Zh1, Matematika I, 2012.oktober. NEPTUN: Gyak.Vez.:

Név: Aláírás:

1. Beugro feladatok (otbol legalabb harom helyes megoldas szukseges) 5×2 pont.

- Ird fel a $P(1,5,3)$ ponton atmeno, $\bar{v} = [-2,4,1]$ iranyvektoru egyenes parametrikus egyenletet!

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t \cdot v = [1,5,3] + t[-2,4,1] =$$

$$= [1-2t,\ 5+4t,\ 3+t]$$

- Ird fel a haromdimenzios egysegmatrixot!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\bar{v} = [2,0,3]$. Mennyi $\bar{v}^0$?

$$\bar{v}^0 = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{[2,0,3]}{\sqrt{2^2+0^2+3^2}} = \left[\frac{2}{\sqrt{13}},\ 0,\ \frac{3}{\sqrt{13}}\right]$$

- Add meg a következő lineáris leképezés mátrixát!

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3x+y \\ 7x-2y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

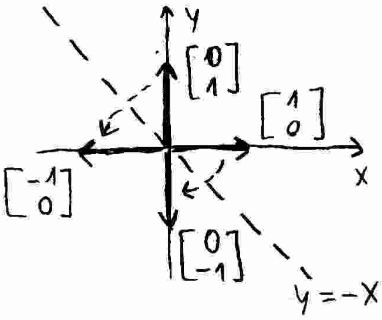
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

- Szamold ki: $\frac{7+2i}{4-i}$,

$$\frac{7+2i}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{28+2\overset{-1}{i^2}+15i}{4^2+1^2} = \frac{26}{17} + \frac{15}{17}i$$

2. (3+2+5 pont)

- Ird fel az $-x = y$ egyenesre torteno meroleges tukrozes linearis transzformaciojat, illetve annak T matrixat!



$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ első oszlop

$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ második oszlop

$$T = \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix}$$

- Mennyi T^2 es T^{-1} ?

$T^2 = \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, mivel két tükrözés eredménye az identikus transzformáció

Mivel $T^2 = T\cdot T = E$ és $T\cdot T^{-1} = E$, így $T^{-1} = T$

- Keresd meg T sajatertekeit es sajatvektorait!

T a tükrözés tengelyén levő vektorokat helyben hagyja, míg a rá merőlegeseket megfordítja,

így az $\begin{bmatrix}x\\-x\end{bmatrix}$ vektorok a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez,
a $\begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}$ vektorok a $\lambda_2 = -1$ sajátértikhez tartoznak.

$\boxed{\lambda_1 = 1,\ \bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}$ és $\boxed{\lambda_2 = -1,\ \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$.

Vagy: $0 = \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix}0-\lambda & -1\\-1 & 0-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \longrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

λ_1: $\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}-y &= x\\-x &= y\end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix}x\\-x\end{bmatrix}$$

λ_2: $\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = -1\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}-y &= -x\\-x &= -y\end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}$$

$V_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $V_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

3. (1+2+3+2+3 pont)

- $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4x \\ 3x-2y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

  Mennyi A?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- Keresd meg A sajatertekeit!

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) - 0 \cdot 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -2$$

- Keresd meg A sajatvektorait!

λ_1: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} 4x + 0y = 4x \\ 3x - 2y = 4y \end{matrix}\right\} \to y = \frac{1}{2}x$$

sajátvektorok: $\begin{bmatrix} x \\ 1/2\,x \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{egy ezekből}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \overline{V}_1$

λ_2: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$4x + 0y = -2x \to x = 0$

$3x - 2y = -2y$ y tetszőleges

$\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ezekből}]{\text{egy}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \overline{V}_2$

- Ird fel $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektort a sajatvektorok linearis kombinaciojakent!

