cos \underbrace{1890°}_{6\cdot 315°} + i \sin 1890°) = 512(\cos 90° + i \sin 90°) = 512\, i$

$1890° = 5\cdot 360° + 90°$

(1) (2)



$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Számold ki C-t!

$C = AB - BA + 5E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ (1)

$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ (1) (1)

$2\cdot 1 + 3\cdot 4$ $\quad 3\cdot 0 + 1\cdot 3$

Létezik-e C^{-1}? Indokold a választ!

$\det C = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - (-2)(-2) = 17$

C^{-1} létezik, mivel $\det C = 17 \neq 0$ (1)

1. $\bar{a} = 2\bar{i} - x\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{c} = (-1, 2, 1)$ Számítsd ki a következőket!

(1+1+1+1+2+2+2 pont)

$\bar{a}\bar{b} = (2, -x, -1)(2, -1, 0) = 2 \cdot 2 + (-x)(-1) + (-1) \cdot 0 = 4 + x$ ①

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{(-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k} = (-1, -2, 3)$$ ①

Mennyi x, ha $\bar{a}$ $\bar{b}$ merőleges egymásra?

$\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 = 4 + x \longrightarrow x = -4$ ①

Írd fel az $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorokkal párhuzamos sík egyik $\bar{n}$ normálvektorát!

$\bar{n} = \bar{b} \times \bar{c} = (-1, -2, 3)$ ①

Írd fel az $\bar{n}$ normálvektorú és a $P(2, 1, -1)$ pontot tartalmazó sík egyenletét!

$$-1 \cdot (x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$$
$$-x - 2y + 3z + 7 = 0$$ ②

Írd fel a $Q_1(1, 3, 1)$, $Q_2(2, 0, 1)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

$\bar{r}_0 = (1, 3, 1)$, $\bar{v} = Q_2 - Q_1 = (1, -3, 0)$ ①

$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t \cdot \bar{v} = (1 + 1t, 3 - 3t, 1 + 0 \cdot t) = (1 + t, 3 - 3t, 1)$ ①

Keresd meg az előbb felírt sík és egyenes metszéspontját!

$$-(1+t) - 2(3 - 3t) + 3 \cdot (1) + 7 = 0$$ ①
$$5t + 3 = 0 \longrightarrow t = -\frac{3}{5}$$

$$\bar{r}\left(-\frac{3}{5}\right) = \left(1 - \frac{3}{5}, 3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right), 1\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}, 1\right)$$ ①

3. Számítsd ki a következő deriváltakat! (5 × 2pont)

$f(x) = 1/(3x)^5 + (\sqrt{x^5}) + ctg(-x) + \ln(3x)$

$$f'(x) = -5\cdot(3x)^{-6}\cdot 3 + \frac{5}{2}x^{3/2} + \frac{-1}{\sin^2(-x)}\cdot(-1) + \overbrace{\frac{1}{3x}\cdot 3}^{1/x}$$

$f(x) = \ln(3x)\sin(4x)$

$$f'(x) = \frac{1}{3x}\cdot 3\cdot\sin(4x) + \ln(3x)\cdot\cos(4x)\cdot 4$$

$f(x) = \sqrt[2]{\ln x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\cdot\frac{1}{x}$$

$f(x) = \sqrt[2]{x^5}\cos x$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2}\cdot\cos x + \sqrt[2]{x^5}(-\sin x)$$

$f(x) = \frac{\ln(x)}{e^{3x}}$

$$f'(x) = \frac{1/x\cdot e^{3x} - \ln x\cdot e^{3x}\cdot 3}{(e^{3x})^2}$$

Alpót: 0-12 NEM
13-40 IGEN

FSZ: 0-10 NEM
11-40 IGEN

	1	2	3	4	5
FSZ.	0-12	13-19	20-25	26-31	32-40
	0-14	15-21	22-27	28-33	34-40

2. (1+1+3+5pont)

$f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$. Számítsd ki: $f(x) = (x^2-1)(x+3) = x^3+3x^2-x-3$

$f'(x) = 3x^2+6x-1$ ⓵

$f''(x) = 6x+6$ ⓵

Keresd meg a f lokális szélsőértékeinek a helyeit, és határozd meg azok típusait!

$f'(x) = 0 = 3x^2+6x-1 \longrightarrow x_1 = \frac{-6+\sqrt{36+12}}{6}$ $\quad x_2 = \frac{-6-\sqrt{36+12}}{6}$ ⓵

⓵

$f''(x_1) = (-6+\frac{\sqrt{48}}{6})+6 > 0$ $\quad f''(x_2) = (-6-\frac{\sqrt{48}}{6})+6 = -\frac{\sqrt{48}}{6} < 0$

MIN ⓵ MAX

Számítsd ki f harmadrendű Taylor polinomját az $x = 0$ pont korűl!

Mivel $f(x)$ egy harmadrendű polinom, így a harmadrendű $T_3(x)$ Taylor polinomja önmaga, vagyis $T_3(x) = x^3+3x^2-x-3$ ⑤

VAGY:

$f(x) = x^3+3x^2-x-3$ $\quad f(0) = -3$

$f'(x) = 3x^2+6x-1$ $\quad f'(0) = -1$

$f''(x) = 6x+6$ $\quad f''(0) = 6$ ②

⓵ $f'''(x) = 6$ $\quad f'''(0) = 6$

$$f(x) \underset{\text{esetünkben}}{\approx} T_3(x) = -3-1\cdot x+\frac{6}{2!}x^2+\frac{6}{3!}x^3 = -3-x+3x^2+x^3$$ ②

Matematika I. Vizsga, 2011. dec. 5.

