Jan. 30. Mat. 1.

1) Beugró feladatok:

a) Rajzold le az $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ függvényt!

b) $z=-1+i$. Mi z trigonometrikus alakja?

c) Mennyi $\left[ctg(7-2x)\right]'$?

d) $f(x)=e^{2x+1}-3$. Mennyi $f^{-1}(x)$?

e) $\overline{v}_1=[1,0,2]$, $\overline{v}_2=\overline{j}-2\overline{k}$. Mennyi $\overline{v}_1\times\overline{v}_2$? (5x2 pont)

2) a) $\left[\cos\left(\frac{x+7}{7x+1}\right)\right]'=?$

$\left[\sqrt[3]{\ln(3x-1)}\right]'=?$

$\left[\frac{ctg(4x)}{\ln(3x)}\right]'=?$ (3x2 pont)

b) Mennyi $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{2n}\right)^{2n-1}$ és $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n-1}{-3n^3+n^2}$ (3+1 pont)

3) Legyen adott három pont: $P_1(3,0,0)$, $P_2(0,3,0)$, $P_3(0,0,3)$!

a) Írd fel a pontokat tartalmazó sík egyenletét!

Legyen adott két pont: $Q_1(4,1,1)$ és $Q_2(5,2,2)$!

b) Írd fel a két ponton átmenő egyenes paraméteres egyenletét!

c) Keresd meg a sík és az egyenes metszéspontját!

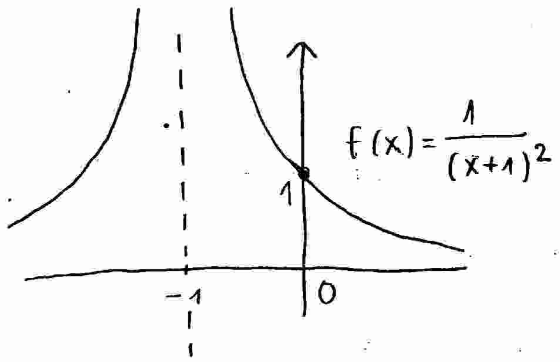
d) Keresd meg a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szög koszinuszát! (3+2+3+2 pont)

4) a) $x_0=3$, $f(x)=x^2-5x$. Írd fel $f(x)$ érintőjének az egyenletét az x_0 pontban!

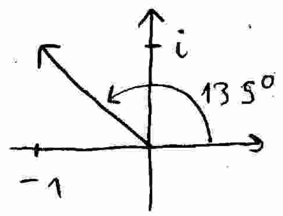
b) Vizsgáld meg az $a_n=\frac{3n+2}{2n+3}$ sorozat monotonitását!

c) Írd fel az $f(x)=\ln(x+3)$ függvény harmadrendű Taylor-polinomját az $x_0=0$ pont körül! (3+3+4 pont)

① a)



b) $z = -1 + i = \sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)$



c) $\left[ctg\,(7-2x) \right]' = - \frac{1}{\sin^2(7-2x)} \cdot (-2)$

d) $f(x) = e^{2x+1} - 3$

$y = e^{2x+1} - 3$

$y + 3 = e^{2x+1}$

$\ln(y+3) = \ln(e^{2x+1}) = 2x+1$

$x = \frac{\ln(y+3) - 1}{2}$

$f^{-1}(y) = \frac{\ln(y+3) - 1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+3) - 1}{2}$

e) $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = [1,0,2] \times [0,1,-2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= \bar{i} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \bar{i} \cdot \underset{\uparrow \atop 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 2}{(-2)} - \bar{j} \cdot (-2) + \bar{k} \cdot 1 = [-2, 2, 1]$