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} 2\alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{matrix} \to \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

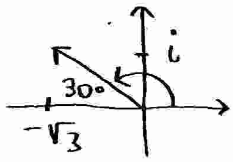
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Mennyi $A^{55}\bar{v}$? (A vegeredmenyt nem kell numerikusan kiszamitani!)

$$A^{55}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^{55}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4^{55} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot (-2)^{55} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. (2+4+4 pont)

- $z_1 = -\sqrt{3} + i$. Mi z_1-trigonometrikus alakja?



$$z_1 = \underbrace{2}_{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}(\cos 150^\circ + i\cdot\sin 150^\circ)$$

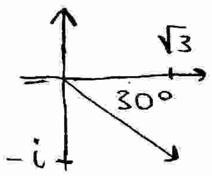
- Mennyi z_1^3 es iz_1^3? Add meg az eredmenyeket algebrai alakban is!

$$z_1^3 = [2(\cos 150^\circ + i\cdot\sin 150^\circ)]^3 = \underbrace{8}_{2^3}\cdot(\cos \underbrace{450^\circ}_{3\cdot 150^\circ} + i\cdot\sin 450^\circ) =$$

$$= 8\cdot(\cos 90^\circ + i\cdot\sin 90^\circ) = 8i$$

$$i z_1^3 = i\cdot 8i = -8$$

- Mennyi $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$?



$$\sqrt[4]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[4]{2(\cos 330^\circ + i\cdot\sin 330^\circ)} =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos[\underbrace{82{,}5^\circ}_{\frac{330^\circ}{4}} + k\cdot\underbrace{90^\circ}_{\frac{360^\circ}{4}}] + i\cdot\sin[82{,}5^\circ + k\cdot 90^\circ]\right),\ k = 0,1,2,3$$

$w_0 = \sqrt[4]{2}(\cos 82{,}5^\circ + i\cdot\sin 82{,}5^\circ)$

$w_1 =$ - - - $172{,}5^\circ$ - - -

$w_2 =$ - - - $262{,}5^\circ$ - - -

$w_3 =$ - - - $352{,}5^\circ$ - - -

Zh1, Matematika I, 2012.oktober. NEPTUN: Gyak.Vez.:

Név: Aláírás:

1. Beugro feladatok (otbol legalabb harom helyes megoldas szukseges) 5 × 2 pont.

- Ird fel az alabbi polinom gyokeit! x^2+25. Ird fel a polinom gyoktenyezos alakjat!

$$x^2=-25 \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 5i \\ x_2=-5i \end{array}$$

$$x^2+25=(x-5i)(x-(-5i)) = (x-5i)(x+5i)$$

- Szamold ki: $\frac{4+3i}{3-2i}$,

$$\frac{4+3i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{12+6\overbrace{i^2}^{-1}+17i}{3^2+2^2} = \frac{6+17i}{13} = \frac{6}{13}+\frac{17}{13}i$$

- $\bar{v}_1 = [2,2,3]$, $\bar{v}_2=[-2,1,4]$. Mennyi $\bar{v}_1\bar{v}_2$?

$$\bar{V}_1\bar{V}_2 = [2,2,3]\cdot[-2,1,4] = 2\cdot(-2)+2\cdot1+3\cdot4 = 10$$

- Mennyi a kovetkezo maradekos osztas hanyadosa es maradeka?
  $(8x+3):(2x+8)$

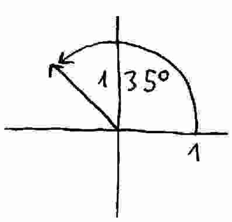
$$\begin{array}{l} (8x+3):(2x+8)=4 \\ \underline{-(8x+32)} \\ \quad -29 \end{array}$$

hányados

maradék

Vagyis $8x+3=(2x+8)\cdot4-29$

- Ird fel z algebrai alakjait, ahol
  $z=4(\cos 135° + i\sin 135°)$



$$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) =$$

$$= -2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$$

2. (3+3+4 pont)

- Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Ird fel az A inverzet definialo egyenletet!

$$A A^{-1} = E$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+3y & 2u+3v \\ 0x+4y & 0u+4v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mennyi A^{-1} ?

$$\begin{array}{c} 2x+3y=1 \\ 4y=0 \\ \hline y=0,\ x=\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2u+3v=0 \\ 4v=1 \\ \hline v=\frac{1}{4},\ u=-\frac{3}{8} \end{array} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

- Legyen $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Mennyi B^{-1} ?