Név: Neptun:

1. Számítsd ki a következő határértékeket!

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{-n^2-n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{-1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0-0}{-1-0-0} = -2$

1 1 $\boxed{2}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-2}{n}\right)^{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{n}\right]^{3} \cdot \left(1+\frac{-2}{n}\right)^{-2}$ 1

$= \left[e^{-2}\right]^{3} \cdot 1^{-2} = e^{-6}$

1 $\boxed{2}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2\cdot 2\cdot e^{2x}} = \frac{2}{\infty} = 0$

1 1 1 $\boxed{3}$

2. $f(x) = e^{2x^3+1}$. Számítsd ki a következőket!

$D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ 1 $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ 1

$R_f = (0, +\infty)$ 1 $R_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$ 1 $\boxed{4}$

$f^{-1}(x)$: $f(x) = e^{2x^3+1}$

$y = e^{2x^3+1}$

$\ln y = 2x^3+1$ $\boxed{3}$

$\ln y - 1 = 2x^3$

$x = \sqrt[3]{\frac{\ln y - 1}{2}}$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{\ln y - 1}{2}}$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{\ln y - 1}{2}}$

3. $f(x) = \ln(x+2)$. Számítsd ki a következőket!

$D_f = (-2, \infty)$ mivel $x+2>0$ 1 $\qquad D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ 1

$R_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 1 $\qquad R_{f^{-1}} = (-2, \infty)$ 1

$f^{-1}(x)$: $y = \ln(x+2)$

$e^y = x+2$

$x = e^y - 2$

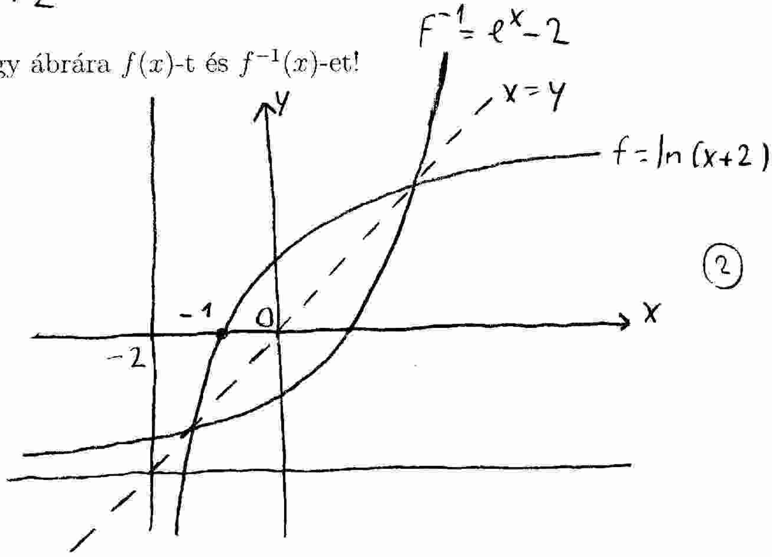
$f^{-1}(y) = e^y - 2$

$f^{-1}(x) = e^x - 2$ 1

$\boxed{6}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ 1

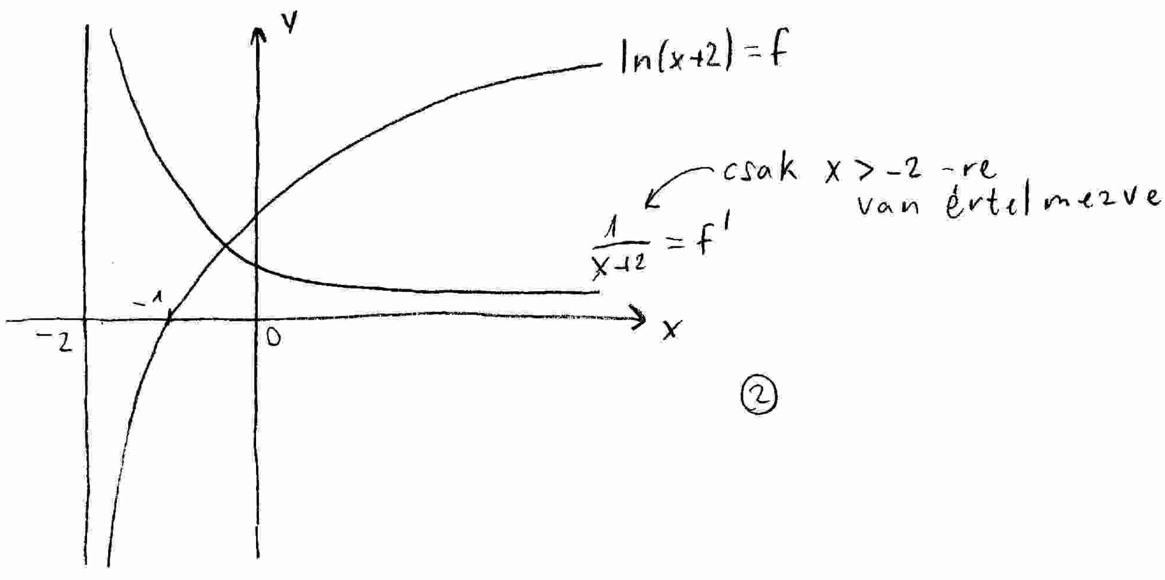
Rajzold le egy ábrára $f(x)$-t és $f^{-1}(x)$-et!