② a) $\left[\cos\left(\frac{x+7}{7x+1}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{x+7}{7x+1}\right)\cdot\left(\frac{x+7}{7x+1}\right)' =$

$$= -\sin\left(\frac{x+7}{7x+1}\right)\cdot\frac{1\cdot(7x+1)-(x+7)\cdot 7}{(7x+1)^2}$$

$$\left[\sqrt[3]{\ln(3x-1)}\right]' = \left[(\ln(3x-1))^{1/3}\right]' = \frac{1}{3}\cdot(\ln(3x-1))^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3x-1}\cdot 3$$

$$\left[\frac{ctg(4x)}{\ln(3x)}\right]' = \frac{[ctg(4x)]'\cdot\ln(3x) - ctg(4x)\cdot[\ln(3x)]'}{[\ln(3x)]^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sin^2(4x)}\cdot 4\cdot\ln(3x) - ctg(4x)\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3}{[\ln(3x)]^2}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{2n}\right)^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} 0.5^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}[0.5^2]^n\cdot 0.5^{-1} = 0$

[mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{5}{2n} = 0.5$]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n-1}{-3n^3+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1/n+1/n^2-1/n^3}{-3+1/n} = \frac{-0+0-0}{-3+0} = 0$$

(3) a) két "síkbeli" vektor: $\bar{a} = P_2 - P_1 = (-3, 3, 0)$

$\bar{b} = P_3 - P_1 = (-3, 0, 3)$

a sík normálvektora:

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 9\bar{i} + 9\bar{j} + 9\bar{k} = [9, 9, 9]$$

a sík egyenlete:

$$0 = \bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = [9, 9, 9]\big((x, y, z) - (3, 0, 0)\big) =$$

$$= 9 \cdot (x-3) + 9(y-0) + 9 \cdot (z-0) = 9x + 9y + 9z - 27 = 0$$

b) $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t \cdot \bar{v} = [4, 1, 1] + t \cdot (1, 1, 1) = [4+t, 1+t, 1+t]$

$Q_2 - Q_1 = (5, 2, 2) - (4, 1, 1)$

c) a metszéspont:

$$9 \cdot (4+t) + 9(1+t) + 9(1+t) - 27 = 0$$

$$27t + 27 = 0$$

$$t = -1$$

$$\bar{r}(-1) = [4 + (-1), 1 + (-1), 1 + (-1)] = [3, 0, 0]$$

d) $\bar{n} = (9, 9, 9)$, $\bar{v} = [1, 1, 1]$

Mivel $\bar{n} = 9 \cdot \bar{v}$, így párhuzamosak, a közbezárt szög 0°, tehát $\cos 0^\circ = 1$.

Vagy: $\bar{n} \cdot \bar{v} = |\bar{n}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\alpha$

$$(9, 9, 9) \cdot (1, 1, 1) = 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 27 = \overbrace{\sqrt{9^2 + 9^2 + 9^2}}^{3\sqrt{3}} \cdot \overbrace{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}^{\sqrt{3}} \cdot \cos\alpha$$

$$27 = 27 \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = 1$$

④ a) $f(x)=x^2-5x$, $f'(x)=2x-5$

$x_0=3$, $f(x_0)=3^2-5\cdot 3=-6$, $f'(x_0)=2\cdot 3-5=1$

érintő egyenlete: $f'(x_0)\cdot(x-x_0)=y(x)-f(x_0)$

$$1\cdot(x-3)=y(x)-(-6)$$

$$y(x)=x-9$$

b) $a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)+2}{2(n+1)+3}-\frac{3n+2}{2n+3}=\frac{3n+5}{2n+5}-\frac{3n+2}{2n+3}=$

$=\frac{(3n+5)(2n+3)-(3n+2)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)}=\frac{5}{(2n+5)(2n+3)}>0$,

ha $n=1,2,3,\dots$, így a sorozat szigorúan monoton növekvő.

c)

$f(x)=\ln(x+3)$ | $f(0)=\ln 3$

$f'(x)=\frac{1}{x+3}=(x+3)^{-1}$ | $f'(0)=\frac{1}{0+3}=\frac{1}{3}$

$f''(x)=-1\cdot(x+3)^{-2}=-\frac{1}{(x+3)^2}$ | $f''(0)=-\frac{1}{9}$

$f'''(x)=-1\cdot(-2)\cdot(x+3)^{-3}=$ | $f'''(0)=\frac{2}{27}$

$=2\cdot\frac{1}{(x+3)^3}$

$$f(x)\approx T_3(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=$$

$$=\ln 3+\frac{1}{3}x-\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{81}x^3$$