Mivel B blokkdiagonális: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$,

elég a blokkokat külön-külön invertálni:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad [7]^{-1} = [1/7],$$

tehát

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1/2 & -3/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/7 \end{array}\right]$$

3. ((5+1)+4 pont)

- Oldd meg a Gauss-elimináció segítségével a következő egyenletrendszert! Ellenorizd az eredmenyt!

$$
\begin{aligned}
x - y + z &= 2\\
2x + y - z &= 1\\
-x - y + 2z &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right|
\xrightarrow[\text{III.}\to\text{III.}+\text{I.}]{\text{II.}\to\text{II.}-2\cdot\text{I.}}
\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right|
$$

$$
\xrightarrow{\text{III.}\to\text{III.}+\frac{2}{3}\text{II.}}
\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array}\right|
\longrightarrow 3\cdot y - 3\cdot 1 = -3 \longrightarrow y = 0
$$

$1\cdot z = 1$

$z = 1$

$1x - 1\cdot\underset{y}{0} + 1\cdot\underset{z}{1} = 2$

$\longrightarrow x = 1$

$x = 1$
$y = 0$
$z = 1$

Ellenőrzés:

$1 - 0 + 1 = 2$ ✓

$2\cdot 1 + 0 - 1 = 1$ ✓

$-1 - 0 + 2\cdot 1 = 1$ ✓

Mennyi z, ha $(1+2i)z + 1 - i = 3 + 4i$?

$$(1+2i)z = 2 + 5i$$

$$z = \frac{2+5i}{1+2i} = \frac{2+5i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-10\overbrace{i^2}^{-1}+i}{1^2+2^2} =$$

$$= \frac{12+i}{5} = \frac{12}{5} + \frac{1}{5}i$$

4. (1+1+1+1+2+2+2 pont)
$\bar{v}_1 = [2,0,3]$, $\bar{v}_2 = [-3,1,0]$, $\bar{v}_3 = [3,1,0]$.

- Mennyi $3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$?

$$3\cdot[2,0,3]+2\cdot[-3,1,0]=[6,0,9]+[-6,2,0]=[0,2,9]$$

- Mennyi $\bar{v}_1\bar{v}_2$?

$$[2,0,3][-3,1,0]=2\cdot(-3)+0\cdot 1+3\cdot 0=-6$$

- Mennyi $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$?

$$\bar{V}_1\times\bar{V}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\overbrace{\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}}^{0\cdot 0-3\cdot 1}-\bar{j}\overbrace{\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix}}^{2\cdot 0-3\cdot(-3)}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-3\bar{i}-9\bar{j}+2\bar{k}$$
$$=[-3,-9,2]$$

- Mennyi $(\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3)$?

$$(\bar{V}_1\bar{V}_2V_3)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}}^{0}-0\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}}^{0}+3\overbrace{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}}^{-6}=-18$$

vagy $=(\bar{V}_1\times\bar{V}_2)V_3=[-3,-9,2]\cdot[3,1,0]=-18$

- Meroleges-e $\bar{v}_1$ es $\bar{v}_2$? Miert?

Nem, mert a $\bar{V}_1\bar{V}_2$ skalár szorzat nem nulla.

- Egy sikba esik-e $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ es $\bar{v}_3$? Miert?