2

$\boxed{4}$

Rajzold le egy ábrára $f(x)$-t és $f'(x)$-et!



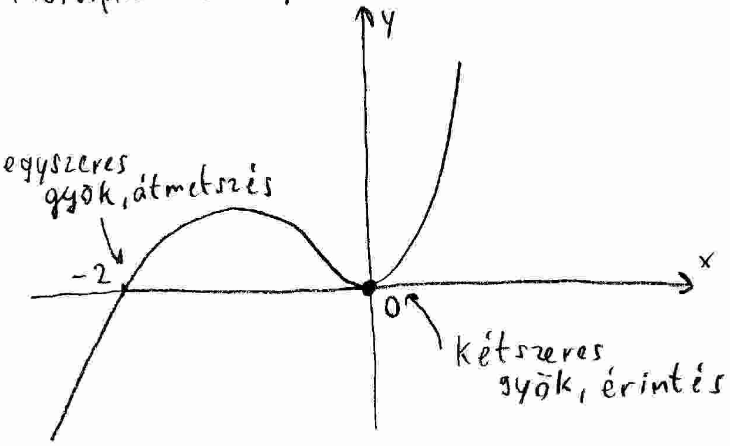
2

4. Rajzold le a következő polinomot: $f(x) = x^2(x+2)$.

gyökök: $x_1 = 0, \quad x_2 = -2$

multiplicitás: $2, \quad 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$



$\boxed{4}$

Keresd meg a lokális szélsőértékeinek a helyeit, és határozd meg azok típusait!.

$f(x) = x^3 + 2x^2$

① $f'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x+4)$

① $f''(x) = 6x + 4$

①

Szélső érték helye: $f'(x) = x(3x+4) = 0 \longrightarrow x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{4}{3}$

Szélső érték típusa: $f''(x_1) = 6 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$, x_1 lokális MINIMUM

$f''(x_2) = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = -4 < 0$, x_2 lokális MAXIMUM

①

$\boxed{4}$

IGEN: 14–42 p.

NEM: 0–13 p.

5. Számítsd ki a következő deriváltakat!

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + (3x)^4 + e^{-4x} + \sin(4x)$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 4\cdot(3x)^3\cdot 3 + e^{-4x}\cdot(-4) + \cos(4x)\cdot 4$

vagy $\frac{1}{3}\cdot(x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$ vagy $3^4\cdot 4x^3$

2

$f(x) = e^{-4x}\sqrt[3]{x}$

$f'(x) = (e^{-4x})'\cdot\sqrt[3]{x} + e^{-4x}(\sqrt[3]{x})' = e^{-4x}\cdot(-4)\cdot\sqrt[3]{x} + e^{-4x}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

2

$f(x) = \sqrt[3]{x}/e^{-4x}$

$f'(x) = \dfrac{(x^{1/3})'\cdot e^{-4x} - \sqrt[3]{x}(e^{-4x})'}{(e^{-4x})^2} = \dfrac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot e^{-4x} - \sqrt[3]{x}\, e^{-4x}\cdot(-4)}{(e^{-4x})^2}$

e^{-8x} 2

$f(x) = \sqrt[3]{arctg(2x)} = [arctg(2x)]^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}[arctg(2x)]^{-2/3}\cdot[arctg(2x)]' = \frac{1}{3}[arctg(2x)]^{-2/3}\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2$

$f(x) = arctg(\sqrt[3]{x})$

$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt[3]{x})^2}\cdot(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt[3]{x})^2}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3}$ 2

$\boxed{10}$

Matematika I. Vizsga, 2011. dec. 5. Levelező

Vizsga, Matematika (lev.) I, 2011.12.05 . NEPTUN:

Név: Gyak.vez.:

1. $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{k}$, $\bar{c} = (-1, 2, 1)$ Számítsd ki a következőket!
(1+1+1+1+1+2+1+2 pont)

$\bar{a}\bar{b} = (2, -3, 0) \cdot (2, 0, -1) = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 4$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\left((-3)(-1) - 0 \cdot 0\right) - \bar{j}\left(2(-1) - 0 \cdot 2\right) + \bar{k}\left(2 \cdot 0 - (-3) \cdot 2\right) =$$

$$= \bar{i} \cdot 3 - \bar{j}(-2) + \bar{k} \cdot 6 = (3, +2, 6)$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 4$$

$$= 7$$

Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és a $\bar{c}$ vektorok által kifeszített paralepipedon (ferde téglatest) V térfogata?

$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = 7$

Írd fel az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorokkal párhuzamos sík egyik $\bar{n}$ normálvektorát!

$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (3, -2, 6)$

Írd fel az $\bar{n}$ normálvektorú és a $P(-1, 0, -1)$ pontot tartalmazó sík egyenletét!

$$3 \cdot (x - (-1)) - 2 \cdot (y - 0) + 6 \cdot (z - (-1)) = 0$$

Írd fel a $Q_1(1, 0, 1)$, $Q_2(2, 1, 1)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

$\bar{r}_0 = (1, 0, 1)$, $\bar{v} = Q_2 - Q_1 = (1, 1, 0)$

$\bar{r}(t) = (1 + 1t, 0 + 1t, 1 + 0t) = (1 + t, t, 1)$

4. $z_1 = -1 + 3i, \quad z_2 = 2 + i.$

Számítsd ki a következőket! (1+1+2+3+3 pont)

$z_1 z_2 = (-1+3i)(2+i) = -2+3i^2+5i = -5+5i$

1

$\frac{iz_1}{z_2} = \frac{i(-1+3i)}{2+i} = \frac{-3-i}{2+i} = \frac{-3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{-7+i}{2^2+1^2} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$

2

Számold ki! $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 4\\ 2\cdot 2 & 2\cdot 4\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\\ 6 & 12\end{pmatrix}$ 2 $\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 4\\ 4\cdot 2+3\cdot 4\\ 5\cdot 2+0\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\20\\10\end{pmatrix}$ 2

$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Számold ki! 2

$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 2 & 1\cdot 0+0\cdot 3\\ 2\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot 0+3\cdot 3\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}$

1

$det(A) = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 0\cdot 2 = 3$

Jegy:	1	2	3	4	5
	1-13	14-20	21-26	27-33	34-40

1	2	3	4	5
1-13	14-20	21-26	27-33	40

1

3. Számítsd ki a következő deriváltakat! (5 × 2pont)

$f(x) = 1/(x)^5 + (\sqrt{x}) + tg(4x) + \ln(1-3x)$

$f'(x) = -5 \cdot x^{-6} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\cos^2(4x)} \cdot 4 + \frac{1}{1-3x} \cdot (-3)$

$f(x) = \cos(3x)\sin(4x)$

$f'(x) = (\cos(3x))' \sin(4x) + \cos(3x) \cdot (\sin(4x))' = -\sin(3x) \cdot 3 \cdot \sin(4x) + \cos(3x) \cdot \cos(4x) \cdot 4$

$f(x) = \sqrt[2]{\ln x}$

$f'(x) = \left[\left(\ln x\right)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$

$f(x) = \sqrt[2]{x} \cos x$

$f'(x) = (x^{1/2})' \cos x + \sqrt[2]{x} (\cos x)' = \frac{1}{2} x^{-1/2} \cos x + \sqrt[2]{x} (-\sin x)$

$f(x) = \frac{\ln(x)}{tg\, 3x}$

$f'(x) = \frac{(\ln x)' tg(3x) - \ln x \, (tg(3x))'}{(tg(3x))^2} = \frac{\frac{1}{x} tg(3x) - \ln x \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3}{(tg(3x))^2}$

2. (1+1+3+1+2+2pont)

$f(x) = x^3 - 3x$. Számítsd ki:

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

Keresd meg a lokális szélsőértékeinek a helyeit, és határozd meg azok típusait!

hely: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x_1 = -1$ | $x_2 = 1$

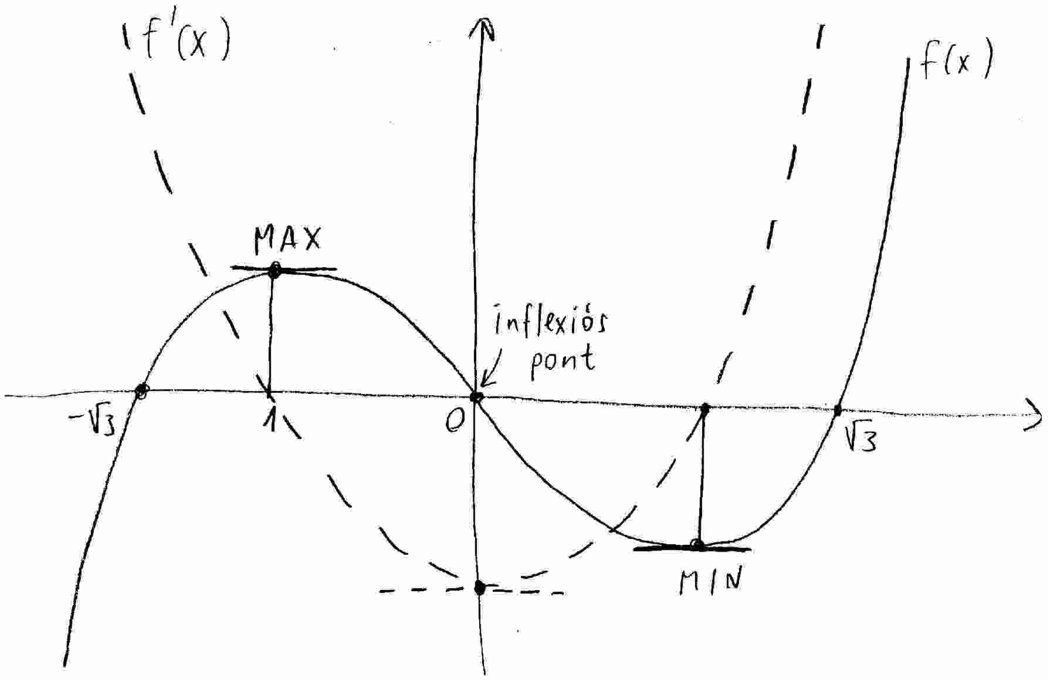
típus: $f''(x_1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ | $f''(x_2) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$

MAX | MIN

Keresd meg az inflexiós pontjának a helyét!

hely: $f''(x) = 0 = 6x \longrightarrow x = 0$. ($f'' = 6x$ előjelet vált $x = 0$-nál, így $x = 0$ valóban inflexiós pont.)

Rajzold le az f függvényt! Rajzold be ugyanarra az ábrára szaggatott vonallal az f' függvényt is!



Matematika I. Vizsga, 2011. dec. 20.