Nem, mert a $(\bar{V}_1\bar{V}_2\bar{V}_3)$ vegyes szorzat nem nulla

- Mekkora szoget zar be $\bar{v}_1$ es $\bar{v}_2$?

$$\bar{V}_1\bar{V}_2=|\bar{V}_1|\cdot|\bar{V}_2|\cdot\cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha=\frac{\bar{V}_1\cdot\bar{V}_2}{|\bar{V}_1|\cdot|\bar{V}_2|}=\frac{-6}{\sqrt{2^2+0^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+0^2}}$$
$$=\frac{-6}{\sqrt{13}\,\sqrt{10}}\approx -0.526$$

$$\longrightarrow \alpha\approx 2.125\,\text{rad}$$
$$\approx 121.7^\circ$$

Zh1, Matematika I, 2012.oktober. NEPTUN: Gyak.Vez.:

Név: Aláírás:

1. Beugro feladatok (otbol legalabb harom helyes megoldas szukseges) 5 × 2 pont.

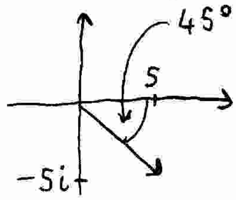
- Ird fel az alabbi polinom gyokeit!

  $x^2 + 9x$, $= x(x+9) \longrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -9$

  Ird fel a polinom gyoktenyezos alakjat!

  $x^2 + 9x = x(x+9)$

- Ird fel $z = 5 - 5i$trigonometrikus alakjat!



  vagy $-45°$

  $Z = \underbrace{5\sqrt{2}}_{\sqrt{5^2+5^2}} \cdot (\cos 315° + i \cdot \sin 315°)$

- Mennyi i^5?

  $i^5 = \underbrace{\underbrace{(i \cdot i)}_{-1} \cdot \underbrace{(i \cdot i)}_{-1}}_{1} \cdot i = i$

- Mennyi $(4(\cos 35° + i \sin 35°))(3(\cos 88° + i \sin \cancel{28}88°))$ trigonometrikus alakja?

  $\underset{4\cdot 3}{12}(\cos \underset{35° + 88°}{123°} + i \cdot \sin 123°)$

  Mivel a feladat "sajtóhibás", bármilyen "értelmes" megoldási kísérletet helyesnek tekintek. (V.P.)

- $\bar{v}_1 = [2, 1, 0]$, $\bar{v}_2 = [-2, 0, 1]$, $\bar{v}_3 = [3, 1, 0]$. Mennyi $(\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3)$?

$$(\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{(-1)}_{0\cdot 0 - 1\cdot 1} - 1 \cdot \underbrace{(-3)}_{-2\cdot 0 - 1\cdot 3} + 0 \cdot \underbrace{(-2)}_{-2\cdot 1 - 0\cdot 3} = 1$$

2. (3+3+2+2 pont)

- Mennyi $\sqrt[3]{i}$? Add meg az eredmenyt algebrai es trigonometrikus alakban is!

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)} = \cos(\underset{\uparrow \frac{90^\circ}{3}}{30^\circ} + k\cdot \underset{\uparrow \frac{360^\circ}{3}}{120^\circ}) + i\cdot\sin(30^\circ + k\cdot 120^\circ) \qquad k=0,1,2$$

$$W_1 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$W_2 = \cos 150^\circ + i\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$W_3 = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ = -i$$

- $\bar{v}_1 = [3,2]$, $\bar{v}_2 = [0,4]$. Számold ki α és β-t, ha

$$[x,y] = \alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2$$

$$[x,y] = \alpha[3,2] + \beta[0,4] = [3\alpha + 0\beta,\ 2\alpha + 4\beta]$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha + 0\beta = x \\ 2\alpha + 4\beta = y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x + 0y \\ \beta = \frac{y - 2\cdot\frac{1}{3}x}{4} = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y \end{array}$$

- Keresd meg azokat R, S matrixokat, amelyekre teljesul az, hogy

$$R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad S\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x + 0y \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + 0\beta \\ 2\alpha + 4\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \longrightarrow S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Mennyi RS es SR ?

Mivel R és S egymás inverzei, így $RS = SR = E$.