Vizsga. Matematika I. 2011.12.20 . NEPTUN:

Név: Aláírás:

1. (1+1+3+2+3 pont)
$f(x) = x^4 - 4x$.
Számítsd ki:

$f'(x) = 4x^3 - 4$ ①

$f''(x) = 12x^2$ ①

Keresd meg f lokális szélsőértékének a helyét, és határozd meg a típusát!

$0 \overset{①}{=} f'(x) = 4x^3 - 4 \longrightarrow x_1 = 1$ ①

$f''(x_1) = 12 \cdot 1^2 = 12 > 0 \longrightarrow x_1 = 1$ MINIMUM helye ①

Írd fel szélsőértékhez húzott érintő egyenletét!

$f(x_1) = f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 = -3$

$f'(x_1) = 4 \cdot 1^3 - 4 = 0$

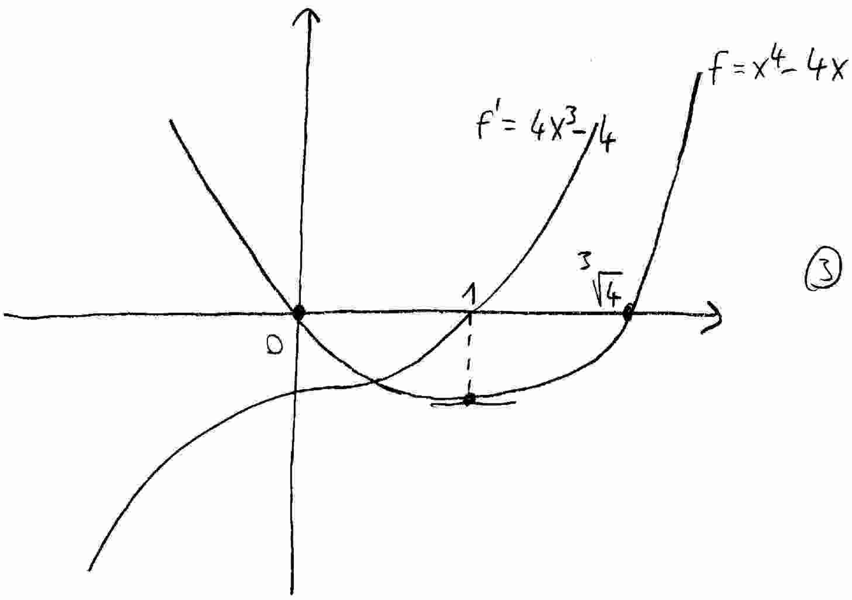
$y(x) - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

$y(x) - (-3) = 0 \cdot (x - 1)$

$y = -3$

②

Rajzold le az f függvényt! Rajzold be ugyanarra az ábrára szaggatott vonallal az f' függvényt is!



③

4. (3+1+2+4 pont)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Számold ki $A^2 + 2E$-t!

(1)

$$A^2 + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

(1) (1)

Létezik-e A^{-1}? Indokold a választ!

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 0\cdot 2 \neq 0$, tehát A^{-1} létezik

(1)

Számold ki A sajátértékeit!

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 0\cdot 2 = 0$$

(1)

$$(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 =$ 1 (1) $\lambda_2 =$ 3

Keresd meg A sajátvektorait!

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$1x + 0y = 1x$

$2x + 3y = 1y \rightarrow 2x = -2y$ (1)

$x = -y$

$1x + 0y = 3x \longrightarrow x = 0$

$2x + 3y = 3y \longrightarrow y$ tetszőleges

sajátvektor: $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ (1) sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1) $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Számítsd ki a következő deriváltakat! (5 × 2pont)

$f(x) = 1/x^2 + (\sqrt{1+x}) + \ln(-4x) + \sin(1-x)$

$f'(x) = -2x^{-3} + \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{-4x} \cdot (-4) + \cos(1-x) \cdot (-1)$

$f(x) = tg(3x)ctg(3x) = 1$

$f'(x) = 0 = \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 \cdot ctg(3x) + tg(3x) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2(3x)}\right) \cdot 3$

$f(x) = \sqrt[4]{\sin x}$

$f'(x) = \frac{1}{4}(\sin x) \cdot \cos x$

$f(x) = \sqrt[2]{x} \cos x$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \cos x + \sqrt[2]{x}(-\sin x)$

$f(x) = \frac{\sin(-3x)}{3-x}$

$f'(x) = \frac{\cos(-3x) \cdot (-3) \cdot (3-x) - \sin(-3x) \cdot (-1)}{(3-x)^2}$

2. $f(x) = 2x - 1$. (2+3+3+2pont)

Számítsd ki $f^{-1}(x)$-et!

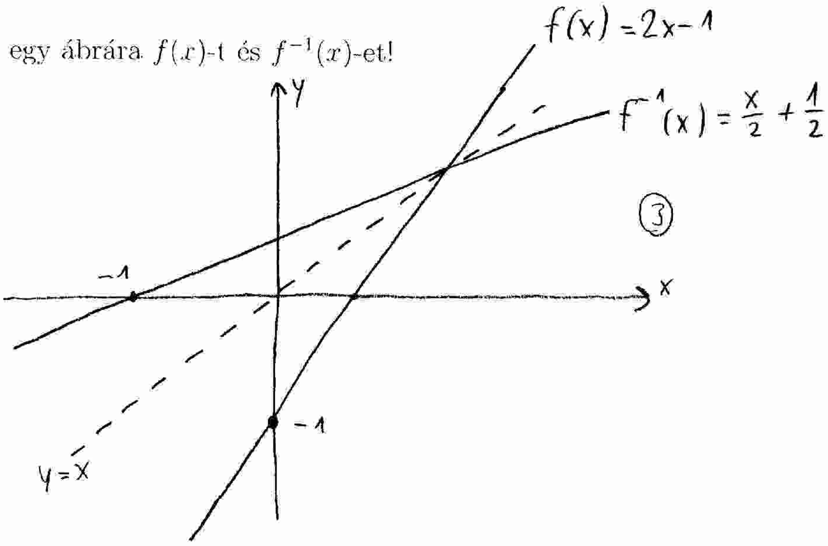
$y = 2x - 1$ (1)

$x = \frac{y+1}{2}$

$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ (1)

Rajzold le egy ábrára $f(x)$-t és $f^{-1}(x)$-et!



(3)

$\bar{v_1} = [1, 0]$, $\bar{v_2} = [2, 2]$. Oldd meg a következő egyenletet α-ra és β-ra!

$$\alpha\bar{v_1} + \beta\bar{v_2} = [4, 2]$$

$\alpha[1,0] + \beta[2,2] = [1\alpha + 2\beta, 0\alpha + 2\beta] = [4, 2]$ (1)

(1) $\left.\begin{matrix} \alpha + 2\beta = 4 \\ 2\beta = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \beta = 1, \ \alpha = 2$

$\alpha = 2$ (1) $\beta = 1$

Oldd meg a következő egyenletet z-re!

$$(2 - i)z + i = 3 - 4i$$

$(2 - i)z = 3 - 5i$

$z = \frac{3-5i}{2-i}$ (1) $= \frac{3-5i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6-5i^2-7i}{2^2+1^2} =$

$= \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$

$z = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$ (1)

Matematika I. Vizsga, 2011. dec. 27.

Vizsga. Matematika I, 2011.12.~~08~~27.   NEPTUN:

Név: Aláírás:

1. $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = (1,2,1)$ Számítsd ki a következőket!
(1+1+1+1+1+2+1+2 pont)

$\bar{a}\bar{b} = (2,-3,-1)(1,2,-1) = 2\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) = -3$

$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{(-3)\cdot(-1)-(-1)\cdot 2} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\bar{i} - (-1)\bar{j} + 7k = (5,1,7)$

$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 + 3\cdot 2 - 1\cdot 0 = 14$

Vagy $= (\bar{a}\times\bar{b})\cdot c = (5,1,7)\cdot(1,2,1) = 5\cdot 1 + 1\cdot 2 + 7\cdot 1 = 14$

Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ ~~és $\bar{c}$~~ vektorok által kifeszített háromszög T területe?

$T = \dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5^2+1^2+7^2} = \dfrac{\sqrt{75}}{2}$

Írd fel az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorokkal párhuzamos sík egyik $\bar{n}$ normálvektorát!

$\bar{n} = \bar{a}\times\bar{b} = (5,1,7)$

Írd fel az $\bar{n}$ normálvektorú és a $P(-1,0,-1)$ pontot tartalmazó sík egyenletét!

$$5\cdot(x-(-1)) + 1\cdot(y-0) + 7(z-(-1)) = 0$$

$$5x + y + 7z + 12 = 0$$

Írd fel a $Q_1(1,0,1)$, $Q_2(2,1,1)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

$\bar{v} = Q_2 - Q_1 = (1,1,0)$

$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t\cdot\bar{v} = (1,0,1) + t\cdot(1,1,0) = (1+t, t, 1)$

Keresd meg az előbb felírt sík és egyenes metszéspontját!

$$5\underbrace{(1+t)}_{x} + \underbrace{(t)}_{y} + 7\cdot\underbrace{(1)}_{z} + 12 = 0$$

$$6t + 24 = 0 \rightarrow t = -4$$

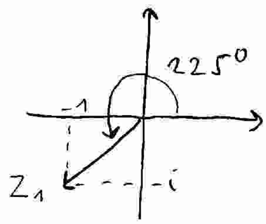
$\bar{r}(4) = (1-4, -4, 1) = (-3, -4, 1)$ metszéspont

4. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \overline{z_1}$. $= -1 + i$

Számítsd ki a következőket! (1+1+2+3+3 pont)

$z_1 z_2 = (-1-i)(-1+i) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{-1+i} = \frac{-1-i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i} = \frac{1+\overbrace{i^2}^{-1}+2i}{(-1)^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i$$



$$(z_1)^3 = \left[\sqrt{2}\cdot(\cos 225° + i \sin 225°)\right]^3 =$$

$$(\sqrt{2})^3\cdot(\cos 675° + i\sin 675°) = 2\sqrt{2}\,(\underbrace{\cos 315°}_{1/\sqrt{2}} + i\underbrace{\sin 315°}_{-1/\sqrt{2}}) =$$

$$= 2 - 2i$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{\sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225°)} = \overbrace{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{225°+k\cdot 360°}{2} + i\sin\frac{225°+k\cdot 360°}{2}\right)$$

$k = 0, 1$

gyökök: $w_1 = \sqrt[4]{2}\,(\cos 112{,}5° + i\sin 112{,}5°)$

$W_2 = \sqrt[4]{2}\,(\cos 292{,}5° + i\sin 292{,}5°)$

Oldd meg u, v-re:

$$(1-i)u - (1+i)v = 4$$
$$u - v = 2$$

$U = 2 + V$

$(1-i)(2+V) - (1+i)V = 4$

$-2iV + (2-2i) = 4$

$V = \frac{2+2i}{-2i} = -1 - \frac{1}{i} = -1 + i$, $U = 1 + i$

Ell.: $(1-i)(1+i) - (1+i)(-1+i) = 2 - (-2) = 4$

$(1+i) - (-1+i) = 2$

3. Számítsd ki a következő deriváltakat! (5 × 2pont)

$f(x) = 1/(3x) + (\sqrt{x-3}) + tg(-4x) + \sin(1-3x)$

$f'(x) = -(3x)^{-2} \cdot 3 + \frac{1}{2}(x-3)^{-1/2} + \frac{1}{\cos^2(-4x)} \cdot (-4) + \cos(1-3x) \cdot (-3)$