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (2+3+2+3 pont)

- Legyen

$$\phi : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x-5y \\ -x-2y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \psi : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x-y \\ x-y \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

  Mennyi A es B?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Ha $\phi\left(\psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) = C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, akkor mennyi a C matrix?

$1 \cdot 2 + (-5) \cdot 1$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$-1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1$

- Ha $\psi\left(\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) = D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, akkor mennyi a D matrix?

$$D = BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

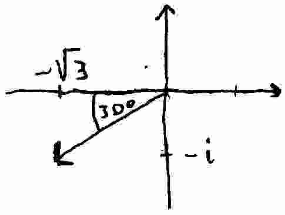
- Mennyi $AB - BA + 3E$?

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \overbrace{3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

4. (1+(3+2)+4 pont)

- $z_1 = -\sqrt{3} - i$. Mi z_1 trigonometrikus alakja?



$$z_1 = \underbrace{2}_{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}}(\cos 210^\circ + i\cdot\sin 210^\circ)$$

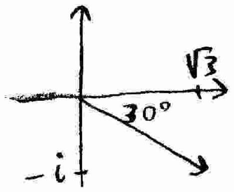
- Mennyi z_1^3 es z_1^3/i? Add meg az eredmenyeket algebrai alakban is!

$$z_1^3 = [2(\cos 210^\circ + i\cdot\sin 210^\circ)]^3 = \underbrace{8}_{2^3}\cdot(\cos \underbrace{630^\circ}_{3\cdot 210^\circ} + i\sin 630^\circ) =$$

$$= 8(\cos 270^\circ + i\cdot\sin 270^\circ) = -8i$$

$$\frac{z_1^3}{i} = -\frac{8i}{i} = -8$$

- Mennyi $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$?



$$\sqrt[3]{2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)} =$$

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos[110^\circ + k\cdot 120^\circ] + i\cdot\sin[110^\circ + k\cdot 120^\circ]\right),$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 230^\circ + i\cdot\sin 230^\circ)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{2}(\cos 350^\circ + i\cdot\sin 350^\circ)$$

Zh1, Matematika I, 2012.oktober. NEPTUN: Gyak.Vez.:

Név: Aláírás:

1. Beugro feladatok (otbol legalabb harom helyes megoldas szukseges) 5×2 pont.

- $\bar{v}_1 = [2,1,3]$, $\bar{v}_2 = [-2,1,1]$. Mennyi $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$?

$$\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1\cdot 1 - 3\cdot 1} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - 8\bar{j} + 4\bar{k} =$$

$$= [-2, -8, 4]$$

- Ird fel a $P(1,2,1)$ ponton atmeno, $\bar{v} = [-2,0,1]$ normalvektoru sik egyenletet!

$$-2(x-1) + 0\cdot(y-2) + 1\cdot(z-1) = 0$$

vagy $-2x + z + 1 = 0$

- Mennyi $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$? Nincs értelmezve (mivel az első mátrix sora 3, míg a második oszlopa csak 2 hosszú)

- Legyen $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Mennyi A?

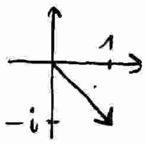
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Mennyi $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 20 \quad (\text{vagy } [20])$$

2. (1+4+5 pont)

- $z_1 = 1 - i$. Mi z_1 trigonometrikus alakja?



$$z_1 = \underbrace{\sqrt{2}}_{\sqrt{1^2+1^2}} \cdot (\cos 315^\circ + i \cdot \sin 315^\circ)$$

- Ird fel $\sqrt{z_1}$ eredmenyeit trigonometrikus alakban!

$$\sqrt{\sqrt{2} \cdot (\cos 315^\circ + i \cdot \sin 315^\circ)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left[\frac{315^\circ}{2} + k \cdot 180^\circ\right] + i \cdot \sin\left[\frac{315^\circ}{2} + k \cdot 180^\circ\right]\right)$$

ahol $k = 0, 1$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\,(\cos 157{,}5^\circ + i \cdot \sin 157{,}5^\circ)$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\,(\cos 337{,}5^\circ + i \cdot \sin 337{,}5^\circ)$$

- Oldd meg a következő kétismeretlenes egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} ① \quad iz_1 + (1+i)z_2 &= 1 \\ ② \quad iz_1 + z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ellenőrizd az eredményt!