$f(x) = \sin(3x)\, arctg(4x)$

$f'(x) = \cos(3x) \cdot 3 \cdot arctg(4x) + \sin(3x) \cdot \frac{1}{1+(4x)^2} \cdot 4$

$f(x) = \sqrt[2]{\ln x - x}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x - x)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)$

$f(x) = x^{-2} \cos x$

$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} \cos x + x^{-2}(-\sin x)$

$f(x) = \frac{\ln(2x)}{e^{3x}}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot e^{3x} - \ln(2x) \cdot e^{3x} \cdot 3}{(e^{3x})^2}$

2. (1+1+3+1+2+2pont)

Legyen $f(x) = e^{-2x}x$. Számítsd ki:

$f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2)\cdot x + e^{-2x}\cdot 1 = e^{-2x}(-2x+1)$

$f''(x) = e^{-2x}\cdot(-2)(-2x+1) + e^{-2x}\cdot(-2) = e^{-2x}(4x-4)$

Keresd meg f lokális szélsőértékének a helyét, és határozd meg a típus[]at!

$f'(x) = 0 = e^{-2x}(-2x+1) \longrightarrow x_1 = 1/2$

$f''(\frac{1}{2}) = e^{-2\cdot\frac{1}{2}}(4\cdot\frac{1}{2}-4) = e^{-1}\cdot(-2) < 0$ MAXIMUM

Keresd meg f inflexiós pontjának a helyét!

$f''(x) = 0 = e^{-2x}(4x-4) \longrightarrow x_{infl} = 1$

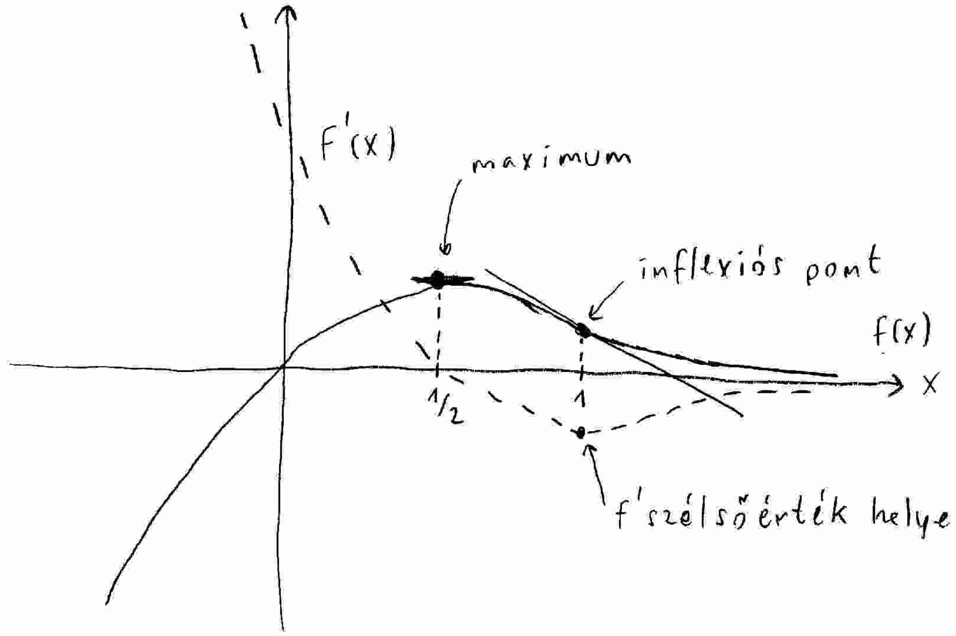
Írd fel f-et az inflexiós pontjában érintő egyenesnek az egyenletét!

$f(x_{infl}) = f(1) = e^{-2\cdot 1}\cdot 1 = \frac{1}{e^2}$, $f'(x_{infl}) = f'(1) = e^{-2\cdot 1}(-2\cdot 1+1) = -\frac{1}{e^2}$

érintő egyenlete: $y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

esetünkben: $y(x) - \frac{1}{e^2} = (-\frac{1}{e^2})(x-1)$

Rajzold le az f függvényt! Rajzold be ugyanarra az ábrára szaggatott vonallal az f' függvényt is!



Vizsga, Matematika I, 1012.01.05

Vizsga. Matematika I. 2012.01.05. NEPTUN:

Név: Aláírás:

1. Számítsd ki a következő deriváltakat! (5 × 2pont)

$f(x) = 1/x^5 + (\sqrt{-2x}) + \mathrm{ctg}(4x+1) + 5^{4x}$

$f'(x) = -5x^{-6} + \frac{1}{2}(-2x)^{-1/2} \cdot (-2) - \frac{1}{\sin^2(4x+1)} \cdot 4 + 5^{4x} \cdot \ln 5 \cdot 4$

$f(x) = \cos(3x)\ln(4x)$

$f'(x) = -\sin(3x) \cdot \ln(4x) + \cos(3x) \cdot \frac{1}{4x} \cdot 4$

$f(x) = (x - \cos x)^{77}$

$f'(x) = 77 \cdot (x - \cos x)^{76} \cdot (1 + \sin x)$

$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \frac{1 \cdot (x-2) - (x-1) \cdot 1}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \mathrm{ctg}(2x)$

$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(2x)} \cdot 2 = \frac{-\sin(2x) \cdot 2 \cdot \sin 2x - \cos(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2}{(\sin(2x))^2}$

4.. $f(x) = 4x^2 - 2x^4$. (1+1+3+2+3pont)

$f'(x) = 8x - 8x^3 = 8x(1-x^2) = 8x(1-x)(1+x)$

$f''(x) = 8 - 24x^2$

Keresd meg f lokális szélsőértékének a helyét és határozd meg a típusát!.

$f'(x) = 0 = 8x - 8x^3 \longrightarrow \quad x_1 = -1 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1$

$f''(-1) = 8 - 24(-1)^2 = -16 < 0$ MAX

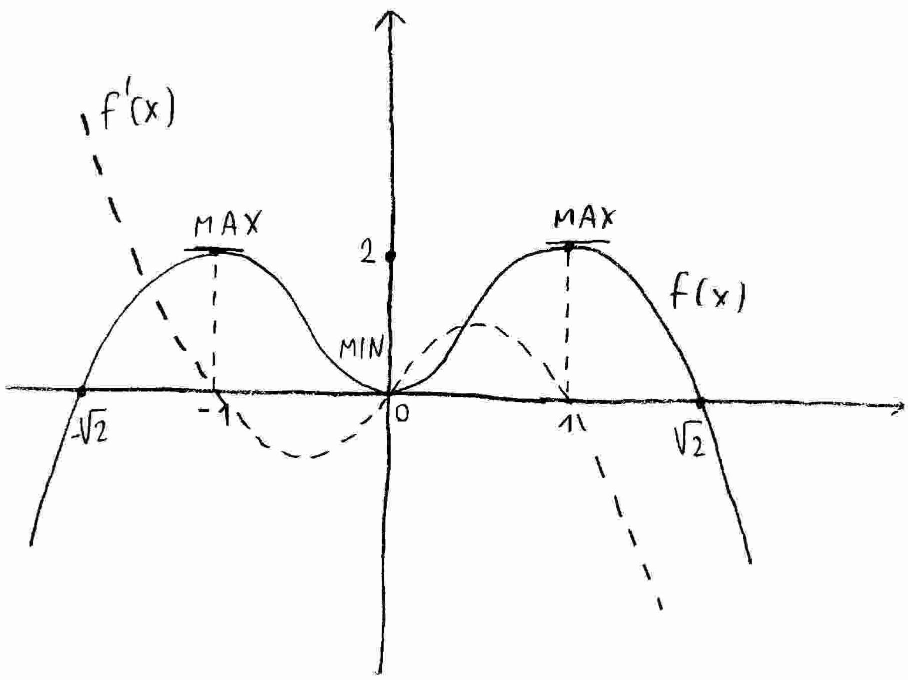
$f''(0) = 8 - 24 \cdot 0^2 = 8 > 0$ MIN

$f''(1) = 8 - 24 \cdot 1^2 = -16 < 0$ MAX

Mi D_f és R_f?

$D_f = (-\infty, \infty)$ $\qquad R_f = (-\infty, f(-1)] = (-\infty, f(1)] = (-\infty, 2]$

Rajzold le az f függvényt! Rajzold be ugyanarra az ábrára szaggatott vonallal az f' függvényt is!



3. $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$; $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = (1, 2, 1)$ Számítsd ki a következőket! (1+1+1+2+3+2 pont)

$$\bar{a}\bar{b} = (1,1,0)(1,0,3) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 3 = 1$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 3\bar{j} - 1\bar{k}$$

$$= (3, -3, -1)$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \overset{-6}{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} - 1\cdot \overset{-2}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} + 0\overset{2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -4$$

vagy $= (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (3, -3, -1)(1, 2, 1) = 3\cdot 1 - 3\cdot 2 - 1\cdot 1 = -4$

Legyen adott három pont: $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$, $P_3(0, 0, 1)$. Írj fel két olyan $\bar{v}$ és $\bar{w}$ vektort, amelyek párhuzamosak a három ponton átmenő síkkal!

$\bar{v} = P_2 - P_1 = (-1, 1, 0)$ $\quad\quad$ $\bar{w} = P_3 - P_1 = (-1, 0, 1)$

Írd fel a sík egy $\bar{n}$ normálvektorát!

$$\bar{n} = \bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} = (1,1,1)$$

Írd fel a $P_{1,2,3}$ pontokat tartalmazó sík egyenletét!

$$1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$x + y + z - 1 = 0$$

2. (2+2+2+3+1 pont) Számítsd ki:

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n+6} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{3}{n}\right)\right]^{2n+6} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right]^2 \left(1+\frac{3}{n}\right)^6 =$

$= \left[e^3\right]^2 \cdot 1^6 = e^6$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3n-8}{n^3+n^2+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3/n^2-8/n^3}{1+1/n+9/n^3} = \frac{1-0-0}{1+0+0} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{e^{x/2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{e^{x/2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{e^{x/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\infty} = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Számold ki C-t!

$C = AB + BA - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$

Létezik-e C^{-1}? Indokold a választ!

$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} = 0\cdot 18 - 10\cdot 6 = -60 \neq 0$

Mivel $\det C \neq 0$, C^{-1} létezik