$① - ②: \quad iz_2 = 1 \longrightarrow z_2 = -i$

$②: \quad iz_1 + (-i) = 0 \longrightarrow z_1 = 1$

Ellenőrzés: $i \cdot 1 + (1+i)(-i) = 1$

$i \cdot 1 + (-i) = 0$

3. (1+1+1+1+2+2+2 pont)
$\bar{v}_1 = [2, 1, 0]$, $\bar{v}_2 = [-1, 3, 1]$, $\bar{v}_3 = [3, 1, 0]$.

- Mennyi $3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$?

$$3 \cdot [2,1,0] + 2[-1,3,1] = [6,3,0] + [-2,6,2] = [4,9,2]$$

- Mennyi $\bar{v}_1\bar{v}_2$?

$$[2,1,0] \cdot [-1,3,1] = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 1$$

- Mennyi $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$?

$$\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{1 \cdot 1 - 0 \cdot 3} - \bar{j} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k} =$$
$$= [1, -2, 7]$$

- Mennyi $(\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3)$?

$$(\bar{V}_1\bar{V}_2\bar{V}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-10)$$
$$= +1$$

Vagy $= (\bar{V}_1 \times \bar{V}_2) \cdot \bar{V}_3 = [1, -2, 7] \cdot [3, 1, 0] = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = +1$

- Merőleges-e $\bar{v}_1$ es $\bar{v}_2$? Miert?

Nem, mert a $\bar{V}_1\bar{V}_2 = 1$ skalárszorzat nem nulla.

- Egy sikba esik-e $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ es $\bar{v}_3$? Miert?

Nem, mert a $(\bar{V}_1\bar{V}_2\bar{V}_3) = 1$ vegyes szorzat nem nulla

- Mekkora szoget zar be $\bar{v}_1$ es $\bar{v}_2$?

$$\cos\alpha = \frac{\bar{V}_1\bar{V}_2}{|\bar{V}_1| \cdot |\bar{V}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} \approx 0.135$$

$$\Longrightarrow \alpha \approx 1.44 \text{rad} \approx 82^\circ$$

4. (3+2+2+3 pont)

- Add meg a $P_1[1,1,3]$, $P_2[2,1,5]$ és a $P_3[1,0,2]$ pontokat tartalmazó sík egy normalvektorat!

$$\bar{a} = P_2 - P_1 = [1,0,2] \qquad \bar{n} = \bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\bar{b} = P_3 - P_1 = [0,-1,-1]$$

$$= \bar{i}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_{0\cdot(-1)-2\cdot(-1)} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}_{1\cdot(-1)-0\cdot 0} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k} = [2,1,-1]$$

- Add meg a sik egyenletet!

$\bar{n}$ $\qquad P_1$

$$2(x-1) + 1\cdot(y-1) - 1(z-3) = 0$$

$$2x + y - z = 0$$

- Adott két pont: $P_1[1,2,2]$ és $P_2[0,3,1]$. Add meg a rajtuk keresztülmenő egyenes paraméteres egyenletet!

$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t\cdot\bar{v}$, ahol (pl.) $\bar{r}_0 = [1,2,2]$, $\bar{v} = P_2 - P_1 = [-1,1,-1]$

$$\bar{r}(t) = [1,2,2] + t\cdot[-1,1,-1] = [\underbrace{1-t}_{x}, \underbrace{2+t}_{y}, \underbrace{2-t}_{z}]$$

- Keresd meg az egyenes és a sík metszéspontjat!

$$2(1-t) + (2+t) - (2-t) = 0$$

$$2 + 0t = 0$$

Mivel nincs t-re megoldás, így az egyenes nem metszi a síkot!